| Chambre de Commerce<br>et d'Industrie de Paris<br>—————<br>E.S.I.E.E. | Unité : ST4-SIG<br>Examen d'estimation et modélisation spectrale<br>Date : décembre 2002<br>Durée : deux heures | Majeure<br><br>I4<br>TTS |
|---|---|---|

SUJET À TRAITER – AVEC DOCUMENTS. ***Tous documents autorisés***

Remis par M. J.-F. BERCHER

**ÉNONCÉ**

C'est un véritable scandale. A court d'inspiration, je recycle l'examen de mars 2002 (à quelques questions près) de l'unité « Estimation spectrale » de la majeure « systèmes embarqués » ; Eh oui, ils font aussi de l'estimation spectrale, ceux-la. Et avec le même prof, qui plus est. Ceux qui auraient travaillé l'annale en question seront donc outrageusement avantagés. Mais finalement s'ils ont travaillé et compris, ce n'est peut-être pas si grave. . .Quant aux générations suivantes, elles sauront qu'il faut bosser non seulement les annales de TTS mais encore celles de SE. Pfff.

## Questions (habituelles) de cours et compréhension

*Le correcteur appréciera non seulement la justesse de vos réponses, mais également leur concision.*

1. Dans la méthode du corrélogramme, quelle doit être la propriété vérifiée par la fenêtre $w(k)$ pour que l'estimateur de la densité spectale de puissance soit « physiquement » raisonnable ?
2. Pourquoi le périodogramme n'est-il pas un estimateur satisfaisant de la densité spectrale de puissance ?
3. Dans la méthode du périodogramme moyenné, comment évoluent la variance et la capacité de résolution lorsque l'on augmente le nombre de segments, lors de l'analyse de données de longueur $N$ ?
4. Soient deux raies séparées de $\Delta f = 0.01$, en fréquence réduite. A partir de combien de points $N$ de données est-il possible de séparer ces deux raies ?
5. Donnez l'expression de la densité spectrale de puissance obtenue après modélisation ARMA. Cette DSP est elle continue ou discrète (en d'autres termes peut-on calculer la valeur de la dsp pour n'importe quelle fréquence) ?

## Exercice 1 – Programmation

Proposez un programme, dans le langage de votre choix (mais Matlab de préférence), qui permette d'évaluer expérimentalement la variance d'un estimateur de la densité spectrale de puissance. Vous disposez d'un nombre $K$ de réalisations, chacune sur un nombre de points $N$.
Vous supposerez avoir à votre disposition un ensemble de fonctions `perio, periomoy, perlis, dspar`, qui fournissent les estimées de la densité spectrale de puissance pour les méthodes correspondantes. *Votre problème n'est pas de reprogrammer ces méthodes mais de montrer comment l'on évalue expérimentalement leur variance*.
Vous expliciterez le principe de la méthode et les différentes opérations mises en œuvre (moitié des points) et vous fournirez ensuite le programme (autre moitié). Les archivistes, les prévoyants, les chanceux, les bons élèves pourront noter qu'il s'agit de la fonction `varDSP.m` utilisée et fournie en TP.

## Exercice 2 – Périodogramme adaptatif

On considère le problème de l'estimation continue de la densité spectrale de puissance, en moyennant des périodogrammes avec un facteur d'oubli exponentiel. On dispose ainsi de segments de données consécutifs, de longueurs $M$, et l'on calcule une estimée de rang $m$ $\hat{S}^m(f)$ comme somme pondérée du périodogramme calculé avec les données du $m^e$ segment et de l'estimée de rang précédent :

$$\hat{S}^{(m)}(f) = \alpha \hat{S}^{(m-1)}(f) + \frac{\beta}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_m(n) e^{-j2\pi fn} \right|^2,$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels. On supposera que les différents segments sont décorrélés.

1. Calculez la moyenne statistique $\bar{S} = \mathrm{E}[\hat{S}^{(m)}(f)] = \mathrm{E}[\hat{S}^{(m-1)}(f)]$ (en supposant que l'on est en régime stationnaire). Quelle doit être la valeur de $\beta$ (en fonction de $\alpha$) pour que cet estimateur ait pour moyenne la moyenne du périodogramme ?
2. Montrez, ou vérifiez, que l'estimateur se met également sous la forme

$$\hat{S}^{(m)}(f) = \frac{\beta}{M} \sum_{k=0}^{m} \alpha^{m-k} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_k(n) e^{-j2\pi fn} \right|^2.$$

   Remarquez qu'il est souhaitable que $\alpha < 1$.
3. En supposant que le processus est gaussien, et en utilisant donc les résultats sur la variance du périodogramme, calculez la variance de l'estimateur. On rappelle que les différents segments sont supposés décorrélés.

## Exercice 3 – AR bruité

### Première partie

1. On considère un signal autorégressif d'ordre 1 $y(n)$.
   (a) Donnez son équation aux différences.
   (b) Donnez l'expression du coefficient AR en fonction de $R_{YY}(1)$ et $R_{YY}(0)$.
2. Soit $z(n) = y(n) + b(n)$, où $b(n)$ est un bruit blanc centré de variance $\sigma_b^2$. Si on estime le paramètre AR, noté maintenant $\hat{a}_1$ dans ce cas bruité, montrez que l'on a alors

$$\hat{a}_1 = \frac{\rho}{\rho + 1} a_1,$$

   où $\rho = R_{YY}(0)/\sigma_b^2$ est le rapport signal-à-bruit.
3. Généralisez ce résultat à un modèle AR(p) réel perturbé par un bruit blanc centré de variance $\sigma_b^2$ et montrez que

$$\hat{\mathbf{a}} = \left( \mathbf{R}_{YY} + \sigma_b^2 \mathbf{1} \right)^{-1} \mathbf{R}_{YY} \mathbf{a},$$

   où $\mathbf{R}_{YY}$ est la matrice de corrélation de $y(n)$ et $\mathbf{1}$ la matrice identité de dimensions convenables.

### Seconde partie

Le signal $y(n)$ est maintenant un AR(p), où l'on notera $x(n)$ le bruit blanc d'entrée, de variance $\sigma_x^2$. Ce signal AR(p) pur est perturbé par un bruit blanc additif $b(n)$, de variance $\sigma_b^2$. On note $z(n)$ le signal bruité.

1. Donnez la relation de récurrence sur la séquence de corrélation (ou les équations normales/Yule-Walker), et l'expression théorique de la densité spectrale de puissance pour $y(n)$ [cours !].
2. Donnez l'expression de la séquence de corrélation $R_{zz}(k)$ en fonction de $R_{yy}(k)$ et $\sigma_b^2$.
3. Déduisez-en l'expression de la densité spectrale de puissance de $z(n)$, $S_{zz}(f)$ et montrez que l'on a alors affaire à un ARMA(p,p). On ne vous demande pas d'expliciter les coefficients MA $b_j$.
4. Comment peut-on calculer les coefficients $a_k, k = 1 : p$ ?
5. Comment est modifiée la relation de récurrence sur la séquence de corrélation par l'ajout du bruit blanc additif. Si l'on peut obtenir les coefficients $a_k$, comment pourra t'on utiliser la relation de récurrence pour obtenir $\sigma_x^2$ et $\sigma_b^2$.
6. Bien des questions restent en suspens sur le thème de l'AR bruité, mais conscient de votre grande lassitude, je préfère m'en tenir là. Pour cette fois…