

# ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE DE L'INFLUENCE D'UN DÉCALAGE TEMPOREL ENTRE L'ENVELOPPE ET LA PHASE D'UN SIGNAL OFDM DANS UN SYSTÈME DE LINÉARISATION EER

G. BAUDOIN, A. DIET, C. BERLAND, M. VILLEGAS  
ESIEE, équipe ESYCOM, BP 99, 93162, Noisy Le Grand Cedex – France

## I. Introduction

Cet article étudie de façon théorique et expérimentale l'influence d'un décalage temporel  $\theta$  entre l'enveloppe et la phase d'un signal OFDM dans un système de linéarisation EER (Envelope Elimination and Restoration).

On donne l'expression théorique de la densité spectrale de puissance (dsp) du signal distordu en sortie de l'émetteur, dans le cas d'un filtre de mise en forme qui n'introduit pas d'interférence entre symboles. Dans le cas général, on donne l'expression de la puissance moyenne totale de distorsion en fonction de  $\theta$  d'où l'on déduit la forme de l'EVM (Error Vector Magnitude) et l'on propose une approximation du signal distordu qui permet d'expliquer le phénomène de rotation des constellations observé en réception sur les différentes porteuses du signal OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex).

## II. Généralités sur la méthode EER et position du problème

Les amplificateurs de puissance sont généralement non-linéaires, surtout lorsqu'ils sont utilisés près de la saturation pour optimiser le rendement. Plus la dynamique des amplitudes des signaux en entrée de l'amplificateur est grande plus les effets des non-linéarités sont importants. Pour des signaux à enveloppe constante comme les signaux GSM, la non-linéarité de l'amplificateur a peu d'importance. Mais, dans un souci d'efficacité spectrale, les nouveaux réseaux de communications mobiles ou les nouveaux réseaux locaux radio utilisent des modulations ou des techniques d'étalement de spectre conduisant à des signaux à forte dynamique d'amplitude. On peut citer en particulier la modulation OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex) utilisée dans les réseaux locaux sans fil comme hipérlan2.

La technique EER (Envelope Elimination-Restoration) a été introduite par Kahn [1]. Cette approche est une des solutions possibles pour l'amplification linéaire des signaux à enveloppe non-constante. De nouvelles architectures d'émetteurs utilisant les principes EER sont à l'étude actuellement [2, 3].

Le principe de la méthode EER consiste à décomposer le signal à amplifier  $x(t)$  en un produit de 2 signaux : un signal  $p(t)$  à enveloppe constante portant l'information de phase et un signal d'amplitude  $a(t)$  portant l'information d'enveloppe. On note  $f_c$  la porteuse et  $z(t)$  l'enveloppe complexe du signal modulé  $x(t)$ . On peut écrire :

$$z(t) = I(t) + jQ(t) = |z(t)| \exp(j\phi(t)), \text{ avec } |z(t)| = \sqrt{I^2(t) + Q^2(t)}. \quad (1)$$

$$x(t) = \Re(z(t) \exp(j2\pi f_c t)) = \Re(|z(t)| \exp(j(2\pi f_c t + \phi(t)))) = |z(t)| \cos(2\pi f_c t + \phi(t)).$$

Dans (1),  $\Re$  représente la partie réelle. On déduit de (1) :

$$x(t) = a(t)p(t) \text{ avec : } \begin{cases} a(t) = |z(t)| = \sqrt{I^2(t) + Q^2(t)}, \\ p(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi(t)). \end{cases}$$

Le terme de phase  $p(t)$ , à enveloppe constante, est à la fréquence RF. Il est amplifié de manière efficace directement par l'amplificateur de puissance. Le terme d'enveloppe  $a(t)$  est un signal basse-fréquence qui est restauré par l'intermédiaire de la tension d'alimentation du dernier étage de l'amplificateur.

Comme les 2 signaux de phase et d'enveloppe ne sont réunis que dans le dernier étage de l'émetteur et sont traités de façons différentes, leurs temps de transit dans l'émetteur peuvent être différents. L'objet de cet article est l'étude de l'influence de ce décalage temporel sur les performances de la liaison. On s'intéresse au cas de la modulation OFDM pour laquelle la dynamique de l'enveloppe du signal modulé est particulièrement importante.

## III. Analyse théorique

Dans un modulateur OFDM, chaque bloc de  $N$  symboles est transformé par une FFT inverse (IFFT). Les échantillons  $A_k$  en sortie de la IFFT, émis en série, constituent le signal OFDM échantillonné à la période symbole  $T_S$ . Cette sortie est suréchantillonnée à la période d'échantillonnage  $T_e$  et filtrée par un passe-bas de réponse impulsionnelle  $s(t)$  avant conversion numérique-analogique générant un signal complexe bande de base  $z(t)$ . Le suréchantillonnage peut aussi être réalisé par une technique de « zero padding » c'est à dire en ajoutant des zéros au vecteur de symboles avant la FFT inverse. Ce cas est équivalent au précédent avec un filtre  $s(t)$  dont la fonction de transfert est rectangulaire en fréquence (passe-bas idéal).

Soit  $\rho(t)$  et  $\Phi(t)$  l'amplitude et la phase du signal complexe  $z(t) = \rho(t) \exp(j\Phi(t))$ . Pour un signal OFDM, on peut écrire :

$$z(t) = \sum_k A_k s(t - kT_S) = \sum_k |A_k| e^{j\Phi_k} s(t - kT_S). \quad (2)$$

Quand l'enveloppe et la phase sont décalées en temps de la valeur  $\theta$ , le signal distordu est noté  $z_\theta(t)$  et s'écrit :

$$z_\theta(t) = \rho(t - \theta) e^{j\Phi(t)}. \quad (3)$$

### III-1. Cas sans interférences entre symboles à l'émetteur

On étudie d'abord le cas où le filtre de mise en forme  $s(t)$  n'introduit pas d'interférences entre symboles (durée de la réponse impulsionnelle inférieure ou égale à  $T_S$ ). Nous avons pu faire dans ce cas une analyse théorique complète de l'influence du décalage enveloppe/phase.

On donne ici les résultats en terme de densité spectrale de puissance du signal émis  $z_\theta(t)$ . L'analyse et le résultat obtenu pour la densité spectrale de puissance sont valides pour des signaux QAM qui peuvent aussi s'écrire sous la forme (2).

Le principe de la démonstration consiste, quand  $\theta < T_S$ , à décomposer  $z_\theta(t)$  en 2 parties  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  correspondant à la multiplication de  $z_\theta(t)$  par 2 signaux périodiques de fenêtrage  $w_1(t)$  et  $w_2(t)$ . Les signaux  $w_1(t)$  et  $w_2(t)$  sont constitués d'impulsions rectangulaires de durées respectives  $T_S - \theta$  et  $\theta$  répétées à la période  $T_S$ . Les signaux  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  s'écrivent :

$$\begin{cases} z_1(t) = w_1(t)z_\theta(t), \\ z_2(t) = w_2(t)z_\theta(t). \end{cases} \text{ avec : } \begin{cases} w_1(t) + w_2(t) = 1, \\ z_1(t) + z_2(t) = z_\theta(t). \end{cases}$$

Les signaux  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  sont des signaux PAM (Pulse Amplitude Modulation) dont on sait calculer la densité spectrale de puissance. Pour  $z_1(t)$ , l'impulsion de mise en forme  $s_1(t)$  est le produit de  $s(t - \theta)$  avec une impulsion rectangulaire de durée  $T_S - \theta$  notée  $R_{T_S - \theta}(t - \theta)$ . Pour  $z_2(t)$ , l'impulsion de mise en forme  $s_2(t)$  est le produit de  $s(+T_S - \theta)$  avec une impulsion rectangulaire de durée  $\theta$  notée  $R_\theta(t)$ .

$$\begin{cases} s_1(t) = s(t - \theta)R_{T_S - \theta}(t - \theta), \\ s_2(t) = s(t)R_\theta(t). \end{cases}$$

La figure (1) représente les signaux  $w_1(t)$  et  $w_2(t)$  et les impulsions  $R_{T_S - \theta}(t - \theta)$  et  $R_\theta(t)$ .

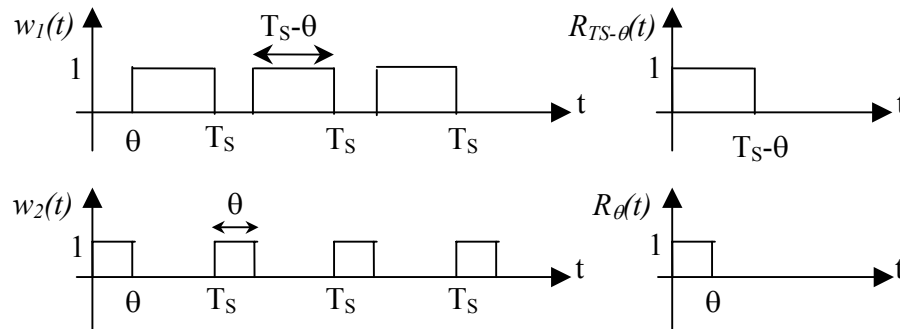


Figure 1 : Signaux de fenêtrage  $w_1(t)$  et  $w_2(t)$  et impulsions rectangulaires  $R_{T_S - \theta}(t - \theta)$  et  $R_\theta(t)$ .

Les signaux  $z_\theta$ ,  $z_1$  et  $z_2$  s'écrivent :

$$\begin{cases} z_\theta(t) = z_1(t) + z_2(t), \\ z_1(t) = \sum_k A_k s_1(t - kT_S), \\ z_2(t) = \sum_k |A_{k-1}| e^{j\Phi_k} s_2(t - kT_S). \end{cases} \quad (4)$$

Quand  $\theta > T_S$ , la même type de décomposition s'applique mais  $\theta$  doit être remplacé par  $\theta_m$  égal à  $\theta$  modulo  $T_S$ .

La densité spectrale de puissance  $S_{z_\theta}(f)$  de  $z_\theta(t)$  peut se calculer à partir de la décomposition (4). Elle s'écrit :

$$S_{z_\theta}(f) = S_{z_1}(f) + S_{z_2}(f) + S_{z_{12}}(f),$$

où  $S_{z_1}(f)$  et  $S_{z_2}(f)$  sont les dsp de  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  et  $S_{z_{12}}(f)$  est la transformée de Fourier de l'intercorrélacion de  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$ . Avec l'hypothèse que les échantillons  $A_k$  en sortie de la IFFT sont non corrélés, de moyenne nulle et de variance  $\sigma_A^2$ , on a :

$$S_{z_1}(f) = \frac{\sigma_A^2}{T_S} |S_1(f)|^2, \quad S_{z_2}(f) = \frac{\sigma_A^2}{T_S} |S_2(f)|^2, \quad S_{z_{12}}(f) = \frac{2E(|A_k|)^2}{T_S} \Re(S_1(f)S_2^*(f)), \quad (5)$$

expression où  $S_1(f)$  et  $S_2(f)$  sont les transformées de Fourier de  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ .

La figure 2 donne la densité spectrale théorique donnée par la relation (5) et l'estimation de cette dsp obtenue par simulation, dans le cas d'un rapport  $\theta/T_S$  de 10% et d'un filtre  $s(t)$  en forme de fenêtre de Hamming de durée  $T_S$ .

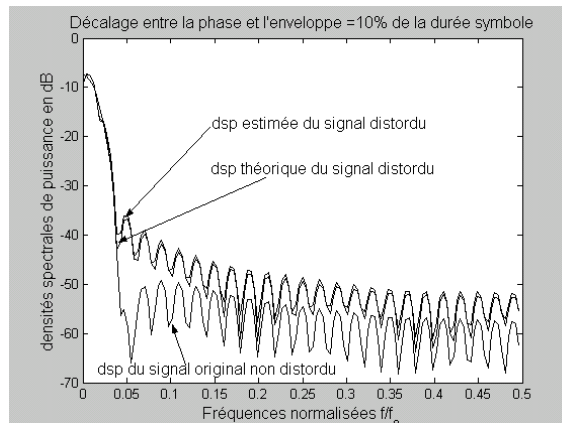


Figure 2 : densités spectrales de puissance

### III-1. Cas général

On considère le cas où le filtre d'émission  $s(t)$  est quelconque, c'est-à-dire où la durée de la réponse impulsionnelle  $s(t)$  du filtre de mise en forme peut-être supérieure à  $T_S$ .

a) Calcul de la puissance moyenne de la distorsion introduite par le décalage enveloppe/phase

La distorsion  $e(t)$  introduite par le décalage  $\theta$  est définie par  $e(t) = z(t) - z_\theta(t)$ . sa puissance moyenne  $B(\theta)$  vaut :

$$B(\theta) = E(|e(t)|^2) = 2(R_\rho(0) - R_\rho(\theta)) \text{ où } R_\rho(t) \text{ est l'autocorrélation du module } \rho(t) \text{ de } z(t). \quad (6)$$

Le rapport signal à bruit (SNR) s'exprime en fonction de  $\theta$  par la relation :

$$SNR = \frac{E(|z(t)|^2)}{E(|e(t)|^2)} = \frac{R_\rho(0)}{2(R_\rho(0) - R_\rho(\theta))}. \quad (7)$$

Pour les modulations OFDM, lorsque le nombre de porteuses est assez grand, on peut considérer que le signal modulé est à peu près gaussien (théorème de la limite centrale). Lorsque  $\theta$  est assez grand pour que  $\rho(t)$  et  $\rho(t-\theta)$  soient non corrélés, la puissance moyenne de la distorsion tend vers  $B = \sigma^2(4-\pi)$  et le rapport signal à bruit (SNR) tend vers :

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} SNR = \frac{E(|z(t)|^2)}{E(|e(t)|^2)} = \frac{2}{(4-\pi)}. \quad (8)$$

La figure (3) montre l'évolution de l'inverse du rapport signal à bruit en fonction de  $\theta$  :  $1/SNR(\theta)$  donnée par (7) et l'EVM (Error Vector Magnitude) en réception estimée par simulation pour un canal idéal et une constellation 16 QAM. L'EVM est la valeur moyenne de l'erreur entre l'échantillon obtenu après démodulation au récepteur et le point de constellation le plus proche. On peut observer sur cette figure que la courbe de l'EVM a la même forme que celle de  $1/SNR$ . On remarque de plus que  $1/SNR$  tend rapidement vers la limite  $(4-\pi)/2=0,43$ , cette valeur est pratiquement atteinte pour un décalage égal à la moitié d'un temps symbole.

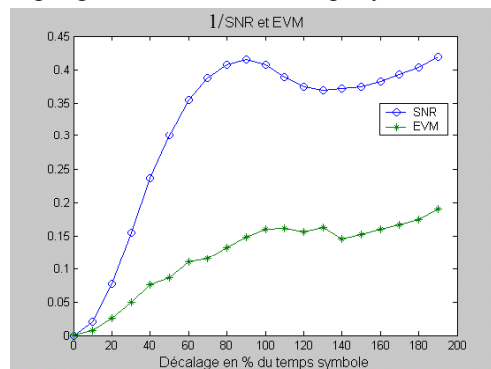


Figure 3 : SNR théorique et EVM expérimentale

b) Approximation du signal distordu et synchronisation

Quand le décalage  $\theta$  est assez petit, on peut approcher  $z_\theta(t)$  par  $z(t)$  retardé de  $\tau$ , c'est à dire par  $z(t-\tau)$  en utilisant un développement limité d'ordre un autour de l'instant  $t-\tau$ .

On appelle erreur d'approximation la différence  $\varepsilon(t) = z_\theta(t) - z(t-\tau)$ .

Cette erreur a une puissance moyenne minimum pour le choix optimal du retard :

$$\tau = E \left( \frac{\rho'^2(t)}{|z'(t)|^2} \right). \text{ Expression où } \rho' \text{ et } z' \text{ représente les dérivées de } \rho \text{ et } z.$$

Et pour ce choix optimum de  $\tau$ , la puissance moyenne de l'erreur d'approximation vaut :

$$E(|\varepsilon(t)|^2) = \theta^2 \frac{E(\rho'^2(t))E(\rho^2(t)\phi'^2(t))}{E(\rho'^2(t) + \rho^2(t)\phi'^2(t))}.$$

Ce retard optimal  $\tau$ , dont la valeur dépend du filtre de mise en forme  $s(t)$ , se traduit en réception, si on ne modifie pas la synchronisation, par une rotation de la constellation sur la porteuse  $f_k$  d'un angle  $\exp(j2\pi f_k \tau)$ . La figure 4 illustre ce résultat pour les constellations obtenues sur 2 porteuses différentes ( pour une OFDM avec 64 sous-porteuses).

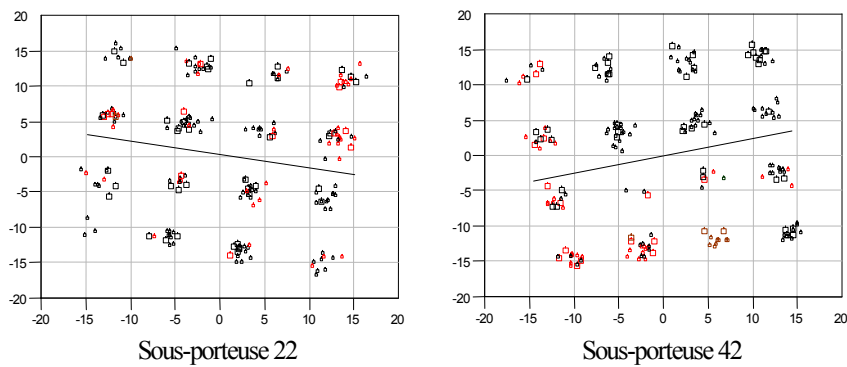


Figure 4 : Rotation des constellations sur 2 porteuses différentes pour un décalage de 20% d'un temps symbole.

#### IV. Conclusion

Nous avons étudié la distorsion générée sur un signal OFDM lorsqu'un décalage est introduit entre son enveloppe et sa phase, ce qui est généralement le cas dans les systèmes EER. Nous avons calculé la puissance totale de la distorsion créée, puissance qui permet de prédire la valeur de l'EVM en réception. Nous avons expliqué l'origine de la rotation de la constellation observée en réception sur chacune des porteuses. Enfin dans le cas sans interférence entre symboles, nous avons pu calculer l'expression analytique de la densité spectrale de puissance du signal distordu. Cette analyse permet d'évaluer la valeur maximale tolérable du décalage par rapport aux contraintes en terme d'ACPR ou d'EVM spécifiées dans une norme.

#### Références

- [1] L.R. KAHN, "Single-side transmission by envelope elimination and restoration", *IRE proceeding*, pp. 803-806, Jul. 1952.
- [2] C. BERLAND, G. BAUDOIN, M. VILLEGAS, "A new dual mode DSM/EDGE transceiver using modulation loop", *30th European Microwave Conference, EuMC*, pp 175-178, Oct. 2000.
- [3] K.-C. Peng, J.-K. Jau, T.-S. Sheng Horng, "A novel EER Transmitter using Two-Point Delta Sigma Modulation Scheme for WLAN and 3G Applications", *Proc. Conf. IEEE MTT-S*, pp1651-1654, 2002.