

TF, DIRAC, CONVOLUTION, ET *TUTTI* *QUANTI*

J.-F. BERCHER

École Supérieure d'Ingénieurs en Électrotechnique et Électronique

Octobre 2001 – version 0.2

LA TRANSFORMÉE DE FOURIER¹ est l'un des outils, sinon l'outil fondamental du traicteur de signaux. Elle permet d'associer à la « forme d'onde » habituelle, la représentation d'un signal en fonction de sa variable d'évolution, une autre représentation, complémentaire, dans le domaine fréquentiel.

L'utilisation de cette description fréquentielle permet en outre de caractériser simplement les filtres linéaires, et faciliter leur étude. Après avoir fourni quelques rappels sur la transformée de FOURIER et ses principales propriétés (en complément au polycopié d'E. VIDONI), nous nous intéresserons au filtrage des signaux et introduirons les notions de convolution et de fonction de transfert, qui permettent la caractérisation des filtres. Les principaux éléments seront alors en place pour aborder le problème de l'échantillonnage et énoncer la condition d'échantillonnage de Shannon.

1 Rappels et compléments sur la transformée de Fourier

1.1 Premières définitions autour de la transformée de Fourier

On s'intéresse à une fonction x de la variable t , $x(t)$. Cette fonction peut être à valeurs complexes, et dépend d'une variable t , qui, éventuellement, pourrait être une variable vectorielle. Dans le cadre de ce cours, on s'intéressera essentiellement au cas d'une variable t scalaire, et il sera souvent commode de considérer t comme le temps, la fonction $x(t)$ représentant alors l'évolution temporelle d'un signal. Notons cependant que t ne représente pas nécessairement le temps, et que l'on peut étudier le comportement de signaux suivant une variable d'espace, suivant une concentration, *etc.*...

Une fonction $x(t)$ quelconque, non périodique, peut se décomposer sous la forme d'une intégrale de FOURIER, selon

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df,$$

où

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

On dit que $x(t)$ et $X(f)$ forment une paire de transformées de FOURIER, ce qui est noté par

$$x(t) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\rightleftharpoons}} X(f).$$

La transformée de FOURIER existe si les trois conditions de DIRICHLET sont vérifiées (il s'agit de conditions suffisantes mais pas nécessaires) :

1. $x(t)$ possède un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle fini,
2. $x(t)$ possède un nombre fini de maxima et de minima sur tout intervalle fini,
3. $x(t)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty.$$

En effet, si $x(t)$ est absolument intégrable, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-j2\pi ft}| dt < \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

(car $|x(t) e^{j2\pi ft}| = |x(t)| |e^{j2\pi ft}| = |x(t)|$).

Il est important de noter que tous les signaux d'énergie finie, c'est-à-dire tous les signaux de L_2 ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{j2\pi ft}|^2 dt < +\infty$$

admettent une transformée de FOURIER.

¹Joseph Jean FOURIER, mathématicien, physicien et préfet français (1768-1830), établit entre 1807 et 1811 la loi de FOURIER sur la conduction thermique. En 1822, ses études sur la conduction thermique, le conduisent à développer la technique de l'analyse harmonique, et en particulier un développement de fonctions en série harmonique, développement qui porte aujourd'hui son nom.

La transformée de FOURIER est une fonction complexe, qui pourra être exprimée sous la forme

$$X(f) = |X(f)|e^{j\theta(f)} = A(f) + jB(f),$$

où $|X(f)|$ et $\theta(f)$ sont respectivement les module et phase de $X(f)$, avec

$$\begin{aligned} |X(f)| &= \sqrt{A(f)^2 + B(f)^2}, \\ \theta(f) &= \operatorname{arctg} \frac{B(f)}{A(f)}. \end{aligned}$$

Exemple 1 *Impulsion rectangulaire.*

On note $\operatorname{rect}_T(t)$ l'impulsion rectangulaire définie par

$$\operatorname{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2, T/2], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On cherche alors à calculer la transformée de FOURIER de $x(t) = A\operatorname{rect}_T(t)$. Il suffit d'écrire la définition de la transformée de FOURIER :

$$X(f) = \operatorname{TF} \{A\operatorname{rect}_T(t)\} = A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt,$$

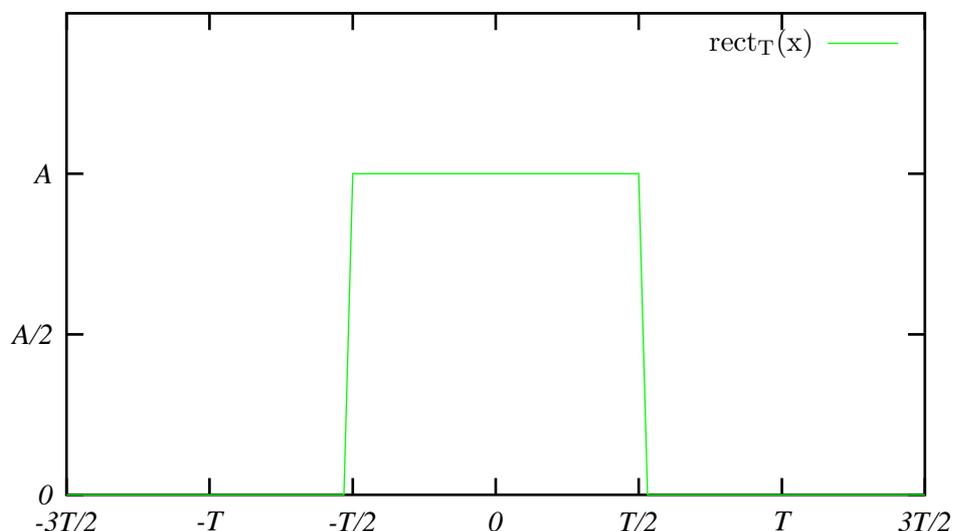
soit

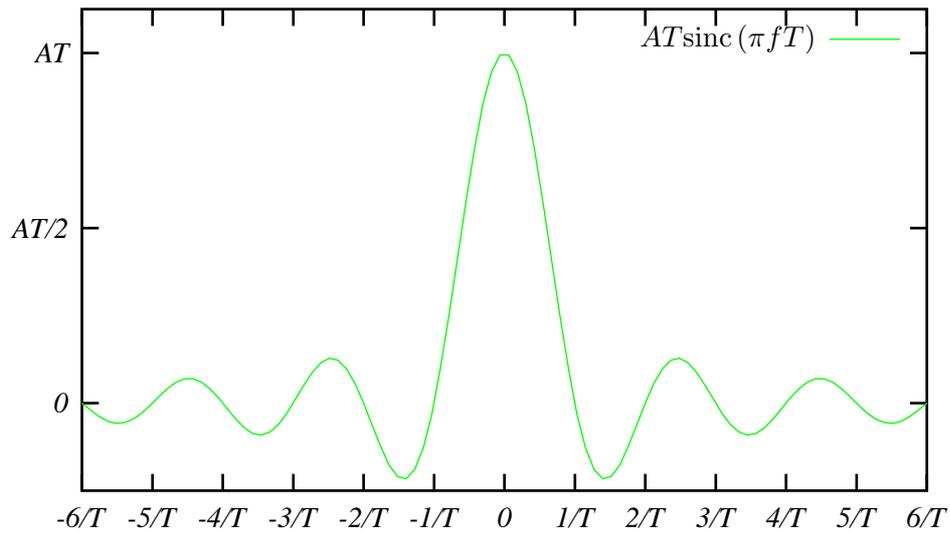
$$X(f) = A \left[\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_{-T/2}^{T/2} = A \frac{1}{j2\pi f} [e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}]$$

et enfin

$$X(f) = AT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \triangleq AT \operatorname{sinc}(\pi fT).$$

où $\operatorname{sinc}(\cdot)$ est la fonction sinus cardinal. On notera que la transformée de FOURIER obtenue est purement réelle, et paire (nous verrons plus loin, §9 que ceci est vérifié pour tous les signaux réels et pairs). Par ailleurs, cette transformée s'annule pour $\pi fT = k\pi$, soit tous les $f = k/T$; sauf pour $k = 0$, puisque $\operatorname{sinc}(x) = 1$ pour $x \rightarrow 0$.



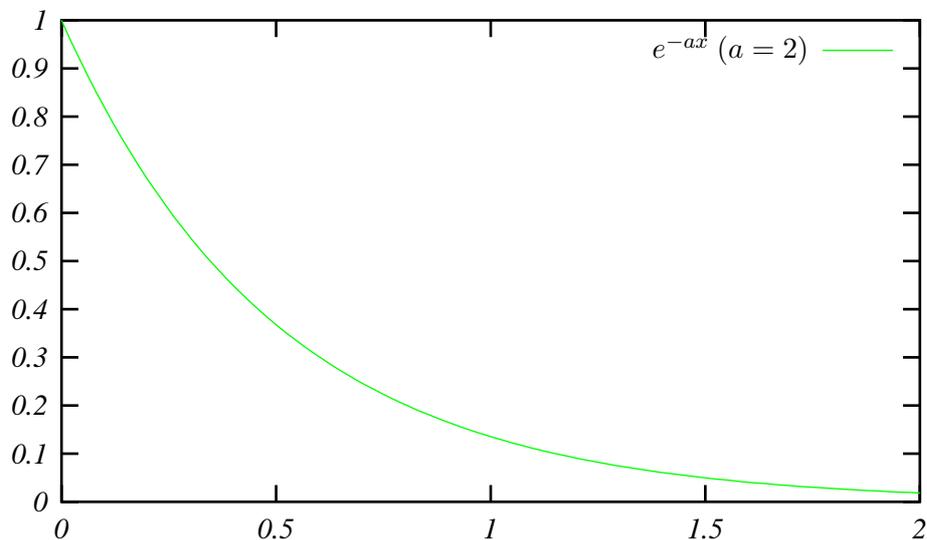
**Exemple 2** Exponentielles.

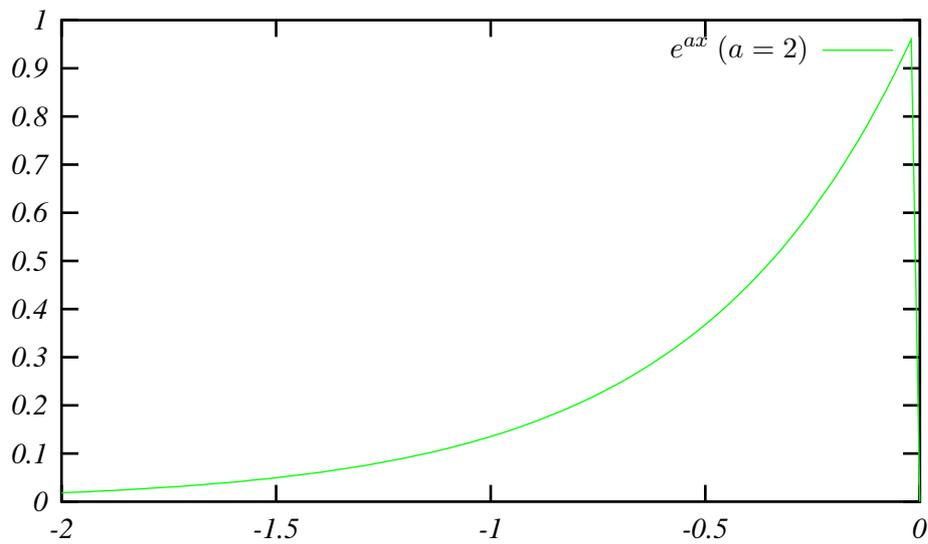
Soit les fonctions $x_1(t) = \exp(-at)u(t)$ et $x_2(t) = \exp(at)u(-t)$, avec a un réel positif, et $u(t)$ l'échelon. Alors

$$X_1(f) = \text{TF} \{x_1(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a + j2\pi f}.$$

De la même façon, on obtient

$$X_2(f) = \text{TF} \{x_2(t)\} = \frac{1}{a - j2\pi f}.$$





1.2 Principales propriétés de la transformée de FOURIER

Propriété 1 La transformée de FOURIER est une transformation linéaire : si

$$\begin{aligned}x_1(t) &\stackrel{\rightrightarrows}{\underset{\leftarrow}{\rightleftharpoons}} X_1(f) \\x_2(t) &\stackrel{\rightrightarrows}{\underset{\leftarrow}{\rightleftharpoons}} X_2(f)\end{aligned}$$

alors, $\forall c_1, c_2 \in \mathbf{C}$,

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \stackrel{\rightrightarrows}{\underset{\leftarrow}{\rightleftharpoons}} c_1 X_1(f) + c_2 X_2(f)$$

Exercice 1 : En vous servant des résultats donnés dans l'exemple 2 et de la propriété de linéarité, montrez que les transformées de FOURIER de

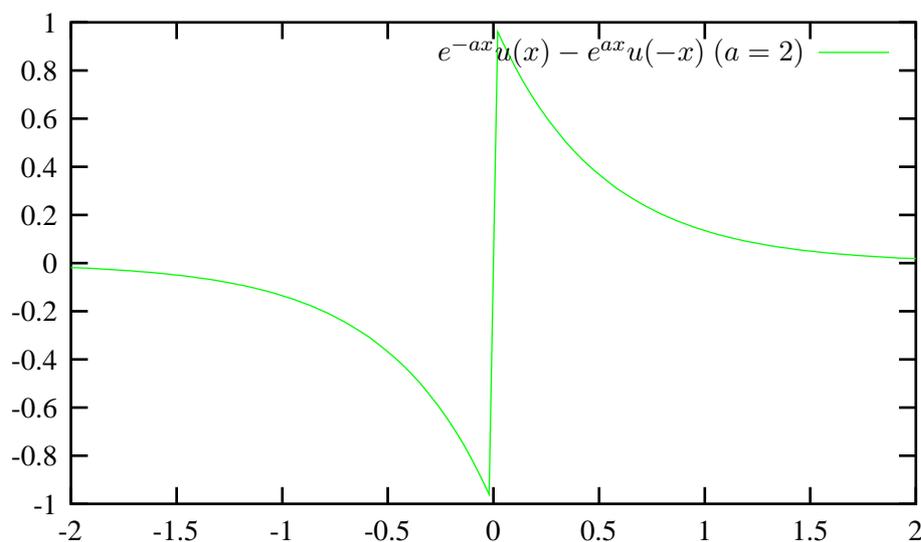
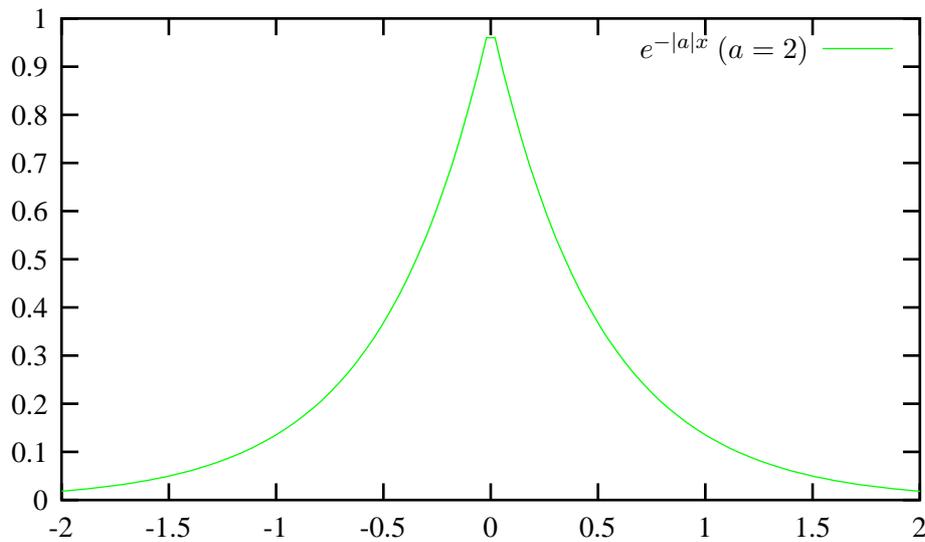
$$\begin{cases} g_1(t) = \exp(-a|t|) = \exp(-at)u(t) + \exp(at)u(-t) \\ g_2(t) = \exp(-a|t|)\text{sign}(t) = \exp(-at)u(t) - \exp(at)u(-t) \end{cases}$$

valent respectivement

$$G_1(f) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

$$G_2(f) = \frac{-j4\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Représentez les module et phase de $G_1(f)$ et $G_2(f)$, et examinez ce que deviennent ces paires de transformées de FOURIER lorsque $a \rightarrow 0$.



Propriété 2 Propriété d'échelle.

Lorsque l'on effectue une contraction ou une dilatation temporelle, on a

$$x(at) \stackrel{\leftarrow}{\rightleftarrows} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right).$$

Cette propriété se montre directement à partir de la définition de la transformée de FOURIER.

Propriété 3 Retard temporel.

Cette propriété permet de donner la transformée de FOURIER d'une fonction retardée en fonction de la transformée de FOURIER du signal initial et d'un terme de retard :

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)e^{-j2\pi ft_0}.$$

À nouveau, cette propriété s'obtient directement en utilisant la définition de la transformée :

$$\text{TF} \{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt;$$

En notant que $e^{-j2\pi ft} = e^{-j2\pi f(t-t_0)}e^{-j2\pi ft_0}$, il vient alors

$$\text{TF} \{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f(t-t_0)} e^{-j2\pi ft_0} dt,$$

soit

$$\text{TF} \{x(t - t_0)\} = e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f(t-t_0)} dt = e^{-j2\pi ft_0} X(f).$$

Propriété 4 Déplacement fréquentiel.

Cette propriété est analogue à (ou plutôt duale de) la propriété du retard temporel : on effectue une « modulation » du signal temporel, à la fréquence f_0 , cette modulation entraînant alors un déplacement (retard) dans le domaine fréquentiel :

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f - f_0).$$

Application : modulation d'amplitude

On considère le signal modulé en amplitude $x(t)$,

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) m(t),$$

où $m(t)$ est le message.

En décomposant le cosinus en la somme de deux exponentielles complexes de fréquences f_0 et $-f_0$, i.e., on a

$$x(t) = \frac{A}{2} [e^{j2\pi f_0 t} m(t) + e^{-j2\pi f_0 t} m(t)],$$

et en utilisant la propriété de déplacement fréquentiel, il vient immédiatement

$$X(f) = \frac{A}{2} [M(f - f_0) + M(f + f_0)],$$

où $M(f)$ est la transformée de FOURIER du message $m(t)$.

Propriété 5 « Moyennes ».

On appelle ici « moyennes » les intégrales des fonctions sur tout leur domaine d'existence. On a alors les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} X(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt, \\ x(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df. \end{aligned}$$

Pour se convaincre de ces deux relations, il suffit d'écrire les définitions des transformées de FOURIER directe et inverse, dans lesquelles on prendra, respectivement, $f = 0$ et $t = 0$. À partir de l'expression de la TF, on a ainsi très simplement l'intégrale de la fonction considérée. Notons que $X(0)$ a une signification précise : c'est la composante fréquentielle à la fréquence nulle, c'est-à-dire la composante continue du signal.

Propriété 6 Différentiation dans le domaine temporel.

Il est intéressant de pouvoir relier la transformée de FOURIER de la dérivée d'un signal à la transformée de FOURIER du signal initial : ceci permet en effet d'obtenir élégamment certains résultats. Si $x(t)$ admet $X(f)$ pour transformée de FOURIER, et en supposant que $dx(t)/dt$ existe et admet une transformée de FOURIER, alors

$$\frac{dx(t)}{dt} \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} j2\pi f X(f).$$

Pour s'en convaincre, il suffit, comme souvent, de revenir à la définition :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi f X(f) e^{j2\pi ft} df, \\ &= \text{TF}^{-1}\{j2\pi f X(f)\}. \end{aligned}$$

Plus généralement, et sous réserve d'existence de la dérivée considérée et de sa TF,

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} (j2\pi f)^n X(f).$$

Propriété 7 Intégration dans le domaine temporel.

En supposant que $X(0) = 0$, on montre (exercice) que

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} \frac{1}{j2\pi f} X(f).$$

Propriété 8 Propriété de dualité.

La propriété de dualité permet d'obtenir facilement de nouvelles paires de transformées de FOURIER à partir des paires déjà connues. Cette propriété s'exprime comme suit : si

$$x(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f),$$

alors

$$X(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} x(-f).$$

Ceci se montre en débutant avec l'expression de $x(-t)$ en fonction de sa TF $X(f)$:

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi ft} df,$$

en échangeant maintenant les variables t et f , on obtient

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt \triangleq \text{TF}\{X(t)\}.$$

Exemple :

On a vu que

$$\text{Arect}_T(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} AT \text{sinc}(\pi fT).$$

Si l'on a maintenant à calculer la transformée de FOURIER inverse d'une fonction porte en fréquence, $\text{Arect}_B(f)$, il suffit d'invoquer cette propriété de dualité pour écrire

$$AB \text{sinc}(-\pi tB) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} \text{Arect}_B(f),$$

et la fonction sinus cardinal étant paire, on en déduit

$$AB \text{sinc}(\pi tB) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} \text{Arect}_B(f).$$

Ceci montre que la transformée de FOURIER d'un sinus cardinal, en temps, est une fonction porte en fréquence.

Propriété 9 Propriétés de conjugaison et symétries.

Comme précédemment, on considère une paire de transformées de FOURIER :

$$x(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f).$$

Lorsque $x(t)$ est une fonction à valeurs complexes, on a

$$\boxed{x^*(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X^*(-f)}.$$

Ceci se vérifie en partant de la définition de la transformée de FOURIER :

$$\begin{aligned} \text{TF} \{x^*(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j2\pi ft} dt, \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi tf} dt \right)^*, \\ &= X^*(-f). \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout signal $x(t)$, on a

$$\boxed{x(-t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(-f)}.$$

Cette dernière relation se vérifie directement en écrivant la transformée de FOURIER de $x(-t)$:

$$\text{TF} \{x(-t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

et en effectuant le changement de variable $-t \rightarrow t$, on obtient

$$\begin{aligned} \text{TF} \{x(-t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi tf} dt, \\ &= X(-f). \end{aligned}$$

En utilisant les deux dernières relations encadrées, on obtient enfin

$$\boxed{x^*(-t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X^*(f)}.$$

En résumé,

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f) \\ x(-t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(-f) \\ x^*(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X^*(-f) \\ x^*(-t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X^*(f) \end{array}}$$

Ces différentes relations permettent de donner toutes les relations de symétrie de la transformée de FOURIER. Pour commencer, on notera la propriété de symétrie hermitienne vérifiée par la transformée de FOURIER des **signaux réels** :

$$\boxed{X(f) = X^*(-f)}$$

on en déduit que, si $x(t)$ est réel, alors

- la partie réelle de $X(f)$ est paire,
- la partie imaginaire de $X(f)$ est impaire,
- le module de $X(f)$, $|X(f)|$ est pair,
- la phase de $X(f)$, $\theta(f)$ est impaire.

D'autre part, si $x(t)$ est pair ou impair ($x(t)$ n'est pas ici nécessairement réel), on peut écrire

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{[pair]} & x(t) = x(-t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f) = X(-f) \quad \text{[pair]} \\ \text{[impair]} & x(t) = -x(-t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f) = -X(-f) \quad \text{[impair]} \end{array}}$$

Le tableau suivant résume enfin les différentes propriétés de symétrie :

$x(t)$	symétrie	temps	fréquence	conséquence sur $X(f)$
réel	quelconque	$x(t) = x^*(t)$	$X(f) = X^*(-f)$	Re. paire, Im. impaire
réel	pair	$x(t) = x^*(t) = x(-t)$	$X(f) = X^*(-f) = X(-f)$	réelle et paire
réel	impair	$x(t) = x^*(t) = -x(-t)$	$X(f) = X^*(-f) = -X(-f)$	imaginaire pur et impair
imaginaire	quelconque	$x(t) = -x^*(t)$	$X(f) = -X^*(-f)$	Re. impaire, Im. paire
imaginaire	pair	$x(t) = -x^*(t) = x(-t)$	$X(f) = -X^*(-f) = X(-f)$	imaginaire et pair
imaginaire	impair	$x(t) = -x^*(t) = -x(-t)$	$X(f) = -X^*(-f) = -X(-f)$	réel et impair

Enfin, on a

Réel pair + imaginaire impair	\rightarrow	Réel
	\leftarrow	
Réel impair + imaginaire pair	\rightarrow	Imaginaire
	\leftarrow	

2 Impulsion de DIRAC

La transformation de FOURIER ne s'applique strictement qu'aux signaux qui vérifient les conditions de DIRICHLET. Il serait agréable d'étendre le formalisme afin de pouvoir définir une transformée de FOURIER pour les signaux de puissance moyenne finie², et de retrouver la série de FOURIER comme cas particulier de la transformée de FOURIER.

Cette extension est possible en utilisant la théorie des distributions, et en particulier la distribution de DIRAC. La distribution de DIRAC est une distribution, et nous devrions faire alors appel aux résultats de la théorie des distributions. Ceci sort largement du cadre de ce cours, et nous nous contenterons ici d'une approche heuristique.

On appelle impulsion de DIRAC la fonction $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0, \\ +\infty & \text{pour } t = 0, \end{cases}$$

et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

L'impulsion de DIRAC est ainsi « une impulsion infiniment fine, d'amplitude infinie, et d'aire unité ».

Conséquence :

L'impulsion de DIRAC joue le rôle d'une fonction indicatrice lorsqu'elle intervient dans une intégration. En effet, l'impulsion de DIRAC est nulle sauf lorsque son argument est nul, auquel cas, son amplitude est infinie, mais son « aire » unité. Ainsi, on peut écrire que $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$. Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0).$$

²Les signaux d'énergie finie sont les signaux tels que

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty,$$

où E_x désigne l'énergie du signal. L'ensemble des signaux d'énergie finie est l'espace L_2 .

Les signaux de puissance moyenne finie sont les signaux qui vérifient

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty,$$

où P_x désigne la puissance moyenne. On notera que ces signaux ne sont pas nécessairement absolument intégrables. L'ensemble des signaux de puissance moyenne finie est souvent noté $L_2(T)$.

On en déduit alors que l'on a, d'une façon générale,

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau, \\ \text{avec } x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-\tau)dt. \end{cases}$$

À l'aide des résultats précédents, il est facile d'exprimer la transformée de FOURIER de l'impulsion de DIRAC, qui vaut simplement :

$$\begin{aligned} \text{TF} \{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt, \\ &= e^{j2\pi 0} = 1. \end{aligned}$$

La transformée de FOURIER de l'impulsion de DIRAC est donc une fonction constante, quelque soit la fréquence :

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{TF}} 1 \quad \forall f.$$

On peut voir (interpréter) l'impulsion de DIRAC comme la limite d'une fonction porte. À cet effet, considérons la fonction porte de largeur ϵ et d'amplitude $1/\epsilon$ (afin que son aire soit unité), $(1/\epsilon)\text{rect}_\epsilon(t)$. nous avons vu que la transformée de FOURIER de cette fonction vaut

$$\frac{1}{\epsilon} \epsilon \text{sinc}(\pi f \epsilon) = \text{sinc}(\pi f \epsilon).$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $(1/\epsilon) \text{rect}_\epsilon(t) \rightarrow \delta(t)$, et $\text{sinc}(\pi f \epsilon) \rightarrow 1$.

2.1 Applications et conséquences

Munis de ces quelques résultats, on peut rechercher les transformées de FOURIER de quelques fonctions qui n'admettraient pas de TF au sens habituel. Ce faisant, on pourra donner un nouvel éclairage à la transformée de FOURIER.

2.1.1 Transformée de FOURIER d'une impulsion retardée

Par simple application de la propriété 3 (retard temporel), on peut écrire que

$$\delta(t - \tau) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-j2\pi f\tau}.$$

La transformée de FOURIER d'une impulsion de DIRAC placée en $t = \tau$ est une exponentielle complexe.

2.1.2 Transformée de FOURIER d'un signal continu

On recherche la transformée de FOURIER d'un signal constant, c'est-à-dire d'un signal continu (au sens « électronique », pas au sens mathématique). Nous avons vu que $\text{TF} \{\delta(t)\} = 1$. En utilisant la propriété de dualité — propriété 8, on en déduit que

$$\text{TF} \{1\} = \delta(-f) = \delta(f).$$

La transformée de FOURIER d'un signal constant est donc une raie, ou une masse, à la fréquence nulle.

2.1.3 Transformée de FOURIER d'une exponentielle complexe

La propriété de modulation, propriété 4,

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f - f_0).$$

implique alors, en prenant $x(t) = 1$, que

$$e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0),$$

c'est-à-dire une impulsion de DIRAC dans le domaine fréquentiel, à la fréquence $f = f_0$ ³. Cette relation, que nous réécrivons en terme de TF

$$\text{TF} \{ e^{j2\pi f_0 t} \} = \delta(f - f_0),$$

est très importante : elle indique en effet que les exponentielles complexes sont orthogonales deux à deux

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \delta(f - f_0),$$

c'est-à-dire que les exponentielles complexes forment une base orthogonale de l'espace des signaux, au sens du produit scalaire habituel

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt.$$

Rappelons qu'alors, si les $e_f(t) = e^{j2\pi f t}$ sont les vecteurs de base, on peut exprimer tout signal $x(t)$ par la décomposition

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x, e_f(t) \rangle e_f(t) dt,$$

où $\langle x, e_f(t) \rangle$ est la *composante* de $x(t)$ pour le vecteur $e_f(t)$ dans le développement, soit la *projection* de $x(t)$ sur $e_f(t)$. La transformée de FOURIER consiste donc simplement à calculer les composantes du développement de $x(t)$ sur cette base :

$$X(f) = \langle x, e_f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt,$$

et la décomposition du signal sur la base des exponentielles complexes est la transformée de FOURIER inverse

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df.$$

2.1.4 Transformée de FOURIER des fonctions trigonométriques

Pour déterminer la TF des fonctions sinusoïdales, il suffit d'appliquer les formules d'EULER :

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_0 t) &= \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}, \\ \sin(2\pi f_0 t) &= \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}, \end{aligned}$$

et il vient alors

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_0 t) &\underset{\leftarrow}{=} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)], \\ \sin(2\pi f_0 t) &\underset{\leftarrow}{=} \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]. \end{aligned}$$

2.1.5 Transformée de FOURIER de la fonction Signe

On montre (cf Exercices) que

$$\text{TF} \{ \text{Signe}(t) \} = \frac{1}{j\pi f}$$

³Notons que l'on peut aussi établir simplement ce résultat en utilisant la propriété de dualité à partir de

$$\delta(t - \tau) \underset{\leftarrow}{=} e^{-j2\pi f \tau}.$$

2.1.6 Transformée de FOURIER de l'échelon unité

L'échelon unité peut être exprimé comme la somme $u(t) = 1/2[\text{Signe}(t) + 1]$, où l'on a supposé que $u(0) = 1/2$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\text{TF}\{u(t)\} &= \frac{1}{2}\text{TF}\{\text{Signe}(t)\} + \frac{1}{2}\text{TF}\{1\}, \\ &= \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f).\end{aligned}$$

Cette transformée est utile pour définir la notion de signal analytique et la transformée de HILBERT.

2.2 Relation entre série et transformée de FOURIER

Soit $x(t)$ une fonction périodique de période T_0 . On a alors

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_{T_0}(t - mT_0),$$

où $x_{T_0}(t)$ est le « motif de base », de durée T_0 . Le signal $x(t)$ étant périodique, de période T_0 , il admet une décomposition en série de FOURIER, sous la forme :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t},$$

où $f_0 = 1/T_0$ et

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x_{T_0}(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt.$$

On déduit immédiatement de cette relation que

$$c_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(n f_0),$$

où $X_{T_0}(f)$ est la transformée de FOURIER de $x_{T_0}(t)$. On a alors

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_{T_0}(t - mT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{T_0}(n f_0) e^{j2\pi n f_0 t}.$$

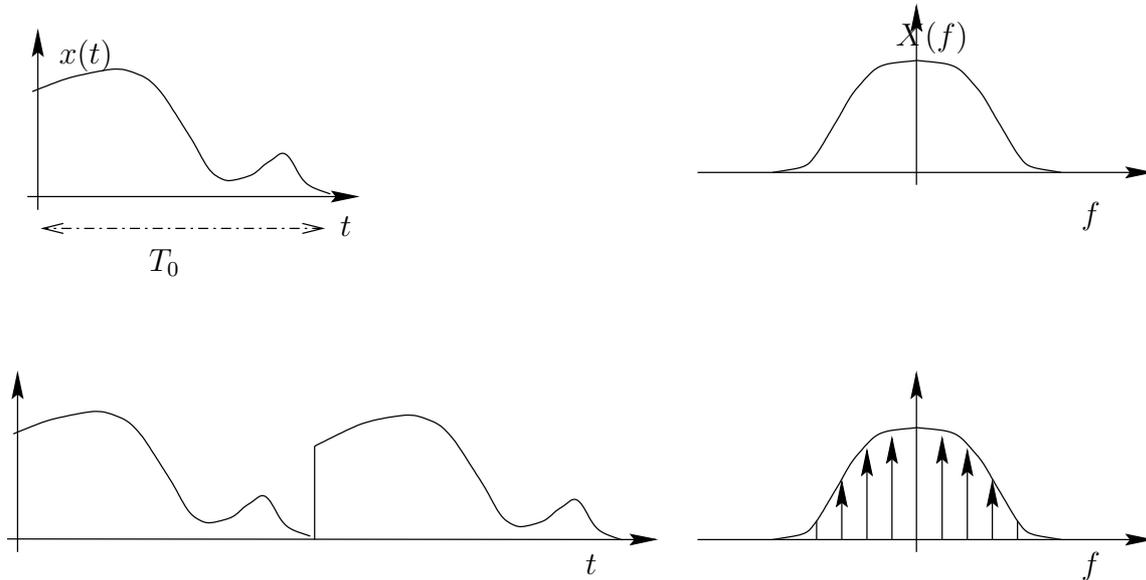
On en déduit donc que la transformée de FOURIER de $x(t)$ s'écrit alors

$$\text{TF}\{x(t)\} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{T_0}(n f_0) \text{TF}\{e^{j2\pi n f_0 t}\},$$

soit

$$X(f) = \text{TF}\{x(t)\} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{T_0}(n f_0) \delta(f - n f_0).$$

La transformée de FOURIER d'un signal périodique de période T_0 est donc constituée d'impulsions de DIRAC, situées tous les multiples de f_0 , et dont le poids est la transformée de FOURIER du motif de base, à la fréquence considérée. *La périodicité dans le domaine temporel conduit à une transformée de FOURIER constituée de raies.*



En prenant enfin $x_{T_0}(t) = \delta(t)$, on obtient les **formules de POISSON** :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 t} ;$$

puis, en écrivant et en égalant les transformées de FOURIER de chacun des deux membres :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f m T_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0) ;$$

soit enfin

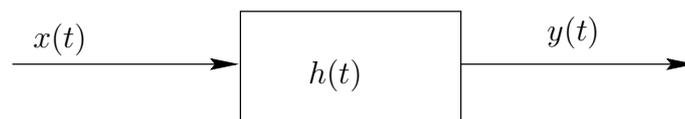
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0) \stackrel{\text{Fourier}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0) .$$

Cette relation montre que la transformée de FOURIER d'un peigne de DIRAC est également un peigne de DIRAC, ces deux peignes étant de pas inversement proportionnel.

3 Convolution

3.1 Filtres et convolution

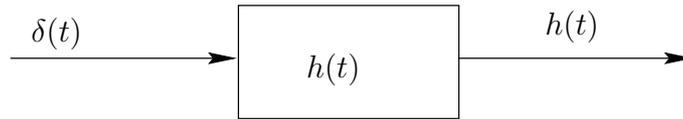
À l'aide des éléments précédemment introduits, nous pouvons maintenant commencer à nous intéresser à l'étude des systèmes linéaires invariants dans le temps, ou *filtres*. Un filtre est un instrument, ou un modèle physique, associant (linéairement) une excitation, ou signal d'entrée, à un signal de sortie.



Un système est *linéaire* s'il justifie du *principe de superposition* : la réponse à une somme pondérée d'excitations est égale à la somme pondérée des réponses aux excitations individuelles :

$$\sum_i \alpha_i x_i(t) \rightarrow \sum_i \alpha_i y_i(t) .$$

Le système est invariant dans le temps si la réponse ne dépend pas de l'instant d'application : si $y(t)$ est la sortie correspondant à une entrée $x(t)$, la réponse associée à $x(t - t_0)$ est $y(t - t_0)$. On appelle *réponse impulsionnelle* (RI), souvent notée $h(t)$, la réponse du système à l'application d'une impulsion de DIRAC $\delta(t)$:



Le système étant linéaire et invariant, alors la réponse associée à $x(\tau)\delta(t - \tau)$ est $x(\tau)h(t - \tau)$.

$$x(\tau)\delta(t - \tau) \rightarrow x(\tau)h(t - \tau).$$

Or, nous avons vu que l'on peut écrire tout signal $x(t)$ comme une somme infinie de « composantes » $x(\tau)$ sur une base d'impulsions de DIRAC :

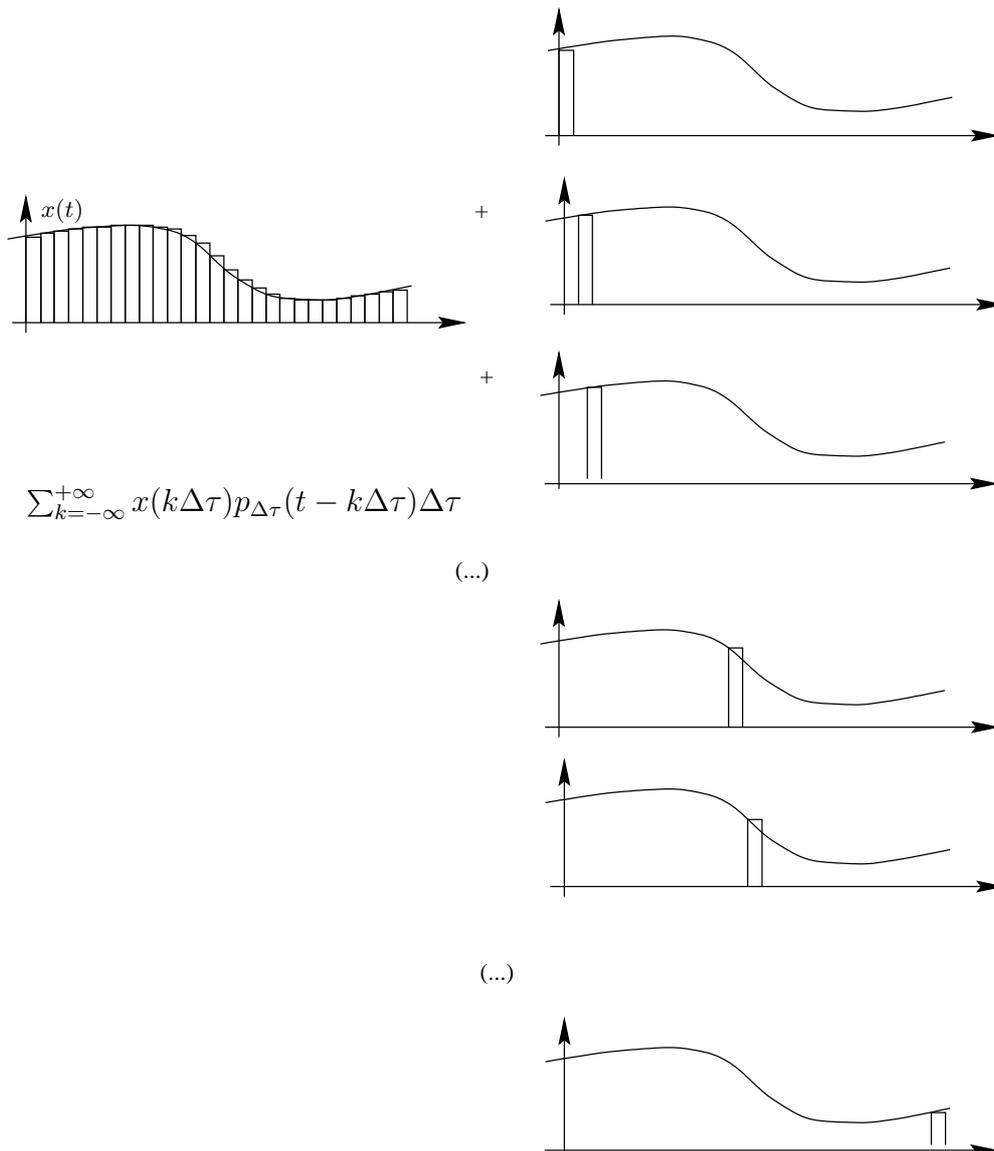
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

On en déduit alors que la réponse globale du système s'écrit, par linéarité :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = [x * h](t).$$

Cette relation est appelée *convolution* entre x et h , et l'opération est notée $[x * h](t)$, pour montrer que le *résultat* de la convolution est évalué à l'instant t et que la variable τ est simplement une variable muette qui disparaît lors de l'intégration. L'intégrale précédente est appelée *intégrale de convolution* ; elle permet d'associer à toute entrée $x(t)$ la sortie du système $y(t)$, celui-ci étant caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$.

On peut encore illustrer l'opérateur convolution de la façon suivante : on décompose l'entrée $x(t)$ en une somme d'impulsions rectangulaires d'amplitude $x(\tau)$ et de largeur $\Delta\tau$:



On note $p_{\Delta\tau}$ l'impulsion de largeur $\Delta\tau$ et d'amplitude $1/\Delta\tau$. L'entrée peut ainsi être approchée par

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta\tau)p_{\Delta\tau}(t - k\Delta\tau)\Delta\tau.$$

Notons maintenant $h_{\Delta\tau}$ la réponse du système à l'impulsion $p_{\Delta\tau}$. Alors, la sortie, à l'instant t , s'écrit comme la superposition de toutes les réponses :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta\tau)h_{\Delta\tau}(t - k\Delta\tau)\Delta\tau.$$

En faisant enfin tendre $\Delta\tau$ vers 0, on a

$$p_{\Delta\tau}(t) \rightarrow \delta(t), \quad h_{\Delta\tau}(t) \rightarrow h(t).$$

On retrouve alors la relation de convolution précédente :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau.$$

On notera que l'opération de convolution est *commutative* :

$$\boxed{[h * x](t) = [x * h](t)}.$$

En effet, si on pose $\tau' = t - \tau$, alors

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau')h(\tau')d\tau'.$$

3.2 Causalité et stabilité

Un filtre est dit *causal*, si la sortie ne dépend que des valeurs de l'entrée précédant la sortie. En d'autres termes, « l'effet ne précède pas la cause ». Dans ces conditions, il est clair que $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Alors,

$$\begin{aligned} y(t) = [x * h](t) &= \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau. \end{aligned}$$

pour un système causal.

Il est clair qu'un système opérant en temps réel doit être causal. Lorsqu'un système peut travailler en temps différé, à l'aide d'une entrée stockée, il n'est pas nécessaire que le système soit causal.

Un filtre est dit stable si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée. On parle alors de stabilité BIBO (pour « *Borned Input Borned Output* »). Si $x(t)$ est borné, $|x(\tau)| \leq M, \forall \tau$, et

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \right|, \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)x(t - \tau)| d\tau, \\ &\leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

et la sortie est bornée si le filtre est stable, c'est-à-dire

$$\boxed{\int_0^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \leq +\infty}.$$

On notera que cette condition nous permettra de définir la transformée de FOURIER de $h(t)$, notée $H(f)$, que nous identifierons à la *fonction de transfert* du filtre.

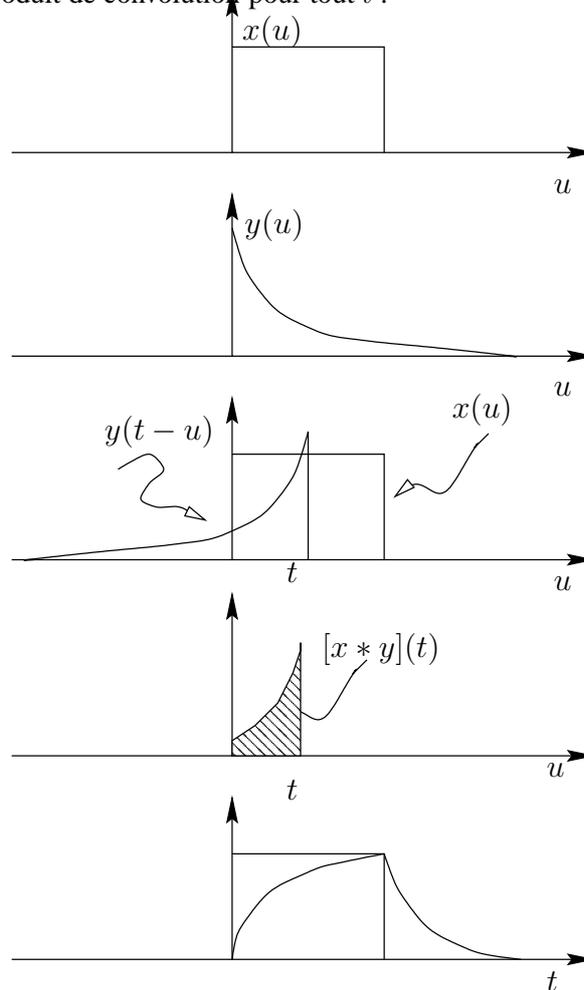
3.3 Interprétation graphique de la convolution

La convolution entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ s'écrit

$$[x * y](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du.$$

Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la surface du produit $x(u)y(t-u)$. Le signal $y(t-u)$ est simplement le signal initial $y(u)$, retourné dans le temps pour donner $y(-u)$, puis translaté de t .

En calculant alors l'ensemble des surfaces obtenues en faisant « glisser » y , c'est-à-dire pour tous les décalages de t , on obtient le produit de convolution pour tout t :



3.4 Réponse en fréquence

La convolution permet de décrire la sortie d'un filtre caractérisé par sa réponse impulsionnelle. Un filtre peut également être caractérisé dans le domaine fréquentiel, ce qui nous amènera à retrouver la notion de fonction de transfert et à donner les relations liant les descriptions temporelles et fréquentielles d'un système linéaire.

Considérons un système de réponse impulsionnelle $h(t)$ et d'entrée

$$x(t) = X_0 e^{j2\pi f_0 t}.$$

La sortie est donnée par

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X_0 e^{j2\pi f_0 (t-\tau)} d\tau, \\ &= X_0 e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau. \end{aligned}$$

On reconnaît là l'expression de la transformée de FOURIER de $h(\tau)$: le *gain complexe* ou la *fonction de transfert* $H(f)$ du système

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau.$$

La sortie s'écrit alors simplement

$$y(t) = X_0 e^{j2\pi f_0 t} H(f_0).$$

Pour un système linéaire excité par une exponentielle complexe de fréquence f_0 , on obtient en sortie le *même* signal, au facteur $H(f)$ complexe près. Ceci donne l'intérêt de la transformée de FOURIER : les exponentielles complexes sont les *fonctions propres* des systèmes linéaires invariants, et $H(f_0)$ joue le rôle de la *valeur propre* associée.

Considérons maintenant un signal $x(t)$ quelconque. On peut exprimer $x(t)$ comme une somme infinie d'exponentielles complexes (il s'agit simplement de la transformée de FOURIER inverse) :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

À chacune des composantes $X(f) e^{j2\pi ft}$ correspond alors une sortie $X(f)H(f) e^{j2\pi ft}$, et, par superposition,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)H(f) e^{j2\pi ft} df.$$

On en déduit que la transformée de FOURIER de la sortie, $Y(f)$, vaut simplement :

$$\boxed{Y(f) = X(f)H(f)}.$$

La description temporelle, en terme de produit de convolution, se transforme donc en un produit simple dans le domaine de FOURIER. Encore une des richesses de la description fréquentielle ;

$$\boxed{[x * y](t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f)Y(f)}.$$

On vérifie facilement que réciproquement,

$$\boxed{x(t)y(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} [X * Y](f)}.$$

En effet, si on exprime la transformée de FOURIER inverse du produit de convolution $[X * Y](f)$,

$$\text{TF} \{[X * Y](f)\}^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u) e^{j2\pi ft} df du.$$

En décomposant $e^{j2\pi ft}$ en $e^{j2\pi(f-u)t} e^{j2\pi ut}$, l'intégrale double devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{j2\pi ut} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-u) e^{j2\pi(f-u)t} df du,$$

et en reconnaissant que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-u) e^{j2\pi(f-u)t} df,$$

il vient

$$\text{TF} \{[X * Y](f)\}^{-1} = x(t)y(t).$$

La transformation du produit de convolution en produit simple par transformée de FOURIER, et réciproquement constituent le théorème de PLANCHEREL

$$\boxed{\begin{array}{l} [x * y](t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f)Y(f), \\ x(t)y(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} [X * Y](f). \end{array}}$$

Ce théorème a plusieurs conséquences importantes.

3.4.1 Conséquences

La transformée de FOURIER de $x(t)y^*(t)$ vaut

$$x(t)y^*(t) \underset{\leftarrow}{\xrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y^*(u-f) du,$$

car TF $\{y^*(t)\} = Y^*(-f)$. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y^*(u-f) du,$$

soit, pour $f = 0$,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y^*(u) du.}$$

Cette relation indique que *le produit scalaire se conserve* dans les différentes bases de représentation des signaux. Cette propriété est appelée théorème de PLANCHEREL-PARSEVAL. En utilisant cette relation avec $y(t) = x(t)$, on obtient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df,}$$

qui est quant-à-elle une relation de *conservation de l'énergie*. Il s'agit de la relation de PARSEVAL.

4 Échantillonnage

Théorème 1 Théorème de Shannon

Lorsqu'un signal $x(t)$ a un spectre à support borné [$X(f) = 0$ pour $|f| > f_{max}$], il est possible d'échantillonner ce signal sans perdre d'information : il suffit pour cela de choisir une fréquence d'échantillonnage $f_e > 2f_{max}$. On pourra alors reconstruire $x(t)$ parfaitement à partir des échantillons $x(nT_e)$, avec $T_e = 1/f_e$:

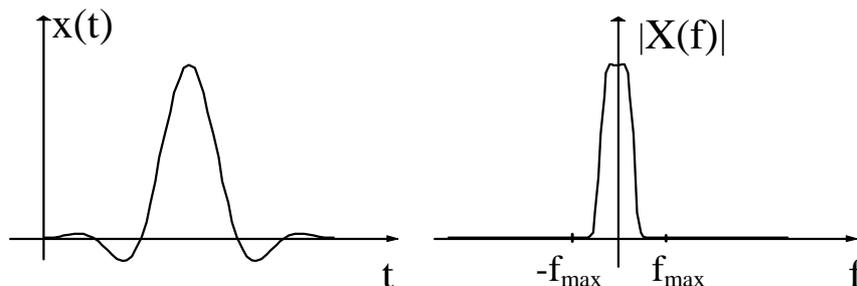
$$\boxed{x(t) = \frac{1}{F_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \operatorname{sinc}(\pi F_e(t - nT_e))}$$

avec

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

4.1 Démonstration du théorème de Shannon

Cette démonstration utilise la notion de distribution.



Le signal $x(t)$ échantillonné à la fréquence $f_e = 1/T_e$ peut être représenté par la distribution $x_e(t)$:

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e).$$

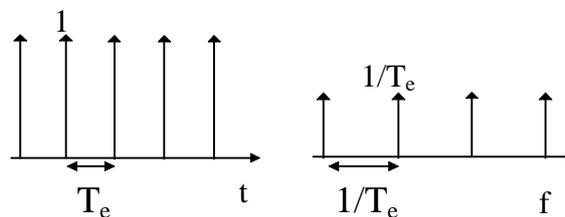
La transformée de Fourier de cette distribution est $X_e(f)$:

$$X_e(f) = X(f) * TF \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \right)$$

La formule de Poisson, cf. page 15, permet de montrer que :

$$TF \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \right) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_e} \right)$$

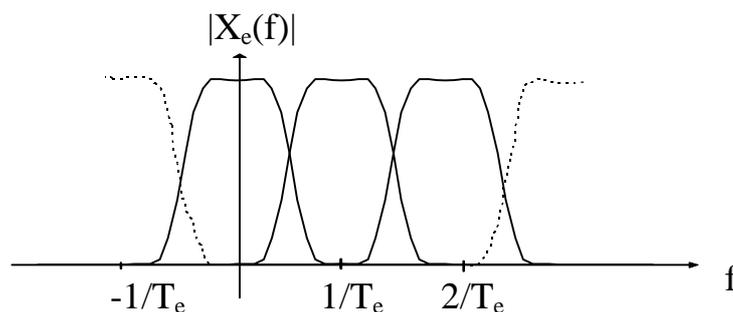
ce que l'on formule généralement par « la transformée de Fourier d'un peigne d'impulsions de Dirac est un peigne d'impulsions de Dirac ».



On a alors

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta \left(f - \frac{n}{T_e} \right) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X \left(f - \frac{n}{T_e} \right).$$

La transformée de Fourier de la distribution $X_e(t)$ est donc une distribution $X_e(f)$ périodique, de période $1/T_e$.

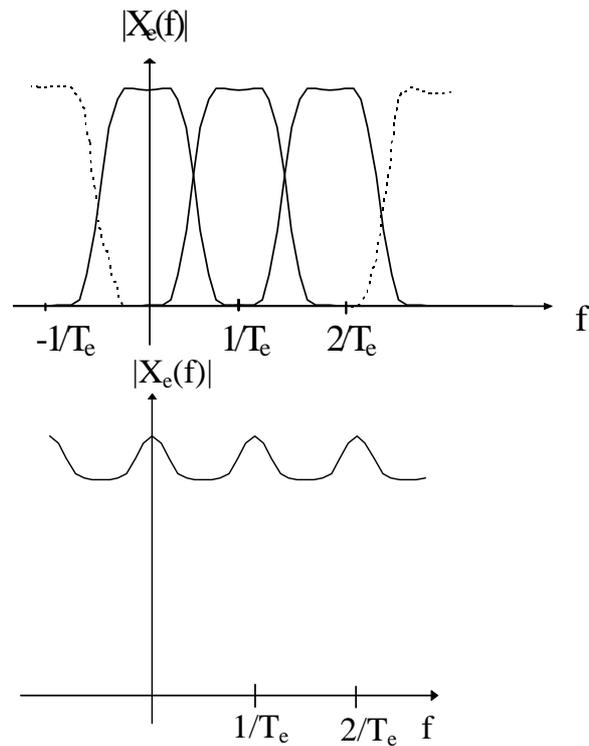


Deux cas peuvent se présenter suivant la valeur de T_e :

• 1^{er} cas :

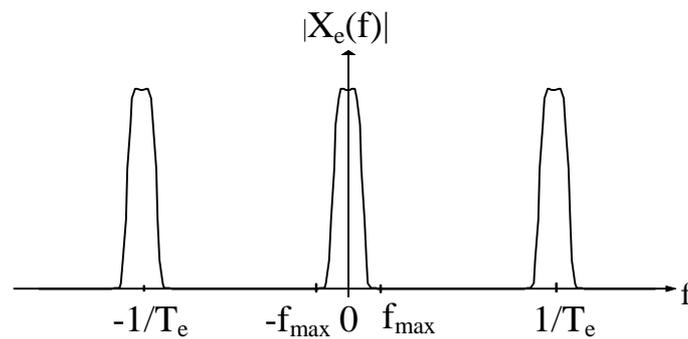
$$\frac{1}{T_e} \leq 2f_{\max}$$

On a alors recouvrement de spectre, « *aliasing* » dans la littérature anglo-saxonne, et il est généralement impossible de reconstruire le signal de départ sans erreur :



• 2^e cas :

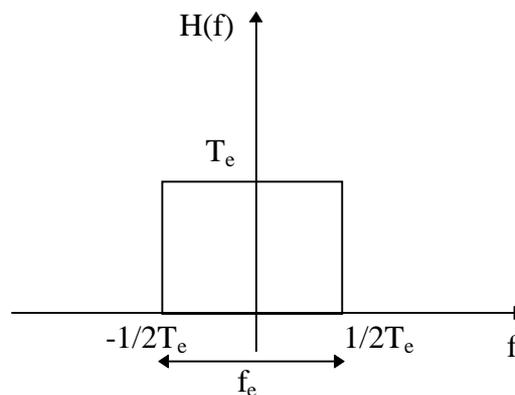
$$\frac{1}{T_e} > 2f_{\max}$$



Il n'y a pas de recouvrement de spectre, $T_e X_e(f)$ et $X(f)$ coïncident entre $-1/2T_e$ et $1/2T_e$.

Pour reconstruire $x(t)$ à partir de $x_e(t)$, il suffit alors de faire passer $x_e(t)$ dans un filtre passe-bas idéal de fonction de transfert $H(f)$:

$$H(f) = T_e \text{rect}\left(\frac{f}{f_e}\right)$$



La sortie $y(t)$ de ce filtre passe-bas vérifie :

$$Y(f) = H(f)X_e(f) = X(f),$$

c'est-à-dire :

$$y(t) = x(t).$$

Le théorème de Shannon est ici démontré, on peut reconstruire parfaitement $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t)$.

Explicitons enfin la relation liant $x(t)$ et les échantillons $x(nT_e)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \\ y(t) &= x_e(t) \star h(t) \\ h(t) &= TFI((H(f)) = f_e T_e \text{sinc}(\pi f_e t) = \text{sinc}(f_e t) \\ y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) \star \text{sinc}(\pi f_e t) \\ y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \text{sinc}(\pi f_e (t - nT_e)) \\ x(t) &= y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \text{sinc}(\pi f_e (t - nT_e)) \end{aligned}$$

Où l'on a noté :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

En résumé, si $F > 2f_{max}$, la connaissance de la suite $x(nT_e)$ est suffisante pour retrouver parfaitement $x(t)$ ou $X(f)$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1 : Soit $x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$ échantillonné à $f_e = 4f_0$. Calculer la transformée de Fourier du signal échantillonné $x_e(t)$.

Corrigé :

$$X(f) = \frac{2}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

$$X_e(f) = 4f_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\delta(f - f_0(1 + 4k)) + \delta(f + f_0(1 + 4k)))$$

Exercice 2 : Calculer la transformée de Fourier du même signal échantillonné à $f_e = \frac{f_0}{2}$.

Corrigé :

$$X_e(f) = 2\frac{f_0}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e)$$

Exercice 3 : Soit $x(t)$ à support spectral borné et f_{max} la fréquence maximale. On échantillonne $x(t)$ à $f_e = 2f_{max}$ et on bloque chaque échantillon pendant une durée $T_e = \frac{1}{f_e}$. Écrire le signal $y(t)$ échantillonné bloqué et calculer sa transformée de Fourier.

Corrigé :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \text{rect}_{T_e}(t - kT_e)$$

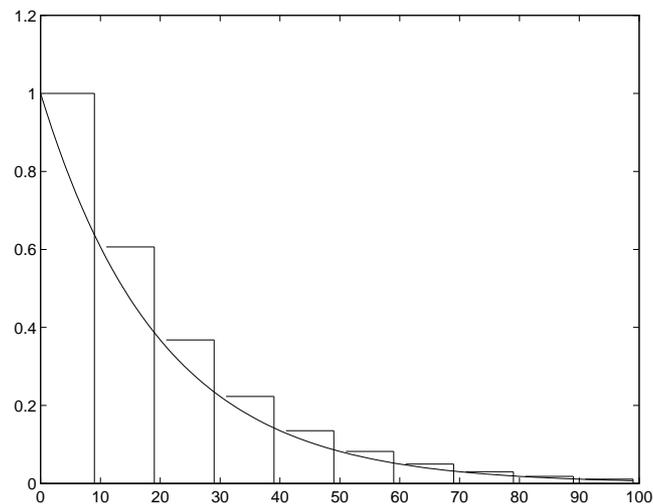
$$y(t) = \text{rect}_{T_e}(t) \star \left(x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e) \right)$$

$$Y(f) = \text{sinc}(fT_e) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e)$$

Exercice 4 : [Exercice pour étudiants avancés] On considère un signal $x(t)$ de transformée de Fourier $X(f)$.

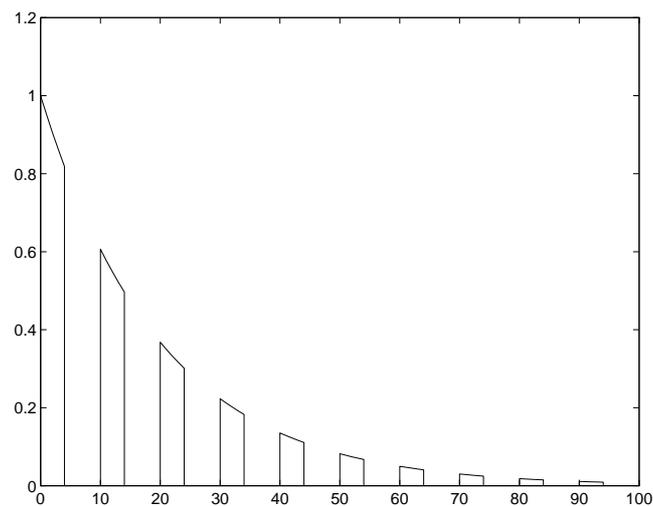
1ère question :

Calculer la transformée de Fourier du signal obtenu en échantillonnant $x(t)$ à la fréquence f_e et en bloquant chaque échantillon pendant T_e . ($T_e = \frac{1}{f_e}$ période d'échantillonnage) (sortie d'un Convertisseur Numérique Analogique par exemple).



2ème question :

Calculer la transformée de Fourier du signal $z(t)$ obtenu à partir de $x(t)$ de la manière suivante : toutes les T_e secondes pendant $\frac{T_e}{2}$ secondes on laisse passer le signal et pendant les $\frac{T_e}{2}$ secondes suivantes on force à zéro la sortie :



3ème question :

Quelle est la fonction de transfert du filtre de lissage idéal dans le premier cas ?

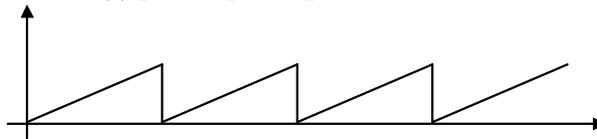
Exercice 5 : On échantillonne le signal $x(t) = \cos(2\pi f_o t)$ (avec $f_o = 1$ KHz) à la fréquence $f_e = 500$ Hz. Puis on filtre le signal échantillonné par un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure égale à 700 Hz, de fonction de transfert $H(f) = \text{rect}_{700}(f)$. On appelle $y(t)$ le signal de sortie du filtre. Calculer $y(t)$.

Problème I :

- 1) Énoncez la condition de Shannon sur l'échantillonnage d'un signal à bande limitée.
- 2) On considère le signal réel $x(t)$ de type passe-bande : $X(f)$ existe pour $|f| \in]F_o - B, F_o + B[$.

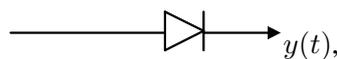
- a) À quelle fréquence peut-on échantillonner ce signal en respectant la condition de Shannon ?
- b) Si on échantillonne à la fréquence limite de Shannon et si les échantillons sont codés sur 8 bits, quel est le débit (en bits/s) nécessaire pour la transmission de ce signal ?
- 3) On échantillonne finalement à la fréquence $F_E = F_o/2$.
- a) Donnez l'expression du signal échantillonné $x_E(t)$.
- b) Donnez l'expression de la transformée de Fourier $X_E(f)$
- c) Quelle condition doit respecter B pour qu'il n'y ait pas de recouvrement ?
- d) En supposant cette condition vérifiée, représentez le module de $X_E(f)$.
- e) Quel est maintenant le débit nécessaire (toujours en codant sur 8 bits) ?
- 4) On pose $F_o = KB$, où K est un nombre entier >1 . À quelle fréquence minimale peut-on alors échantillonner ? Combien obtient-on alors de « motifs » entre 0 et F_o ? Représentez $X_E(f)$ pour $K = 6$.
- 5) On suppose que $x(t)$ a une transformée de Fourier passe-bande, centrée sur F_o et de largeur $2B$, avec $(K + 1)B > F_o \geq KB$. Énoncez un théorème de Shannon généralisé pour ces signaux.
- 6) On isole le motif passe-bas, $f \in [-F_E/2, F_E/2]$, à l'aide du filtre passe-bas idéal de réponse en fréquence $\text{rect}_{F_E}(f)$. Représentez le module de la transformée de Fourier $X_B(f)$ du signal ainsi obtenu $x_B(t)$. Calculez la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre.
- 7) Montrez que l'on retrouve le signal initial en filtrant $x_E(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h'(t) = 2 \cos(2\pi F_o t) h(t)$. Représentez le module de la transformée de Fourier de cette réponse impulsionnelle.

Exercice 6 : On considère le signal $x(t)$ périodique de période T suivant :



- a) Développer $x(t)$ en série de FOURIER.
- b) Tracer le module du spectre de $x(t)$ ($T = 0.1$ sec)
- c) Soit $y(t) = x(t - T/2) - x(t)$. Dessiner $y(t)$. Quel est le développement en série de FOURIER de $y(t)$?

Exercice 7 : On considère le système



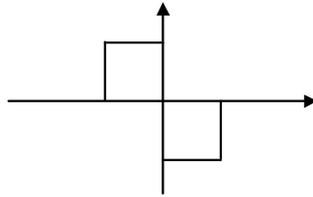
avec $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 100$ Hz.

- a) Quel est le développement en série de FOURIER de $x(t)$?
- b) Quel est le développement en série de FOURIER de $y(t)$?
- c) Tracer les spectres de $x(t)$ et $y(t)$. $[-100, +100]$ (Hz) ?

Exercice 8 : Soit $x(t) = \exp(-at)\text{ech}(t)$ ($\text{ech}(t)$ est l'échelon unité (fonction de Heaviside) et $a > 0$)

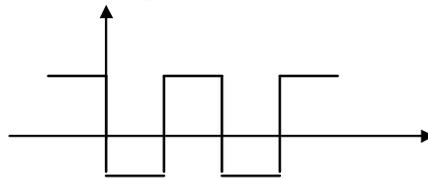
- a) Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$. Tracer son spectre.
- b) $y(t) = x(t) + x(-t)$. Dessiner $y(t)$, calculer la TF de $y(t)$, tracer le spectre correspondant. Étudier $\lim(y(t))$ et $\lim(Y(f))$ lorsque $a \rightsquigarrow 0$
- c) $z(t) = x(t) - x(-t)$. Dessiner $z(t)$, calculer la TF de $z(t)$, tracer le spectre correspondant. Étudier $\lim(z(t))$ et $\lim(Z(f))$ lorsque $a \rightsquigarrow 0$.

Exercice 9 : On considère $x(t)$ suivant :



- Calculer la TF de $x(t)$
- soit $y(t) = \int_0^t x(u)du$. Tracer $y(t)$. Calculer $Y(f) = \text{TF}(y(t))$ en utilisant la propriété sur l'intégration .
- Donner l'expression du signal $x_T(t)$ obtenu par périodisation de $x(t)$. Quelle est la TF de $x_T(t)$? Comparer le resultat à celui obtenu pour l'exercice 1 c).

Exercice 10 : On considère le filtre passe bas de réponse impulsionnelle $h(t) = \exp(-at)\text{ech}(t)$. On met à l'entrée de ce filtre le signal $x(t)$ suivant (étudié précédemment)



- Comment s'écrit $y(t)$, le signal obtenu par filtrage de $x(t)$ par $h(t)$.
- Quelle est la TF du signal $y(t)$.
- Tracer le module du spectre de $y(t)$ ($T=1, a=10$).

Exercice 11 : (modulation d'amplitude)

Soit $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 2 \cos(2\pi f_2 t)$, avec $f_1 = 100$ Hz et $f_2 = 200$ Hz

- Quelle est la TF de $x(t)$?
- On module la porteuse $f_0 = 1000$ Hz en amplitude par $x(t)$: $y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$. (modulation AM sans porteuse). Que vaut $Y(f)$? Tracer les spectres de $x(t)$ et $y(t)$.
- On démodule $y(t)$ en le multipliant par la porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$ et en filtrant le signal résultant $z(t)$ par un filtre passe bas. Quel est le spectre du signal $z(t)$? Quelle doit être la fréquence de coupure de ce filtre pour récupérer le spectre du signal modulant $x(t)$? Interpréter les opérations de modulation et démodulation par des convolutions dans le domaine fréquentiel.

Exercice 12 : [Exercice pour étudiants avancés] (signal analytique)

On considère le signal $x(t)$ réel et sa transformée de FOURIER $X(f)$. On cherche à construire le signal $z(t)$ sous la forme $z(t) = x(t) + jy(t)$ dont le spectre soit nul pour les fréquences négatives et égal à $2X(f)$ pour les fréquences positives, i.e. $Z(f) = 2X(f)\text{ech}(f)$ (avec $\text{ech}(f)$ l'échelon de Heaviside en fréquence).

- Trouver l'expression de $Y(f)$ en fonction de $X(f)$ (on écrira $\text{ech}(f)$ en fonction de $\text{signe}(f)$ la fonction signe).
- Trouver l'expression de $y(t)$ en fonction de $x(t)$. Cette relation (liant $y(t)$ à $x(t)$) s'appelle la Transformée de Hilbert, on la note Hi : $y(t) = Hi(x(t))$.
- Calculer la Transformée de Hilbert de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ et le signal analytique correspondant.

Problème II : [Exercice pour étudiants avancés] (Transformée de Hilbert)

On rappelle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Echelon}(t) \quad \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} \quad \frac{1}{2} \left[\delta(f) - \frac{j}{\pi f} \right] \\ \text{Signe}(t) \quad \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} \quad \frac{-j}{\pi f} \\ \frac{1}{2} \left[\delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right] \quad \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} \quad \text{Echelon}(f) \\ \frac{j}{\pi t} \quad \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} \quad \text{Signe}(f) \end{array} \right. ,$$

où $\underset{\leftarrow}{\rightrightarrows}$ désigne le fait que les deux fonctions mises en relation forment une paire de transformées de Fourier.

On note

$$X_H(f) = -j \text{Signe}(f) X(f).$$

1 – Montrez graphiquement que

$$Z(f) = \frac{1}{2} [X(f) + jX_H(f)]$$

est un signal qui ne possède pas de fréquences négatives.

2 – Montrez que

$$x_H(t) = \text{TF}^{-1}\{X_H(f)\},$$

peut être vu comme la sortie d'un filtre, dont vous donnerez la réponse impulsionnelle $h(t)$.

On appelle *transformée de Hilbert* la transformation reliant $x_H(t)$ et $x(t)$:

$$x_H(t) = \text{TH}\{x(t)\}.$$

3 – Donnez l'expression de $z(t)$ en fonction de $x(t)$ et de $\text{TH}\{x(t)\}$. En raisonnant à partir des transformées de Fourier, montrer que

$$\text{TH}\{\text{TH}\{x(t)\}\} = -x(t).$$

Donnez alors l'expression de la transformée de Hilbert de $z(t)$. Déduisez en l'expression de $x(t)$ en fonction de $z(t)$ et de $\text{TH}\{z(t)\}$.

On considère maintenant un système de réponse impulsionnelle $g(t)$. Si ce système est causal, alors

$$g(t) = g(t) \text{Echelon}(t) = \frac{1}{2} [1 + \text{Signe}(t)] g(t).$$

4 – Montrez que dans ces conditions,

$$G(f) = -j \text{TH}\{G(f)\}.$$

En décomposant $G(f)$ en ses parties réelle et imaginaire, notées respectivement $G_R(f)$ et $G_I(f)$, montrez que

$$\begin{cases} G_R(f) = \text{TH}\{G_I(f)\}, \\ G_I(f) = -\text{TH}\{G_R(f)\}. \end{cases}$$

Ces relations sont les *relations de Bayard et Bode*. Elles indiquent que la TF d'un système causal n'est pas quelconque, et qu'il suffit de connaître la partie réelle ou la partie imaginaire pour caractériser complètement le système.