



## Modulation analogique en amplitude et en fréquence

P.Poulichet  
Mars 2010

## **Introduction**

La transmission d'un signal en bande de base peut poser des difficultés pour les raisons suivantes :

- si les fréquences du signal sont basses, il y a un risque de superposition du bruit lié au fonctionnement des dispositifs industriels,
- il est difficile d'avoir une bonne adaptation de la taille de l'antenne vis-à-vis des fréquences transmises en basse fréquence ; la transmission est optimale lorsque les dimensions de l'antenne sont du même ordre que la longueur d'onde,
- pour certaines fréquences, il est impossible d'avoir une transmission dans le milieu dans de bonnes conditions,
- il n'est pas possible de transmettre simultanément plusieurs signaux.

Pour cela, nous utiliserons une porteuse qui sera adaptée au milieu de transmission. Cette porteuse sera modulée en amplitude, en phase ou en fréquence.

Nous distinguerons plusieurs types de modulations analogiques :

- modulation d'amplitude sans porteuse DBSP (Double Bande Sans Porteuse),
- modulation d'amplitude avec porteuse DBAP (Double Bande Avec Porteuse),
- modulation d'amplitude à Bande Latérale Unique BLU,
- modulation angulaire de phase ou de fréquence.

## PLAN

1	Modulation d'amplitude sans porteuse DBSP .....	4
1.1	Principe de la modulation.....	4
1.1.1	Spectre du signal modulé .....	4
1.1.2	Puissance transportée .....	5
1.2	Démodulation du signal .....	5
1.3	Réalisation de la modulation .....	6
2	Modulation d'amplitude avec porteuse DBAP .....	6
2.1	Principe de la modulation d'amplitude .....	6
2.1.1	Spectre du signal modulé .....	8
2.1.2	Puissance transportée .....	8
2.2	Génération du signal DBAP .....	9
2.2.1	Utilisation d'un circuit non linéaire .....	9
2.2.2	Amplificateur à gain contrôlé.....	9
2.2.3	Utilisation d'un OTA .....	10
2.3	Démodulation .....	11
2.3.1	Démodulation d'enveloppe à diode.....	11
2.3.2	Démodulation synchrone.....	13
3	Modulation d'amplitude à bande latérale unique .....	14
3.1	Production de la BLU par filtrage .....	14
3.2	Production de BLU par déphasage .....	15
3.3	Démodulation de la BLU .....	16
4	Modulation angulaire .....	16
4.1	Modulation de fréquence.....	16
4.2	Modulation de phase .....	17
5	Modulation de fréquence avec un signal sinusoïdal.....	17
5.1	Signal modulant sinusoïdal .....	17
5.2	Modulation à bande étroite.....	18
5.3	Calcul du spectre du signal modulé en fréquence .....	18
5.3.1	Fonctions de Bessel et propriétés .....	19
5.3.2	Suite du calcul .....	19
5.3.3	Fonctions de Bessel de 1 <sup>ère</sup> espèce .....	20
5.3.4	Puissance du signal modulé.....	22
5.3.5	Étalement du spectre en fonction de l'indice de modulation .....	22
5.4	Génération des signaux modulés en fréquence .....	23
5.4.1	Oscillateur commandé en tension .....	23
5.4.2	Méthode indirecte.....	24
5.5	Démodulation de fréquence .....	25
5.5.1	Démodulation par discriminateur.....	25
5.5.2	Démodulation à quadrature .....	27
	Bibliographie.....	32

# 1 Modulation d'amplitude sans porteuse DBSP

## 1.1 Principe de la modulation

Le signal modulant est appelé :  $v_m(t) = V_m \cdot \cos(\omega_m t)$ . La porteuse est appelée  $v_p(t) = V_p \cdot \cos(\omega_p t)$ . Le signal modulé en amplitude est le produit de  $v_m(t) \times v_p(t) = k \cdot V_m \cdot \cos(\omega_m t) \cdot V_p \cdot \cos(\omega_p t)$ .

k est le gain du multiplicateur. L'amplitude de la porteuse est alors multipliée par le signal modulant.

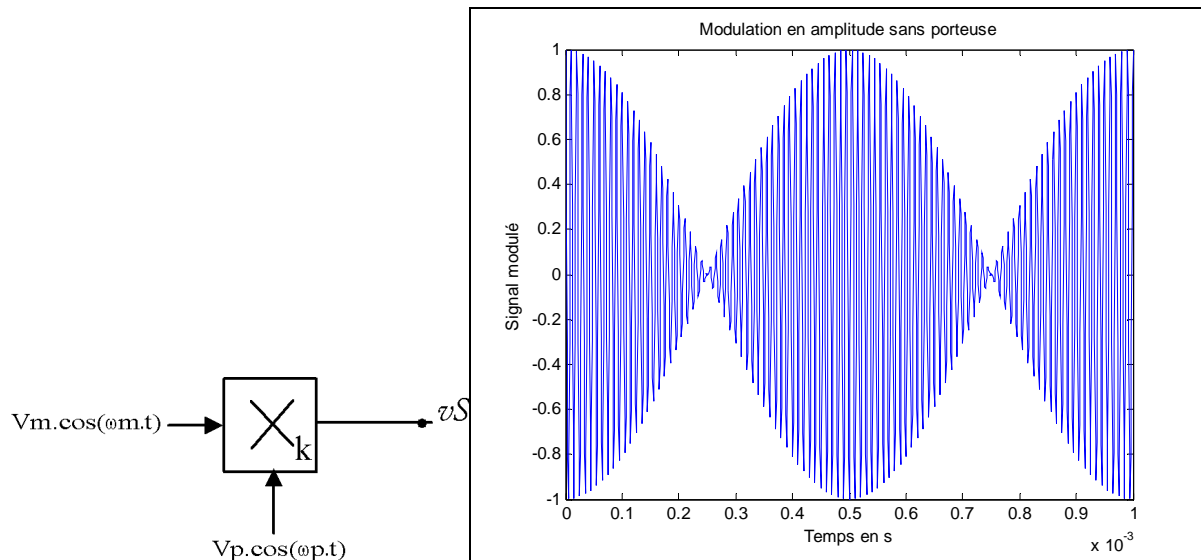


Figure 1 : multiplicateur et signal modulé en amplitude sans porteuse

Sur la Figure 1 on distingue l'enveloppe extérieure du signal qui est égale au signal modulant et à l'intérieur un signal qui est la porteuse.

### 1.1.1 Spectre du signal modulé

On calcule la transformée de Fourier du signal  $v_s(t) = k \cdot V_m \cdot \cos(\omega_m t) \cdot V_p \cdot \cos(\omega_p t)$ . La transformée de Fourier du cosinus est :  $V_p \cdot \cos(\omega_p t) = V_p \cdot \frac{\delta(f - fp) + \delta(f + fp)}{2}$ .

$$V_s(f) = k \cdot V_p \left[ \frac{\delta(f - fp) + \delta(f + fp)}{2} \right] \otimes V_m \left[ \frac{\delta(f - fm) + \delta(f + fm)}{2} \right]$$

$$V(f) = k \cdot \frac{V_m V_p}{4} [\delta(f - (fp + fm)) + \delta(f + (fp + fm)) + \delta(f - (fp - fm)) + \delta(f + (fp - fm))]$$

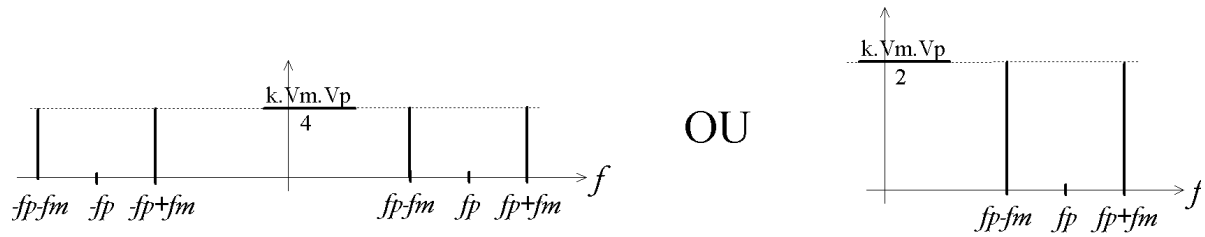


Figure 2 : spectre latéral ou bilatéral

### 1.1.2 Puissance transportée

A partir de la Figure 2, on détermine la valeur efficace puis la puissance dans une résistance normalisée de  $1 \Omega$ .

Fréquence	Puissance
$f_p + f_m$	$k^2 \frac{(V_m V_p)^2}{8}$
$f_p - f_m$	$k^2 \frac{(V_m V_p)^2}{8}$

### 1.2 Démodulation du signal

Le signal reçu DBSP est amplifié et on cherche à retrouver le signal modulant : c'est l'opération de démodulation. La démodulation du signal DBSP nécessite un multiplicateur.

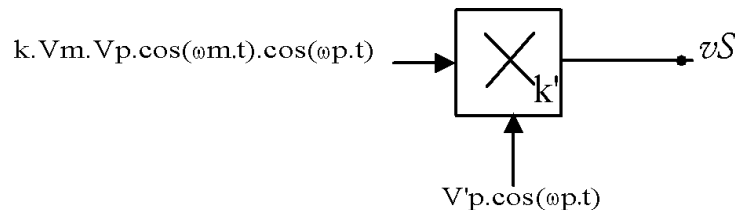


Figure 3 : démodulation du signal DBSP

Le signal  $V'_p \cdot \cos(\omega_p t)$  est un signal image de la porteuse qui est reconstitué coté récepteur.

Le signal  $v_s(t)$  est :

$$v_s(t) = k \cdot k' \cdot V_m \cdot V_p \cdot V'_p \cos(\omega_m t) \cdot \cos^2(\omega_p t) = k \cdot k' \cdot V_m \cdot V_p \cdot V'_p \cos(\omega_m t) \cdot \left( \frac{1 + \cos(2\omega_p t)}{2} \right)$$

$$v_s(t) = \frac{1}{2} k \cdot k' \cdot V_m \cdot V_p \cdot V'_p \left[ \cos(\omega_m t) + \frac{1}{2} (\cos(2\omega_p - \omega_m)t + \cos(2\omega_p + \omega_m)t) \right]$$

Pour restituer le signal modulant, on utilise un filtre passe bas qui va atténuer les composantes au dessus de la fréquence  $f_m$ . L'atténuation  $A_1$  est faible (Ex 0.5 dB) alors que l'atténuation  $A_2$  est élevée (Ex 60 dB).

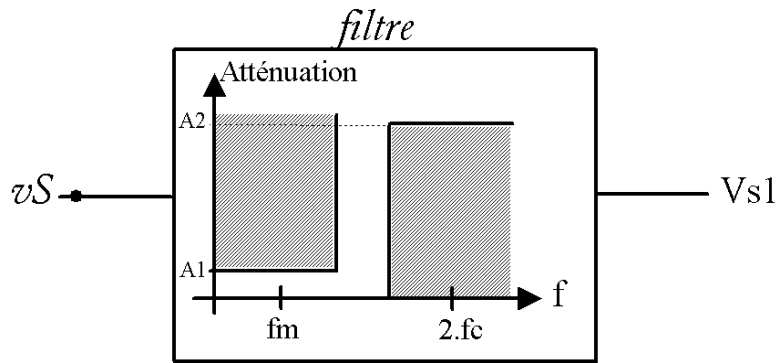


Figure 4 : gabarit du filtre passe-bas

Le signal en sortie du filtre passe-bas sera alors :  $v_{s1}(t) = \frac{1}{2} k.k'.V_m.V_p.V'_p \cos(\omega_m t)$

### 1.3 Réalisation de la modulation

Il existe des circuits qui réalisent le produit de deux signaux analogiques (Ex AD633). Le principe général de ces circuits est basé sur l'utilisation d'un amplificateur différentiel à transistors : une tension est appliquée entre les deux bases tandis que l'autre tension à multiplier commande le courant dans l'émetteur du différentiel. Ce circuit n'est pas très linéaire et il existe différentes variantes (multiplicateur de Gilbert) pour accroître la linéarité.

## 2 Modulation d'amplitude avec porteuse DBAP

Parce que le signal modulé en amplitude du type double bande avec porteuse est plus facile à démoduler avec un circuit simple comme un démodulateur d'enveloppe à diode, ce type de modulation était préférée à celle sans porteuse.

### 2.1 Principe de la modulation d'amplitude

Le signal modulant est appelé :  $v_m(t) = V_m \cdot \cos(\omega_m t)$ . La porteuse est appelée  $v_p(t) = V_p \cdot \cos(\omega_p t)$ .

On calcule le signal suivant :  $v(t) = v_p(t) + k.v_p(t) \times v_m(t) = V_p \cdot \cos(\omega_p t) \cdot (1 + k.V_m \cdot \cos(\omega_m t))$ .

k est le gain du multiplicateur. Le signal peut se mettre sous la forme :  $v(t) = V_p \cdot \cos(\omega_p t) \cdot (1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t))$ .

$\mu = k.A_m$  est appelé coefficient de modulation.

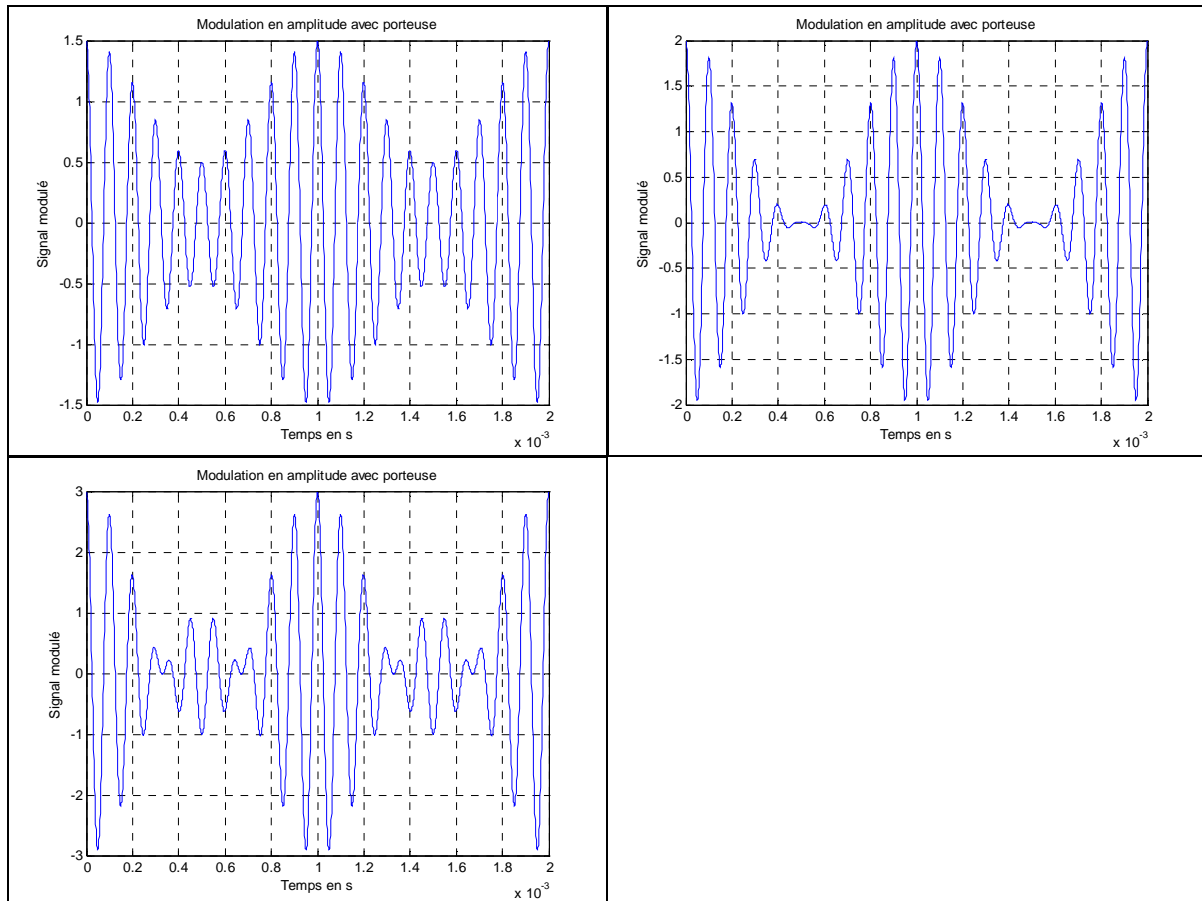


Figure 5 : modulation DBAP ( $f_m = 1 \text{ kHz}$ ,  $f_p = 10 \text{ kHz}$  et  $\mu = 0.5$  à gauche,  $\mu = 1$  et  $\mu = 2$ )

D'après l'expression donnant  $v(t)$  et pour une alternance positive, son amplitude varie entre  $V_p \cdot (1 + \mu)$  et  $V_p \cdot (1 - \mu)$ .

Pour étudier la linéarité de la modulation d'amplitude, on visualise souvent à l'oscilloscope le trapèze de modulation. On l'obtient en connectant à l'oscilloscope dans le mode X-Y le signal modulant sur la voie X et le signal modulé sur la voie Y. La mesure de ces deux amplitudes permet de déterminer le coefficient de modulation  $\mu = \frac{b}{a}$ .

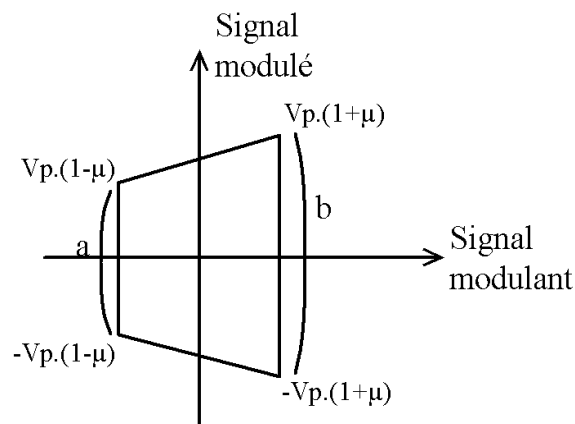


Figure 6 : trapèze de modulation

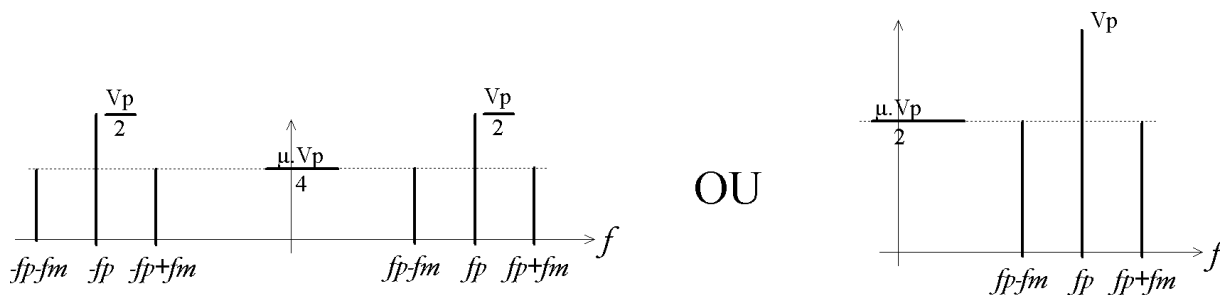
### 2.1.1 Spectre du signal modulé

A partir du signal  $v(t) = V_p \cdot \cos(\omega_p t) \cdot (1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t))$ , on détermine son spectre en calculant la transformée de Fourier de  $v(t)$ . On obtient :

$$v(t) = V_p \left[ \frac{\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)}{2} \right] \otimes \left[ 1 + \mu \frac{\delta(f - f_m) + \delta(f + f_m)}{2} \right]$$

$$v(t) = \frac{V_p}{2} [\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)]$$

$$+ \mu \frac{V_p}{4} [\delta(f - (f_p + f_m)) + \delta(f + (f_p + f_m)) + \delta(f - (f_p - f_m)) + \delta(f + (f_p - f_m))]$$



### 2.1.2 Puissance transportée

La puissance est calculée à partir de l'expression du spectre. Chaque amplitude est la valeur crête et on calcule la valeur efficace en divisant par  $\sqrt{2}$ . La puissance est obtenue en élevant au carré la valeur efficace et en divisant par une résistance normalisée de  $1 \Omega$ .

Fréquence	Puissance
$f_p$	$\frac{V_c^2}{2}$
$f_p + f_m$	$\mu^2 \frac{V_c^2}{8}$
$f_p - f_m$	$\mu^2 \frac{V_c^2}{8}$



## 2.2 Génération du signal DBAP

### 2.2.1 Utilisation d'un circuit non linéaire

On montrera par la suite qu'on utilisera une diode polarisée dans le coude pour être dans la partie non linéaire de la caractéristique. On utilisera le développement limité de la caractéristique de la diode avec la relation :  $y = a + b.x + c.x^2$ . On supposera que  $x = V_m \cdot \sin(\omega m.t) + V_p \cdot \sin(\omega p.t)$  c'est-à-dire qu'on crée un signal qui est la somme de la porteuse et du signal modulant.

$$y = a + b.[V_m \cdot \sin(\omega m.t) + V_p \cdot \sin(\omega p.t)] + c.[V_m \cdot \sin(\omega m.t) + V_p \cdot \sin(\omega p.t)]^2$$

$$y = a + b.[V_m \cdot \sin(\omega m.t) + V_p \cdot \sin(\omega p.t)] + c.V_m^2 \cdot \sin^2(\omega m.t) + c.V_p^2 \cdot \sin^2(\omega p.t)$$

$$+ 2.c.V_p \cdot \sin(\omega p.t) V_m \cdot \sin(\omega m.t)$$

$$y = a + b.[V_m \cdot \sin(\omega m.t) + V_p \cdot \sin(\omega p.t)] + c.V_m^2 \cdot \left(\frac{1 - \cos(2\omega m.t)}{2}\right) + c.V_p^2 \cdot \left(\frac{1 - \cos(2\omega p.t)}{2}\right)$$

$$+ 2.c.V_p \cdot \sin(\omega p.t) V_m \cdot \sin(\omega m.t)$$

Après filtrage passe bande, il ne reste de l'expression que les termes suivant :

$$y = b.V_p \cdot \sin(\omega p.t) \left(1 + 2 \cdot \frac{c}{b} V_m \cdot \sin(\omega m.t)\right)$$

Le circuit de la Figure 7 permet de réaliser une modulation DBAP. Le générateur Vdc permet de se placer dans le coude de la diode. Le filtre passe bande est réalisé avec R2, L et C.

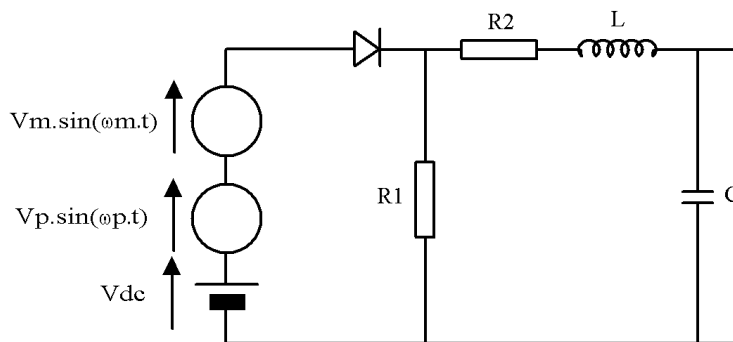


Figure 7 : utilisation d'une diode pour réaliser une DBAP

### 2.2.2 Amplificateur à gain contrôlé

Le circuit de la Figure 8 décrit un montage à AOP monté en non inverseur. Le FET est utilisé en résistance variable. La résistance du FET est commandée par le signal modulant et il en est de même pour le gain du montage. La tension  $v_e$  étant égale à la porteuse, l'amplitude de la porteuse de  $v_s$  dépendra du signal modulant.

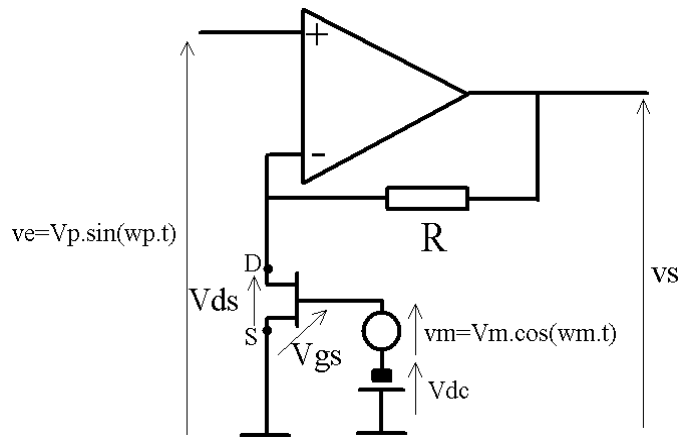


Figure 8 : contrôle du gain par un FET

$$\frac{v_s}{v_e} = 1 + \frac{R}{R_{DS}} \quad \text{et} \quad R_{DS} = \frac{R_{DS0}}{1 - \frac{vm}{Vp1}} \cdot Vp1$$

Vp1 représente la tension de pincement du transistor c'est-à-dire la tension correspondant à une résistance infinie  $R_{DS}$ .

$$\text{Donc, } \frac{v_s}{v_e} = 1 + \frac{R}{\frac{R_{DS0}}{1 - \frac{vm}{Vp1}}} = 1 + \frac{R}{R_{DS0}} \left( 1 - \frac{vm}{Vp1} \right)$$

En remplaçant  $v_e$  et  $vm$  par leurs expressions, on obtient :

$$v_s = \left[ 1 + \frac{R}{R_{DS0}} - \frac{R}{R_{DS0}} \frac{1}{Vp1} Vm \cdot \sin(\omega m \cdot t) \right] \cdot Vp \cdot \sin(\omega p \cdot t)$$

La tension  $V_{dc}$  du montage de la Figure 8 permet d'ajuster la symétrie de la modulation : la modulation doit être linéaire quelque soit l'amplitude de  $vm$ .

### 2.2.3 Utilisation d'un OTA

Un OTA (Operational Transconductance Amplifier) est un amplificateur dont le gain est commandé en fonction d'un courant de polarisation. La transconductance  $g_m$  est le rapport entre le courant de sortie et la tension d'entrée. On a :  $g_m = \frac{I_{OUT}}{v_{in}}$  et  $g_m = K \cdot I_{ABC}$

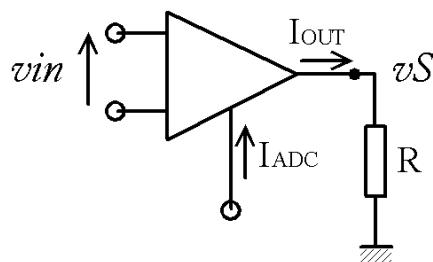


Figure 9 : OTA

La tension porteuse est appliquée sur vin et la tension de modulation commande  $I_{ABC}$ ; par exemple par l'intermédiaire d'un transistor comme sur la Figure 10. Le courant  $I_{ABC}$  est égal

$$à : I_{ABC} = \frac{15 - V_{BE} - V_m}{R1}.$$

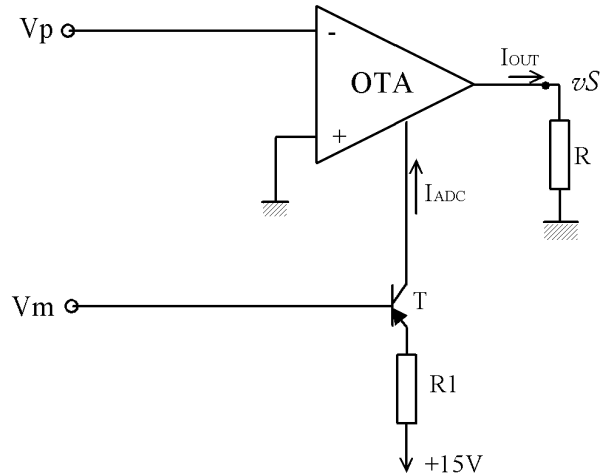


Figure 10 : commande du courant sur l'OTA

## 2.3 Démodulation

### 2.3.1 Démodulation d'enveloppe à diode

Le principe consiste à utiliser une diode pour bloquer la partie négative du signal modulé en amplitude. Le filtre RC élimine la porteuse et sa constante de temps doit être judicieusement choisie.

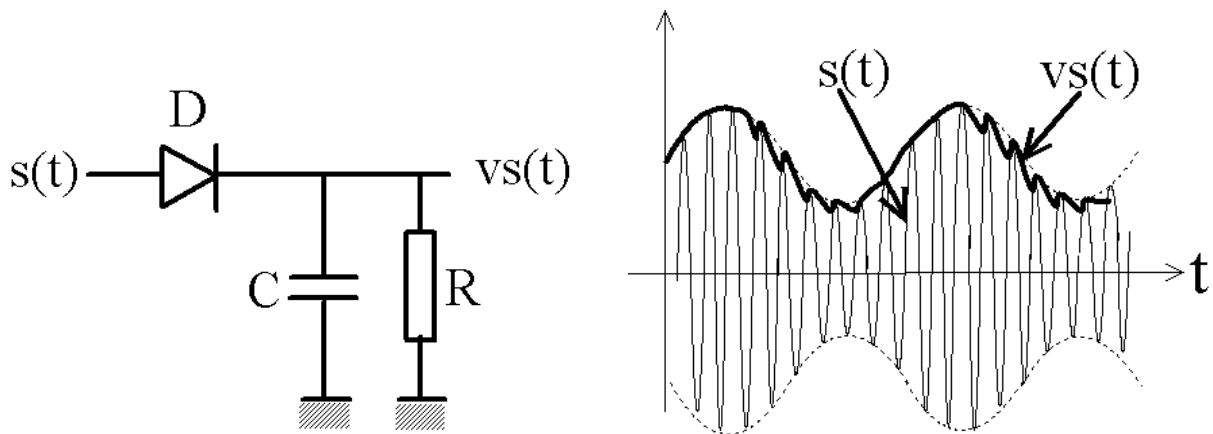


Figure 11 : démodulation d'enveloppe à diode

Le signal DBAP est donnée par l'expression suivante :  $s(t) = V_p \cdot (1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t)) \sin(\omega_p t)$ .

On distingue 2 phases :

Phase a : charge de C

Phase b : décharge de C.

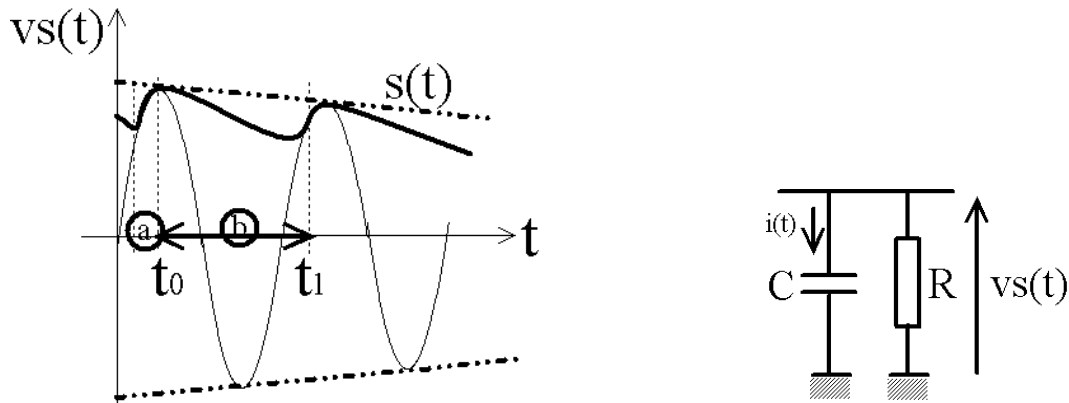


Figure 12 : charge et décharge de R-C

- La décharge de C pendant la phase b doit être faible. Ceci conduit à :  $RC \gg \frac{1}{fp}$ .
- En partant de l'instant  $t = t_0$  de la Figure 12, la pente de décroissance de  $vs(t)$  doit être plus négative que  $s(t)$ . Si tel n'est pas le cas, la tension aux bornes de la capacité sera plus élevée et l'erreur sera plus grande.

D'après la Figure 12,  $i = C \frac{dvs}{dt}$  et  $vs = -R.i \Rightarrow \frac{dvs}{dt} > -\frac{vs}{RC}$

A l'instant  $t = t_0$ ,  $s(t_0) = V_p \cdot (1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t_0))$

$$\left[ \frac{ds(t_0)}{dt} \right] = -\mu \cdot V_p \cdot \omega_m \sin(\omega_m t_0)$$

$$-\frac{V_p \cdot (1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t_0))}{RC} < -\mu \cdot V_p \cdot \omega_m \sin(\omega_m t_0)$$

$$\frac{1}{RC} > \frac{\mu \cdot V_p \cdot \omega_m \sin(\omega_m t_0)}{V_p \cdot (1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t_0))}$$

$$RC < \frac{1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t_0)}{\mu \cdot \omega_m \sin(\omega_m t_0)}$$

Nous allons chercher la valeur minimale du rapport obtenu afin d'être certain d'avoir la valeur minimale de RC. Calculons la dérivée que l'on annulera par la suite :

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{-\mu^2 \cdot \omega_m^2 \cdot \sin^2(\omega_m t_0) - \mu \cdot \omega_m^2 \cdot \cos(\omega_m t_0) [1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t_0)]}{[\mu \cdot \omega_m \sin(\omega_m t_0)]^2}$$

$$-\mu^2 \cdot \omega_m^2 - \mu \cdot \omega_m^2 \cdot \cos(\omega_m t_0) = 0$$

$$-\mu \cdot \omega_m^2 (\mu + \cos(\omega_m t_0)) = 0$$

$$\cos(\omega_m t_0) = -\mu$$

En tenant compte de la dernière expression obtenue, on remplace dans l'expression donnant une condition sur RC :

$$RC < \frac{1 - \mu^2}{\mu \cdot \omega_m \sqrt{1 - \mu^2}}$$

Au final, la constante de temps RC est encadrée par :  $\frac{1}{fp} < RC < \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu \cdot \omega_m}$

Pour  $\mu$  tendant vers 1, la démodulation devient difficile. Le circuit ne démodule pas si  $\mu > 1$  car la diode écrête la partie négative.

La démodulation synchrone que nous décrivons au paragraphe suivant présente moins de distorsions et la démodulation se fait même si  $\mu > 1$ .

### 2.3.2 Démodulation synchrone

Le principe est décrit sur la Figure 13.

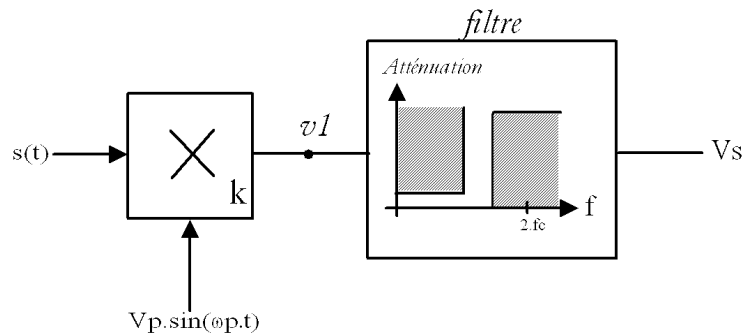


Figure 13 : principe de la démodulation synchrone

$$s(t) = V_p \cdot (1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t)) \sin(\omega_p t)$$

$$s(t) \cdot k \cdot V_p \cdot \sin(\omega_p t) = k V_p^2 \cdot (1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t)) \sin^2(\omega_p t)$$

$$s(t) \cdot k \cdot V_p \cdot \sin(\omega_p t) = \frac{k V_p^2}{2} \cdot (1 - \cos(2\omega_p t)) (1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t))$$

$$v_1(t) = \frac{k V_p^2}{2} \cdot (1 + \mu \cdot \cos(\omega_m t) - \cos(2\omega_p t) - \mu \cdot \cos(\omega_m t) \cdot \cos(2\omega_p t))$$

Après filtrage passe bas, l'expression est :

$$v_s(t) = \frac{k V_p^2}{2} \cdot (1 + \mu \cdot \sin(\omega_m t))$$

La démodulation synchrone démodule le signal même si  $\mu > 1$ . La difficulté de ce montage est de restituer, coté réception, la porteuse car celle-ci n'est pas transmise. Il est alors utilisé une boucle à verrouillage de phase (PLL).

Pour réduire l'occupation spectrale, il y a avantage à utiliser une modulation à bande latérale unique BLU.

### 3 Modulation d'amplitude à bande latérale unique

L'expression de la bande latérale supérieure est :

$$s(t) = \frac{V_m V_p}{2} \cdot \sin((\omega_p + \omega_m)t)$$

Il existe deux montages principaux pour générer la bande latérale unique BLU.

#### 3.1 Production de la BLU par filtrage

Cela se réalise en utilisant des filtres qui éliminent une des deux bandes latérales. Seulement, un exemple montre que les performances exigées par les filtres ne sont pas réalisables en pratique. Etudions un exemple.

On considère que le signal modulant a une bande passante s'étendant de 300 Hz à 3 kHz. La fréquence de la porteuse est de 10 MHz. La bande latérale supérieure s'étend de 10,0003 MHz à 10,003 MHz. La bande latérale inférieure s'étend de 9,997 MHz à 9,9997 MHz. Le filtre doit atténuer la bande latérale inférieure avec un gabarit comme celui de la Figure 14. L'ordre du filtre réalisant ce gabarit est directement fonction de l'écart entre les fréquences [9.9997 MHz – 10.0003 MHz]. Dans ce cas, il n'est pas réalisable car la sélectivité (9.9997/10.0003) est trop proche de 1.

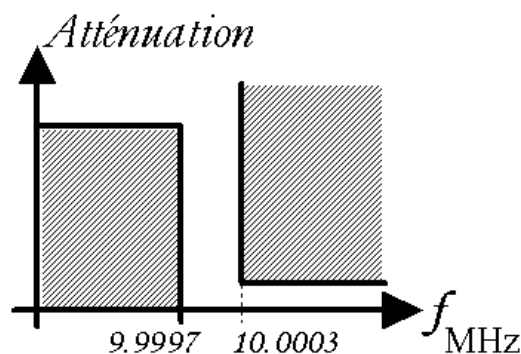


Figure 14 : gabarit du filtre passe bas

On procède avantageusement par changement de fréquence en combinant multiplicateur et filtre comme décrit à la Figure 15.

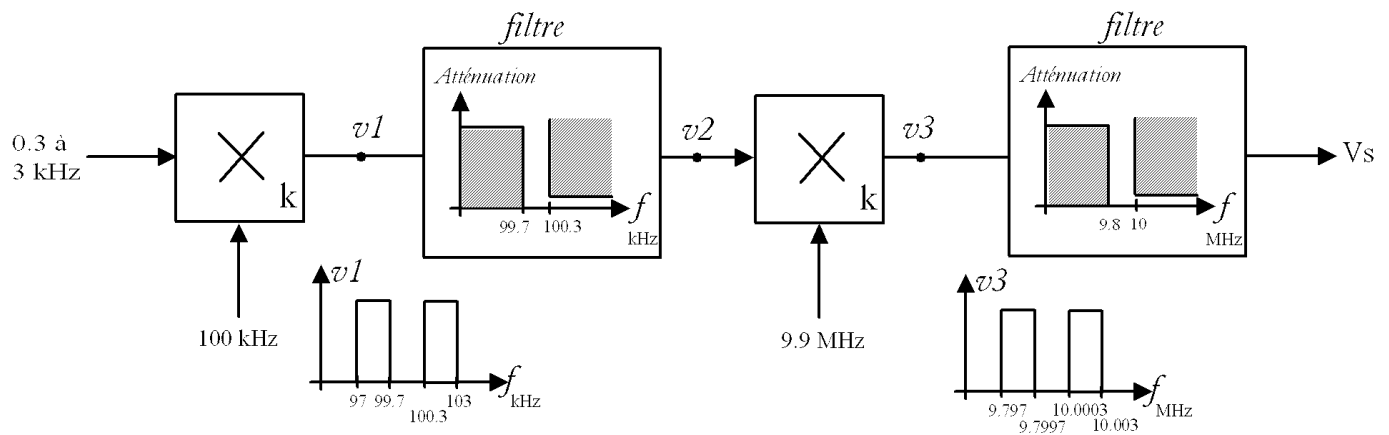


Figure 15 : BLU par filtrage [4]

- Après multiplication par une première fréquence à 100 kHz, le spectre de sortie du multiplicateur [97k - 99.7k] est atténué par un filtre. Il s'agit d'atténuer la fréquence de 99.7 kHz et de transmettre sans atténuation la fréquence de 100.3 kHz.
- La multiplication par la fréquence de 9.9 MHz fait apparaître 2 bandes de fréquences. Celle comprise entre [9.797M – 9.7997M] est atténué par filtrage. Le filtre doit atténuer en dessous de la fréquence de 9.7997 MHz et transmettre sans atténuation la fréquence de 10.0003 MHz soit environ 200 kHz de largeur de bande.

### 3.2 Production de BLU par déphasage

On considère que le signal BLU est de la forme suivante :  $s(t) = \frac{V_m V_p}{2} \cdot \cos((\omega_p + \omega_m)t)$ .

$$s(t) = \frac{V_m V_p}{2} \cdot [\cos(\omega_p t) \cdot \cos(\omega_m t) - \sin(\omega_p t) \cdot \sin(\omega_m t)]$$

$$s(t) = \frac{V_m V_p}{2} \cdot \left[ \cos(\omega_p t) \cdot \cos(\omega_m t) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_p t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_m t\right) \right]$$

$$s(t) = \frac{V_m V_p}{2} \cdot \left[ \cos(\omega_p t) \cdot \cos(\omega_m t) - \cos\left(\omega_p t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega_m t - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

A partir de cette expression, on aboutit au schéma de la Figure 16.

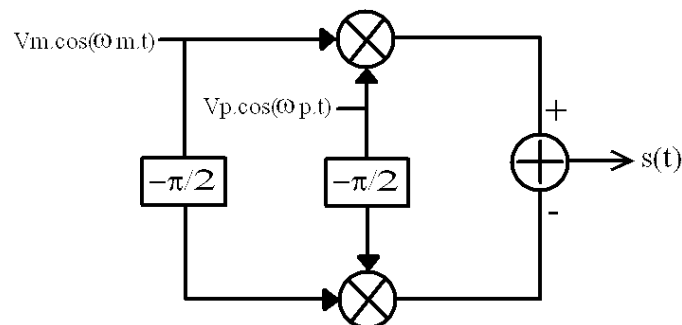


Figure 16 : BLU par déphasage

La difficulté de ce principe c'est d'avoir un déphasage constant  $\frac{\pi}{2}$  même si la fréquence  $f_m$  varie. Une solution est de combiner plusieurs déphaseurs placés les uns à la suite des autres mais agissant à des fréquences différentes.

### 3.3 Démodulation de la BLU

Le signal BLU reçu est multiplié par  $V'_p \cdot \cos(\omega_p \cdot t)$ . Cela donne :

$$s(t) = \frac{V_m V_p}{2} \cdot \cos((\omega_p + \omega_m)t) V'_p \cdot \cos(\omega_p \cdot t)$$

$$s(t) = \frac{V_m V_p}{4} V'_p \left[ \cos((2\omega_p + \omega_m)t) - \cos(\omega_m \cdot t) \right]$$

Le terme  $\cos((2\omega_p + \omega_m)t)$  est éliminé par filtrage passe bas.

## 4 Modulation angulaire

Ce type de modulation est une modulation de phase ou de fréquence.

### 4.1 Modulation de fréquence

Un signal sinusoïdal s'exprime de la façon suivante :  $s(t) = A \cdot \cos(\theta_i(t))$

Par définition, la fréquence instantanée  $f_i$  est commandée par le signal modulant  $m(t)$  autour d'une porteuse  $f_p$  :

$$\boxed{f_i = f_p + K_f \cdot m(t)}$$

$K_f$  est la sensibilité du modulateur et elle s'exprime en  $\text{Hz} \cdot \text{V}^{-1}$ .

La pulsation instantanée est :  $\omega_i = 2\pi f_p + 2\pi K_f \cdot m(t)$

La phase instantanée du signal modulé est donnée par l'expression suivante :

$$\theta_i(t) = \int \omega_i \cdot dt = 2\pi \cdot f_p \cdot t + 2\pi \cdot K_f \cdot \int m(t) \cdot dt$$

L'expression du signal modulé est donc :

$$\boxed{s(t) = A \cdot \cos\left(2\pi \cdot f_p \cdot t + 2\pi \cdot K_f \cdot \int m(t) \cdot dt\right)}$$



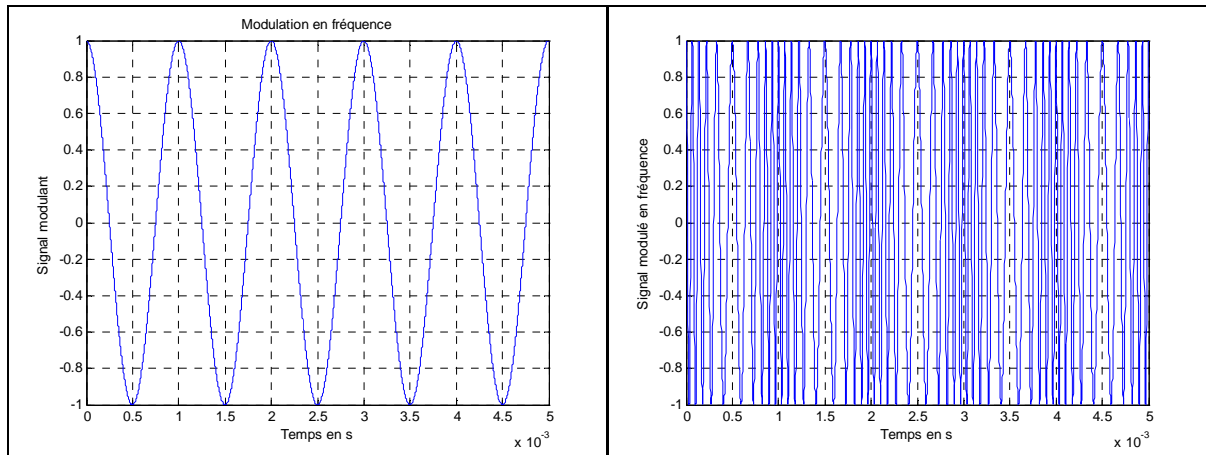


Figure 17 : allure temporelle du signal modulé en fréquence

## 4.2 Modulation de phase

On écrit que la phase  $\theta$  est proportionnelle au signal modulant.

$$\theta_i(t) = 2\pi \cdot fp \cdot t + K_\phi \cdot m(t)$$

L'expression du signal modulé est :

$$s(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot fp \cdot t + K_\phi \cdot m(t))$$

Quand  $m(t)$  est sinusoïdal  $m(t) = Vm \cdot \cos(\omega_m \cdot t)$ , la grandeur  $\Delta\phi = Vm \cdot K_\phi$  s'appelle l'excursion en phase.

## 5 Modulation de fréquence avec un signal sinusoïdal

### 5.1 Signal modulant sinusoïdal

Le signal modulant est de la forme :  $m(t) = Vm \cdot \cos(\omega_m \cdot t)$  et la fréquence instantanée est donnée par :  $fi = fp + Kf \cdot Vm \cdot \cos(\omega_m \cdot t)$ .  $Kf \cdot Vm$  est homogène à une fréquence. La fréquence instantanée varie dans l'intervalle suivant :  $fp - \Delta f \leq fi \leq fp + \Delta f$ .

$\Delta f = Kf \cdot Am$  est appelé l'excursion en fréquence.

Le signal modulé est donné par l'expression suivante :

$$s(t) = A \cdot \cos\left(2\pi \cdot fp \cdot t + \frac{\Delta f}{fm} \cdot \sin(\omega_m \cdot t)\right)$$

On appelle  $\beta = \frac{\Delta f}{fm}$  l'indice de modulation.

## 5.2 Modulation à bande étroite

Dans le cas où  $\beta$  est faible ( $\beta < 1$ ), on parle de modulation à bande étroite.

$$s(t) = A \cos(2\pi \cdot fp \cdot t + \beta \cdot \sin(\omega_m \cdot t)) \text{ avec } \beta = \frac{\Delta f}{fm}$$

$$s(t) = A \cos(\omega_p \cdot t) \cos(\beta \cdot \sin \omega_m \cdot t) - A \sin(\omega_p \cdot t) \sin(\beta \cdot \sin \omega_m \cdot t)$$

On considère  $\beta < 1$  et cela permet d'écrire :

$$\cos(\beta \cdot \sin \omega_m \cdot t) \approx 1$$

$$\sin(\beta \cdot \sin \omega_m \cdot t) \approx \beta \cdot \sin \omega_m \cdot t$$

$$s(t) = A \cos(\omega_p \cdot t) - A \cdot \beta \sin \omega_p \cdot t \sin \omega_m \cdot t$$

$$s(t) = A \cos(\omega_p \cdot t) - \frac{A \cdot \beta}{2} [\cos(\omega_p - \omega_m)t - \cos(\omega_p + \omega_m)t]$$

Le spectre est identique à celui d'une DBAP mais il y a opposition de phase entre la raie supérieure et la raie inférieure.

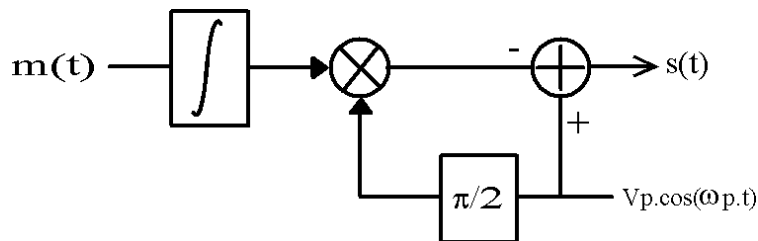


Figure 18 : modulation à bande étroite

## 5.3 Calcul du spectre du signal modulé en fréquence

$$s(t) = A \cos(2\pi \cdot fp \cdot t + \beta \cdot \sin(\omega_m \cdot t)) = A \cdot \text{Re} \left( \exp \left( j \left( \omega_p \cdot t + \beta \cdot \sin(\omega_m \cdot t) \right) \right) \right)$$

$$s(t) = \text{Re} \left( \exp \left( j \left( \omega_p \cdot t \right) \right) \right) \cdot \text{Re} \left( \exp \left( j \cdot \beta \cdot \sin(\omega_m \cdot t) \right) \right)$$

On s'intéresse d'abord au 2<sup>ème</sup> terme de l'exponentielle. Posons  $\theta = \omega_m \cdot t$  et calculons  $y = e^{j\beta \cdot \sin \theta}$

$$\text{On sait que : } \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \Rightarrow j \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} e^{j\theta} - \frac{1}{2} e^{-j\theta}$$

$$y = e^{\frac{\beta}{2} \cdot e^{j\theta}} \cdot e^{-\frac{\beta}{2} \cdot e^{-j\theta}}$$

On remplace l'exponentielle par son développement limité :  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$

Ainsi, il vient :

$$y = \left[ 1 + \frac{\beta}{2} e^{j\theta} + \frac{\beta^2}{4 \cdot 2!} e^{2j\theta} + \frac{\beta^3}{8 \cdot 3!} e^{3j\theta} \dots \right] \cdot \left[ 1 - \frac{\beta}{2} e^{-j\theta} + \frac{\beta^2}{4 \cdot 2!} e^{-2j\theta} - \frac{\beta^3}{8 \cdot 3!} e^{-3j\theta} \dots \right]$$

$$y = \left[ 1 - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{2^4 \cdot (2!)^2} \dots \right] \cdot e^0 + \left[ \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{2^3 \cdot 2!} + \frac{\beta^5}{2^5 \cdot 2! \cdot 3!} \dots \right] e^{j\theta} \dots + \left[ -\frac{\beta}{2} + \frac{\beta^3}{2^3 \cdot 2!} - \frac{\beta^5}{2^5 \cdot 2! \cdot 3!} \dots \right] e^{-j\theta} \dots$$

Le 1<sup>er</sup> terme entre crochet est  $J_0(\beta)$ , le 2<sup>ème</sup>  $J_1(\beta)$  et le 3<sup>ème</sup>  $J_{-1}(\beta)$ .

### 5.3.1 Fonctions de Bessel et propriétés

Les termes  $J_n(\beta)$  sont les fonctions de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce d'ordre  $n$  et ils sont obtenus à partir de l'expression suivante :

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n+2k}}{(n+k)!}$$

Les propriétés importantes des fonctions de Bessel sont les suivantes :

- a)  $J_{-n}(\beta) = (-1)^n \cdot J_n(\beta)$
- b) Pour des faibles valeurs de  $\beta$  nous avons :
  - o  $J_0(\beta) \cong 1$ ,
  - o  $J_1(\beta) \cong \frac{\beta}{2}$ ,
  - o  $J_n(\beta) \cong 0$  pour  $n > 2$ .
- c)  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$

### 5.3.2 Suite du calcul

D'après ce qui vient d'être dit, on peut écrire l'identité de Bessel :

$$y = \exp(j \cdot \beta \cdot \sin(\omega_m \cdot t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot \exp(j \cdot n \cdot \omega_m \cdot t)$$

Revenons à l'expression  $s(t)$ . Elle s'écrit :

$$s(t) = A \cdot \text{Re} \left( \exp(j(\omega_p t)) \right) \cdot \text{Re} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot \exp(j.n.\omega_m.t) \right)$$

$$s(t) = A \cdot \left( \begin{array}{l} J_0(\beta) \cos((\omega_p)t) \\ + J_1(\beta) \left[ \cos((\omega_p - \omega_m)t) - \cos((\omega_p + \omega_m)t) \right] \\ + J_2(\beta) \left[ \cos((\omega_p - 2\omega_m)t) + \cos((\omega_p + 2\omega_m)t) \right] \\ + J_3(\beta) \left[ \cos((\omega_p - 3\omega_m)t) - \cos((\omega_p + 3\omega_m)t) \right] \\ + \dots \end{array} \right)$$

On obtient un spectre de raies symétrique par rapport à  $f_c$  et avec un écart de  $f_m$  entre chaque raie comme on peut le voir sur la Figure 19. On a  $|J_n| = |J_{-n}|$ .

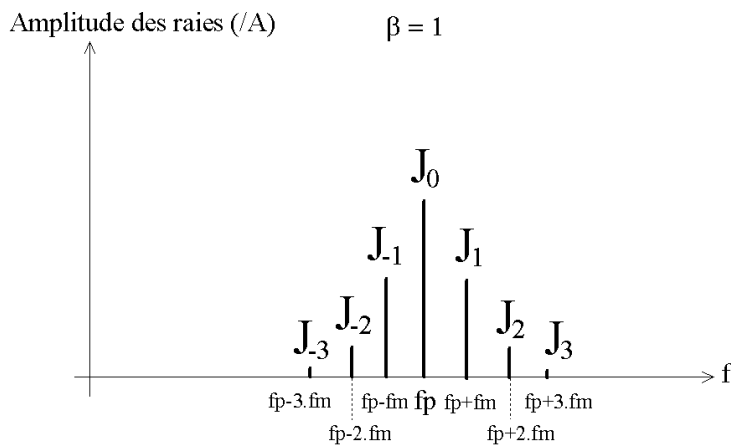


Figure 19 : spectre d'un signal modulé en fréquence avec une fréquence porteuse  $f_p$  et une fréquence modulante  $f_m$

### 5.3.3 Fonctions de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce

La Figure 20 montre l'allure des fonctions de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce en fonction de l'indice de modulation  $\beta$ . L'amplitude des raies ne décroît pas nécessairement avec l'ordre. Quand  $n > \beta$ ,  $J_n(\beta) > J_{n+1}(\beta)$  et on utilise cette propriété pour limiter l'étendue du spectre.

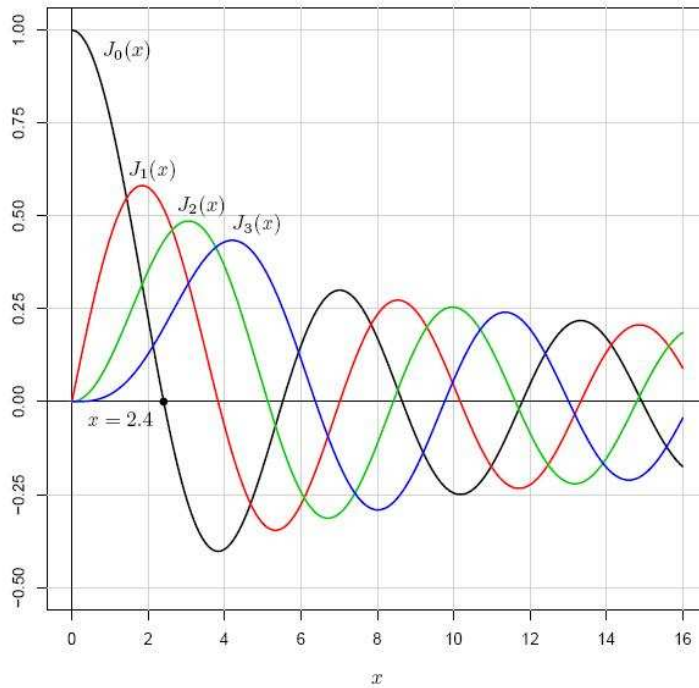


Figure 20 : fonctions de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce (x représente  $\beta$  dans notre cas) [1]

Pour certaines valeurs de  $\beta$  (2.4, 5.52, 8.65, 11.79),  $J_0(\beta) = 0$  et donc l'amplitude de la porteuse est nulle.

$\beta$	$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$	$J_2(\beta)$	$J_3(\beta)$	$J_4(\beta)$	$J_5(\beta)$	$J_6(\beta)$	$J_7(\beta)$	$J_8(\beta)$	$J_9(\beta)$	$J_{10}(\beta)$	$J_{11}(\beta)$
0	1	0										
0.2	0.99	0.099	0.005	0.0002								
0.25	0.98	0.12										
0.4	0.9604	0.196	0.0157	0.0013								
0.6	0.912	0.2867	0.0437	0.0044								
0.8	0.8463	0.3688	0.0758	0.0102	0.001							
1	0.7652	0.4401	0.1149	0.0195	0.0025							
1.2	0.6711	0.4983	0.1593	0.0329	0.005							
1.4	0.5669	0.5419	0.207	0.0505	0.009							
1.6	0.4554	0.5699	0.2570	0.0725	0.01439							
2	0.2239	0.5767	0.3528	0.1289	0.034							
2.4	0.0025	0.5202	0.4311	0.1981	0.0643							
2.8	-0.261	0.3391	0.4783	0.2728	0.1067							
3	-0.2601	0.3391	0.4861	0.3091	0.132	0.043	0.0114					
4	-0.3971	-0.066	0.3641	0.4302	0.2811	0.1321	0.0491	0.0152	0.004			
5	-0.1776	-0.3276	0.0466	0.3648	0.3912	0.2611	0.131	0.0534	0.0184	0.0055		
6	0.1506	-0.2767	-0.2429	0.1148	0.3576	0.3621	0.2458	0.1296	0.0565	0.0212	0.0069	
7	0.3001	-0.0047	-0.3014	-0.1676	0.1578	0.3479	0.3392	0.2336	0.128	0.0589	0.0235	0.0083

Tableau 1 : coefficient de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce

### 5.3.4 Puissance du signal modulé

Quelques soit l'indice de modulation, la puissance transportée  $P$  est constante. En effet, on a la propriété suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

$$P = s^2 = A^2 \cdot \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) \cdot \cos^2((\omega_c + n \cdot \omega_m) \cdot t) \right) = \frac{A^2}{2}$$

### 5.3.5 Etalement du spectre en fonction de l'indice de modulation

La Figure 21 donne l'allure du spectre du signal modulé en fonction de la fréquence en fonction de  $\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$ .

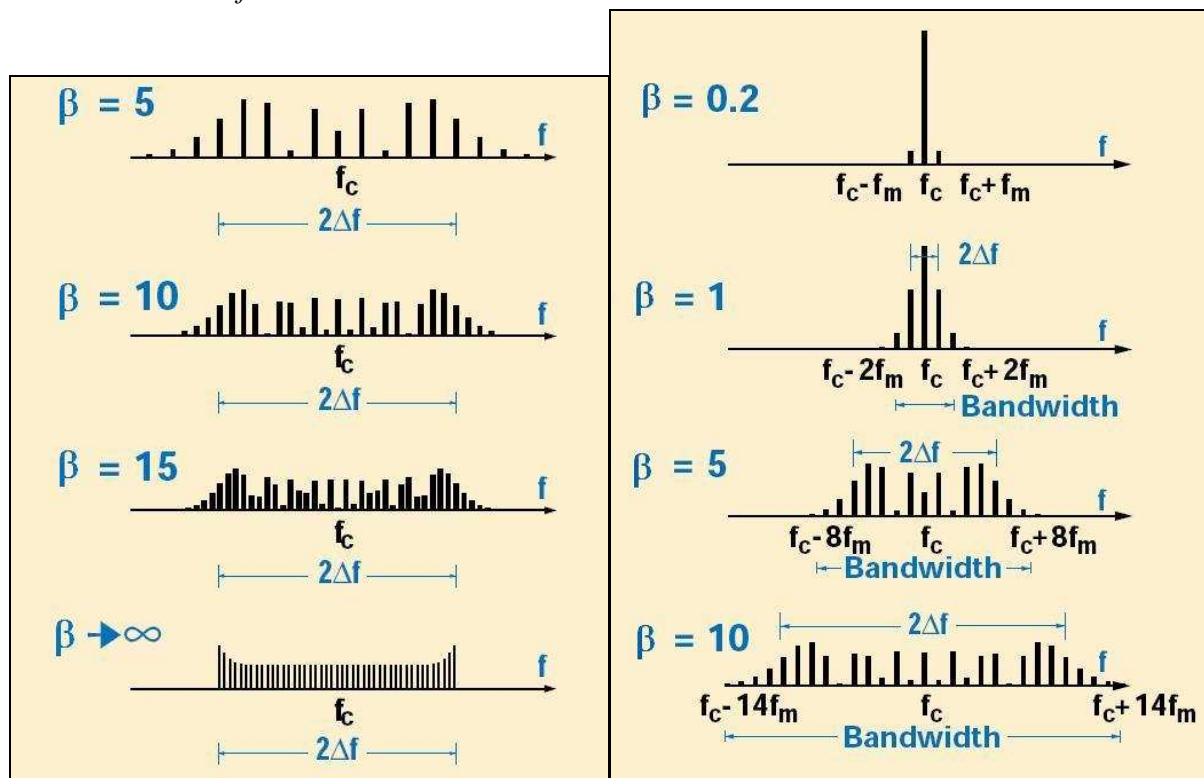


Figure 21 : largeur de bande occupée par le signal modulé en fréquence en fonction de l'indice de modulation  $\beta$  [2]

On cherche souvent à optimiser la largeur du spectre transmis pour qu'il soit adapté à la largeur d'un canal. La largeur de Bande du signal modulé en fréquence est proportionnelle à  $\beta$ . On en déduit que la largeur de Bande  $B$  nécessaire à la transmission d'un signal modulé en fréquence avec un indice  $\beta$  et une fréquence  $f_m$  est :

$$B \approx 2(\beta + 1) f_m$$

La largeur de bande B s'appelle Bande de Carson. On montre qu'elle conserve 98 % de la puissance du signal modulé.

## 5.4 Génération des signaux modulés en fréquence

Il existe principalement deux méthodes :

- La méthode directe consiste à faire varier la fréquence de la porteuse en fonction du signal modulant.
- La méthode indirecte consiste à d'abord générer un signal modulé en fréquence à bande étroite et ensuite à augmenter la déviation en fréquence par multiplication de fréquence.

### 5.4.1 Oscillateur commandé en tension

Il s'agit d'un VCO (Voltage Controlled Oscillator) réalisé par exemple à partir d'un oscillateur de type Colpitts comme sur la Figure 22. La réaction de l'émetteur sur la base du transistor est assurée par le pont diviseur capacitif C1 – C2.

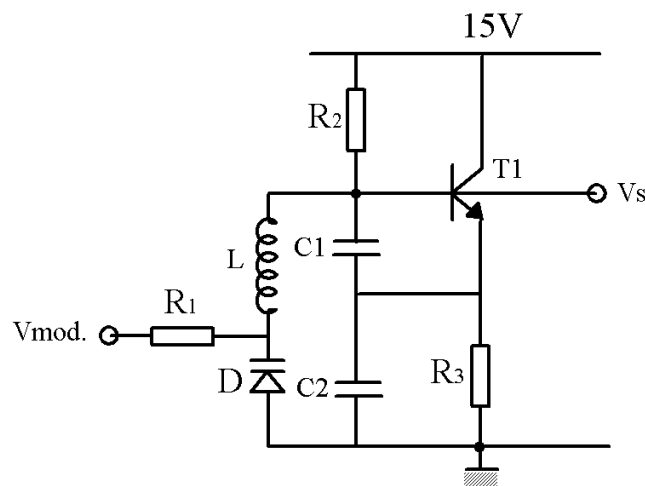


Figure 22 : exemple de VCO

La diode D est une diode varicap qui présente une capacité variable en fonction de la tension inverse appliquée. Cette capacité commande la variation de la fréquence de sortie de l'oscillateur.

Calculons de façon simple la fréquence de l'oscillateur en fonction de la capacité de la diode varicap que l'on appellera Cd.

La fréquence d'oscillation est :  $f_{osc} = \frac{1}{2\pi\sqrt{Leq.Ceq}}$  quand Leq et Ceq sont des inductances

et capacités équivalente que l'on va calculer.

On écrit que l'impédance de l'inductance en série avec Cd est :

$$j.Leq.\omega = j.L.\omega + \frac{1}{jCd.\omega} = j.\omega\left(L - \frac{1}{Cd.\omega^2}\right) \Rightarrow Leq = \left(L - \frac{1}{Cd.\omega^2}\right)$$

La capacité équivalente est :  $C_{eq} = \frac{C1.C2}{C1+C2}$

La fréquence d'oscillation est donc :

$$f_{osc} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\left(L - \frac{1}{Cd.\omega^2}\right) \cdot \frac{C1.C2}{C1+C2}}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L.C_{eq}} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{L.Cd.\omega^2}\right)}}$$

Lorsque la variation de fréquence est faible telle que  $\frac{1}{L.Cd.\omega^2} \ll 1$ , on a :

$$f_{osc} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L.C_{eq}} \left(1 - \frac{1}{2.L.Cd.\omega^2}\right)} \approx \frac{1}{2\pi \sqrt{L.C_{eq}}} \left(1 + \frac{1}{2.L.Cd.\omega^2}\right)$$

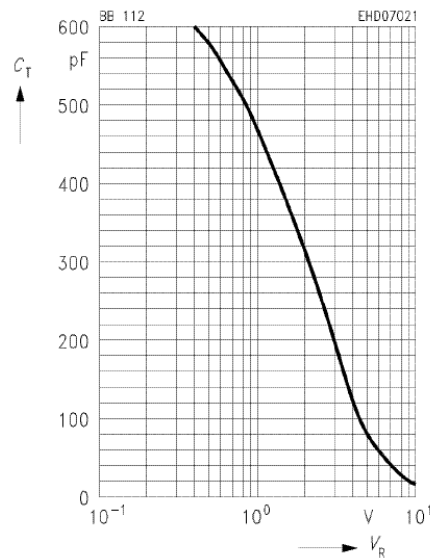


Figure 23 : variation de la capacité en fonction de la tension appliquée pour la diode varicap BB112

### 5.4.2 Méthode indirecte

Cette méthode utilise pour principe un modulateur FM à bande étroite associé à des changements de fréquence et des multiplicateurs de fréquence.

On illustre ce principe en décrivant une réalisation d'un émetteur FM utilisant la synthèse d'Amström. La fréquence du signal modulant (audio) varie de 50 Hz à 20 kHz. La fréquence de la porteuse est de 96 MHz et l'excursion en fréquence de 75 kHz.

L'indice de modulation varie de  $\beta_{50} = \frac{\Delta f}{fm} = \frac{75.10^3}{50} = 1500$  à  $\beta_{20k} = \frac{75.10^3}{20.10^3} = 3.75$ . On ne

peut pas parler de faible indice de modulation. Pour être dans ce cas, on fixe  $\Delta f$  de sortie du modulateur à faible indice à 25 Hz. L'indice de modulation est divisé par 3000.



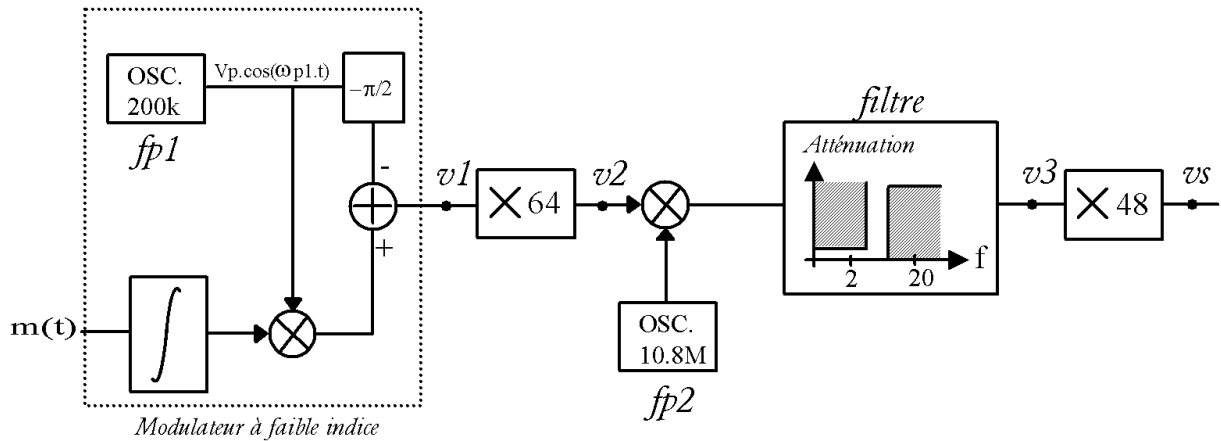


Figure 24 : émetteur par synthèse d'Amstrong

A la sortie du modulateur à faible indice, le signal est de la forme :

$$v_1(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot fp_1 \cdot t + \beta_1 \cdot \sin(\omega_m \cdot t)) \text{ avec } \beta_1 = \frac{\Delta f}{fm} = \frac{25}{50} = 0.5$$

Après multiplication de la fréquence par 64, le signal devient :

$v_2(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot 64 \cdot fp_1 \cdot t + 64 \cdot \beta_1 \cdot \sin(\omega_m \cdot t))$  ; L'excursion en fréquence et la fréquence porteuse ont été augmentées.

Après multiplication par la fréquence f2 et sélection par le filtre passe bas de la différence des fréquences (2 MHz), on obtient :

$$v_3(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot t + 64 \cdot \beta_1 \cdot \sin(\omega_m \cdot t))$$

Pour obtenir le signal modulé en fréquence autour de la bonne fréquence porteuse, on multiplie la fréquence par 48 :  $v_s(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot 96 \cdot 10^6 \cdot t + 48 \cdot 64 \cdot \beta_1 \cdot \sin(\omega_m \cdot t))$

## 5.5 Démodulation de fréquence

Trois principes sont principalement utilisés pour la démodulation.

### 5.5.1 Démodulation par discriminateur

Ce type de démodulateur est peu utilisé aujourd'hui. Le but du discriminateur est de dériver le signal modulé en fréquence. L'amplitude est alors proportionnelle au signal modulant. Un détecteur d'enveloppe permet d'extraire uniquement l'amplitude du signal modulant.

Le signal modulé est de la forme :  $s(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot fc \cdot t + 2\pi \cdot Kf \cdot \int m(t) \cdot dt)$

Après le dérivateur, on obtient :

$$\frac{ds(t)}{dt} = A \cdot (2\pi \cdot fc + 2\pi \cdot Kf \cdot m(t)) \cdot \sin(2\pi \cdot fc \cdot t + 2\pi \cdot Kf \cdot \int m(t) \cdot dt)$$

Après avoir enlevé l'enveloppe, le signal est :  $\frac{ds(t)}{dt} = A \cdot (2\pi \cdot fc + 2\pi \cdot Kf \cdot m(t))$

Pour dériver le signal, on utilise un circuit de type filtre qui fait varier l'amplitude en fonction de la fréquence.

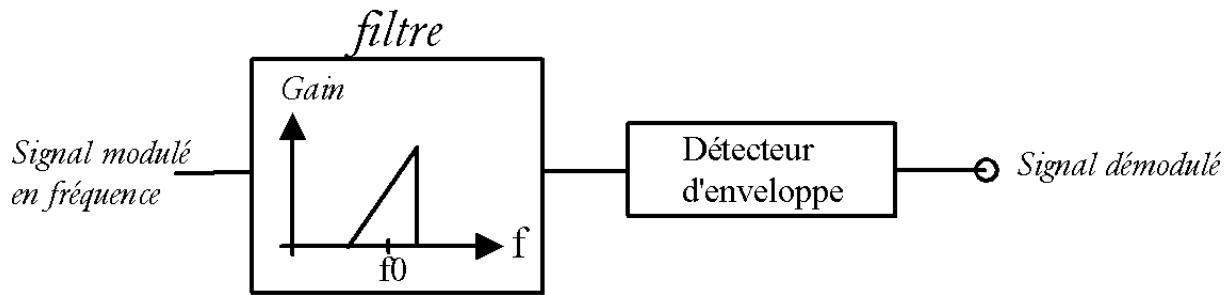


Figure 25 : principe du discriminateur en fréquence

Le filtre utilisé doit présenter une réponse linéaire en fonction de la fréquence sur toute la plage de la modulation en fréquence. C'est réalisé de la meilleure façon en utilisant deux filtres passe bande décalé en fréquence, pour que les erreurs de linéarité de l'un compensent les erreurs de linéarité de l'autre. En considérant que  $G_1(f)$  et  $G_2(f)$  s'expriment de la façon suivante :

$$G_1(f) = \alpha + \beta(f - f_0) + \gamma(f - f_0)^2$$

$$G_2(f) = \alpha - \beta(f - f_0) + \gamma(f - f_0)^2$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des termes linéaires.  $\gamma$  caractérise la non linéarité. Les fréquences des filtres passe bandes ont été ajustées de telle façon que les termes  $\alpha$   $\beta$  et  $\gamma$  soient égales ou opposés.

On arrive à :  $G_1(f) - G_2(f) = -2.\beta(f - f_0)$

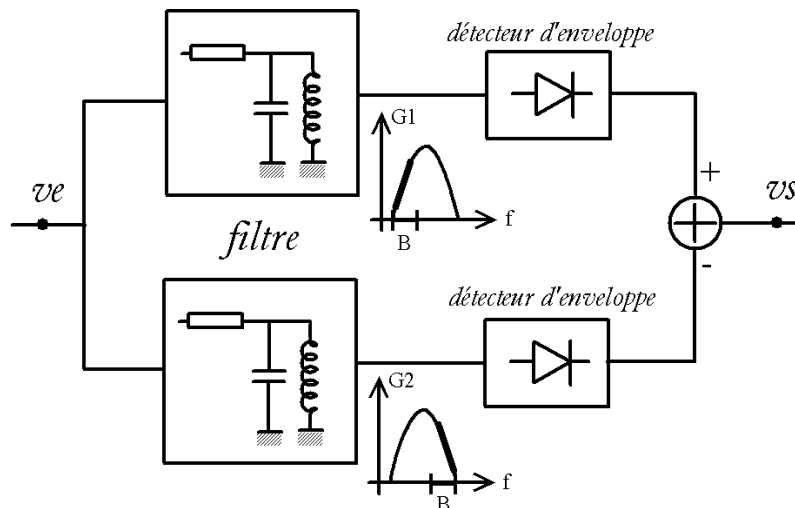


Figure 26 : principe d'un discriminateur à filtre passe bande

## 5.5.2 Démodulation à quadrature

### 5.5.2.1 Principe

Le principe est décrit sur la Figure 27.

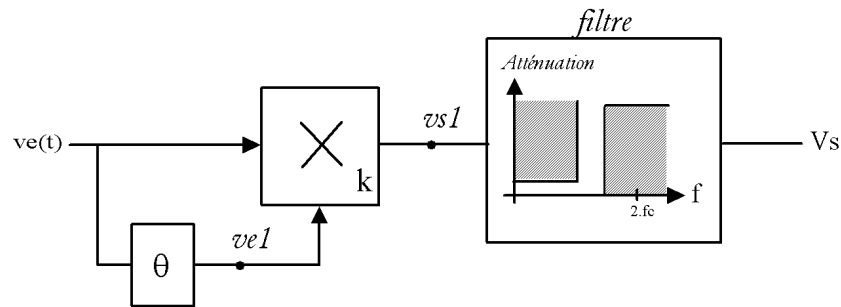


Figure 27 : démodulation en quadrature

La tension d'entrée est :  $ve(t) = A_p \cdot \cos(\omega_p \cdot t + \varphi(t))$  avec  $\varphi(t)$  incluant la modulation de fréquence.

Après un déphasage  $\theta$ , elle devient :  $ve1(t) = A_p \cdot \cos(\omega_p \cdot t + \varphi(t) + \theta(t))$

Après le multiplicateur, la tension est :  $vs1 = ve \cdot ve1 = k \frac{A_p^2}{2} \cdot [\cos(\theta) + \cos(2 \cdot \omega_p t + 2 \cdot \varphi + \theta)]$

Et donc après le passe-bas :  $vs = k \frac{A_p^2}{2} \cdot \cos(\theta)$

Le déphaseur  $\theta$  introduit un déphasage dépendant linéairement de la fréquence.

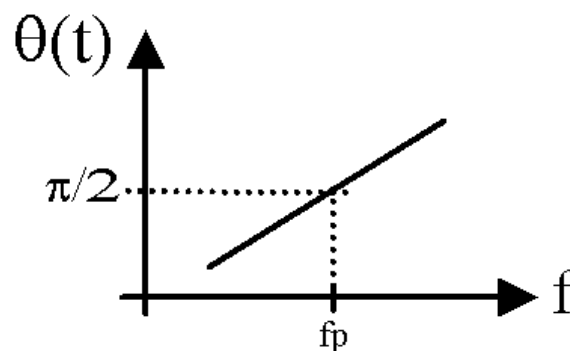


Figure 28 : courbe de déphasage en fonction de la fréquence [3]

D'après la Figure 28, on a  $\theta = \frac{\pi}{2} + a \cdot (f - fp)$

$$vs = k \frac{A_p^2}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + a \cdot (f - fp)\right) = -k \frac{A_p^2}{2} \cdot \sin(a \cdot (f - fp))$$

Quand l'écart entre  $f$  et  $f_p$  est faible, l'expression devient :

$$v_s = -k \frac{A_p^2}{2} . a . (f - f_c)$$

Puisque la modulation de fréquence est une translation de la fréquence proportionnelle au signal modulant, le signal de sortie du montage de la Figure 27 est proportionnel au signal modulant. Ainsi :

$$v_s = -k \frac{A_p^2}{2} . a . K_f . m(t)$$

### 5.5.2.2 Réalisation du détecteur à quadrature

On va étudier le montage de la Figure 29 et on cherche à montrer que le déphasage est proportionnel à la fréquence.

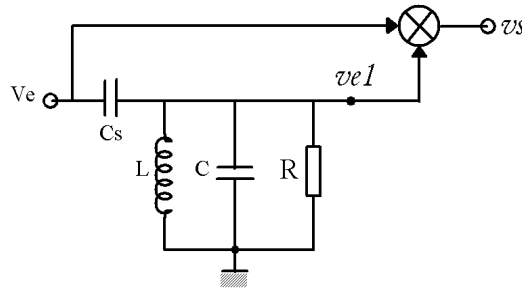


Figure 29 : réalisation du discriminateur à quadrature

On calcule l'impédance  $Z$  équivalent à  $L$ ,  $C$  et  $R$  en parallèle. On obtient :

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + j.C.\omega + \frac{1}{j.L.\omega}} = \frac{j.R.L.\omega}{R + j.L.\omega + (j\omega)^2 R.L.C} = \frac{j.L.\omega}{1 + j.\frac{L}{R}.\omega + (j\omega)^2 L.C}$$

$$v_{e1} = v_e . \frac{Z}{Z + \frac{1}{j.C_s.\omega}} = v_e . \frac{\frac{j.L.\omega}{1 + j.\frac{L}{R}.\omega + (j\omega)^2 L.C}}{\frac{j.L.\omega}{1 + j.\frac{L}{R}.\omega + (j\omega)^2 L.C} + \frac{1}{j.C_s.\omega}}$$

$$v_{e1} = v_e . \frac{(j\omega)^2 L.C_s}{1 + j.\frac{L}{R}.\omega + (j\omega)^2 L.(C_s + C)}$$

$$|v_e| = v_e \cdot \frac{Cs}{(Cs+C)} \frac{(j\omega)^2 L(Cs+C)}{1 + j \frac{L}{R} \omega + (j\omega)^2 L(Cs+C)}$$

On identifie le quotient avec l'expression canonique d'un filtre passe-bande :

$$\frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2m \cdot j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{On obtient : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C+Cs)}} \text{ et } \frac{2m}{\omega_0} = \frac{L}{R} \Rightarrow 2m = \frac{L}{R} \omega_0$$

Le coefficient de qualité Q est :

$$Q = \frac{1}{2m} = \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{\omega_0} \Rightarrow \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 \cdot Q}$$

$$|v_e| = v_e \frac{Cs}{C+Cs} \frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j \frac{\omega}{Q \omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On détermine le déphasage  $\varphi$ .

$$\varphi = \pi - \arctan \left( \frac{\frac{\omega}{Q \omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right). \text{ On pose } \omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

$$\varphi = \pi - \arctan \left( \frac{\frac{\omega_0 + \Delta\omega}{Q \omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega_0}\right)^2} \right) \approx \pi - \arctan \left( -\frac{\omega_0 + \Delta\omega}{Q \omega_0} \frac{\omega_0^2}{2\omega_0 \Delta\omega + \Delta\omega^2} \right)$$

$$\varphi = \pi - \arctan \left( -\frac{\omega_0 + \Delta\omega}{Q \Delta\omega} \frac{\omega_0}{2\omega_0 + \Delta\omega} \right)$$

En négligeant  $\Delta\omega$  par rapport à  $\omega_0$ .

$$\varphi = \pi + \arctan \left( \frac{(\omega_0 + \Delta\omega) \omega_0}{2Q \omega_0 \Delta\omega} \right) = \pi + \arctan \left( \frac{\omega_0}{2Q \Delta\omega} \right)$$

$$\text{or } \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2Q\Delta\omega}{\omega_0}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2Q\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$

Si la variation en phase est faible, on obtient :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \left(\frac{2Q\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$

En définitive, la sortie du démodulateur est :

$$v_s = -kA_p^2 \frac{Q \cdot \Delta\omega}{\omega_0}$$

### 5.5.2.3 Démodulation par boucle à verrouillage de phase

Le signal à démoduler est appliqué sur l'entrée de la boucle à verrouillage de phase ou PLL (Phase Loop Locked).

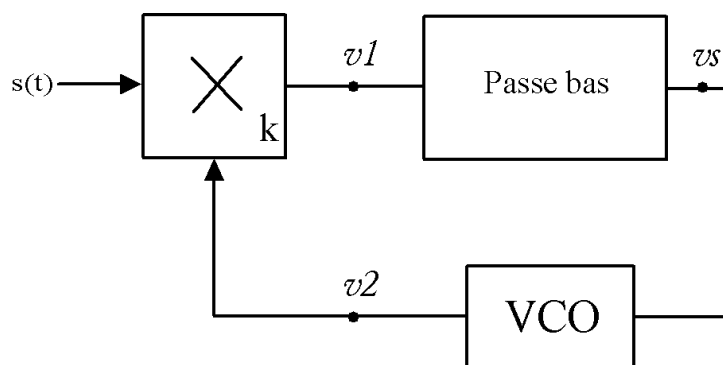


Figure 30 : boucle à verrouillage de phase

Le comparateur de phase, constitué d'un multiplicateur et d'un filtre passe bas, délivre une tension proportionnelle à l'écart de phase.

$$v1(t) = k \cdot (\varphi_s - \varphi_2)$$

Le signal  $s(t)$  est un signal modulé en fréquence :

$$s(t) = A_p \cdot \cos(\omega_p \cdot t + \varphi_s(t))$$

$$f_i = f_p + K_f \cdot m(t) \Rightarrow \omega_i = 2\pi f_p + 2\pi K_f \cdot m(t)$$

$$\varphi_s = 2\pi f_p \cdot t + 2\pi K_f \cdot \int m(t) dt . \text{ On a donc } \frac{d\varphi_s}{dt} = a \cdot m(t) \text{ ou } a \text{ est une constante positive.}$$

L'oscillateur commandé en tension délivre une tension  $v2(t) = A'_p \cdot \cos(\omega_p \cdot t + \varphi_2(t))$ .

Les fréquences de  $v1(t)$  et  $v2(t)$  sont identiques car la boucle est verrouillée.

De la même façon que précédemment, on écrit que :  $\frac{d\varphi_2}{dt} = b \cdot v_s(t)$

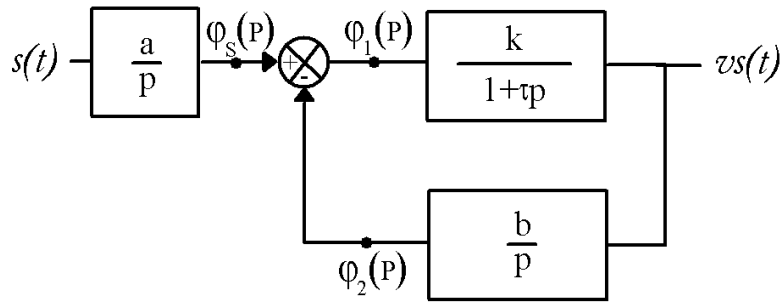


Figure 31 : schéma équivalent de la PLL

$$V_s(p) = k \cdot \frac{1}{1 + \tau p} \left[ S(p) \frac{a}{p} - \frac{b}{p} V_s(p) \right]$$

$$V_s(p) \left[ 1 + \frac{b}{p} k \cdot \frac{1}{1 + \tau p} \right] = k \frac{1}{1 + \tau p} S(p) \frac{a}{p}$$

$$\frac{V_s(p)}{S(p)} = \frac{k \frac{1}{1 + \tau p} \frac{a}{p}}{1 + \frac{b}{p} k \cdot \frac{1}{1 + \tau p}}$$

Pour avoir  $V_s(p) = \frac{a}{b} S(p)$ , on doit avoir  $1 \ll \frac{b}{p} k \cdot \frac{1}{1 + \tau p}$ .

La démodulation du signal modulé en fréquence se fait dans ces conditions.

## Bibliographie

[1] Support de cours ‘‘Modulations angulaires’’ de Marie Frénéa, ENS Cachan

[2] « Spectrum Analysis : Amplitude and frequency Modulation », Application Note 150-1. Hewlett Packard ou Agilent.

<http://contact.tm.agilent.com/data/static/downloads/eng/Notes/interactive/an-150-1/hp-am-fm.pdf>

[3] Polycopié ESIEE ‘‘MODULATION-DEMODULATION ANALOGIQUE’’ C. Berland 2005

[4] Electronique. Système bouclés linéaires, de communication et de filtrage. F. Manneville et J. Esquieu.