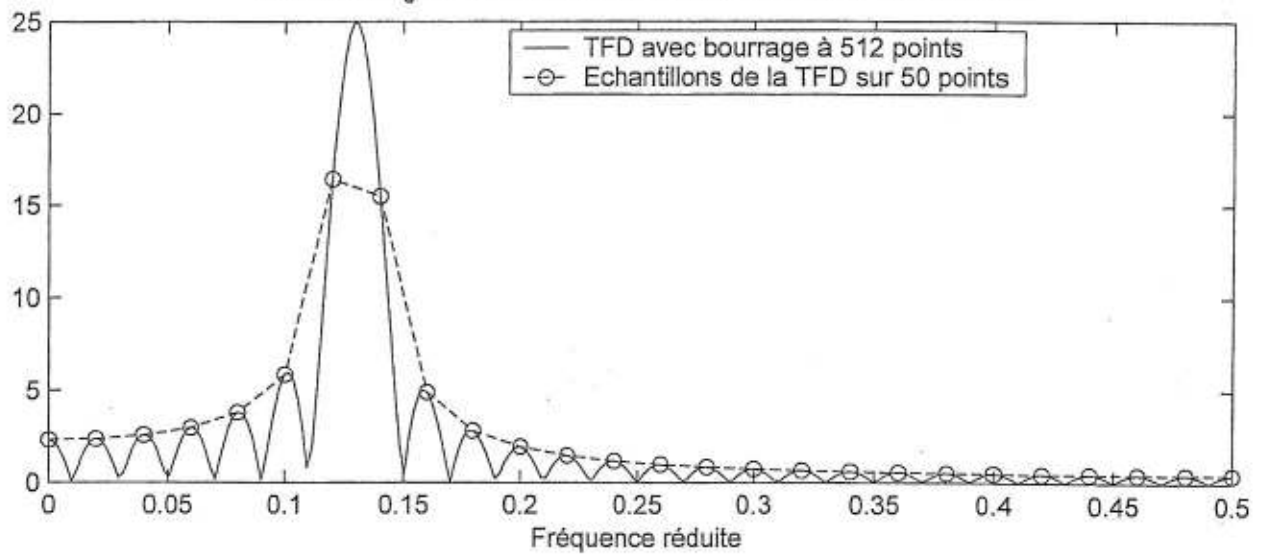


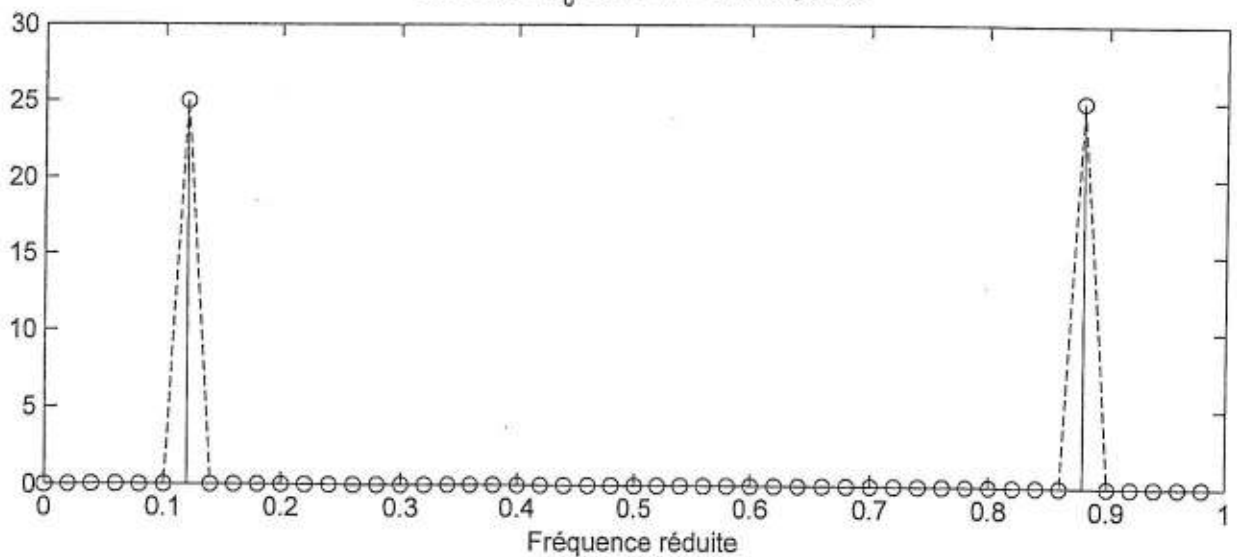
ANALYSE DE FOURIÉR
Le retour

- I - Introduction
- II - Zoologie des TF et principales propriétés
- III - La TFD comme opération matricielle
 - x matrice de FOURIER
 - x matrice de convolution - diagonalisation
- IV - Bourrage de zéros
 - x bourrage de zéros
 - x interpolation de la TFD
 - x Coïncidence TF - TFD
- V - La résolution de Fourier
- VI - Choix d'une fenêtre de pondération
- VII - Principe d'incertitude temps - fréquence
- VIII - Transformée de Fourier à court terme.

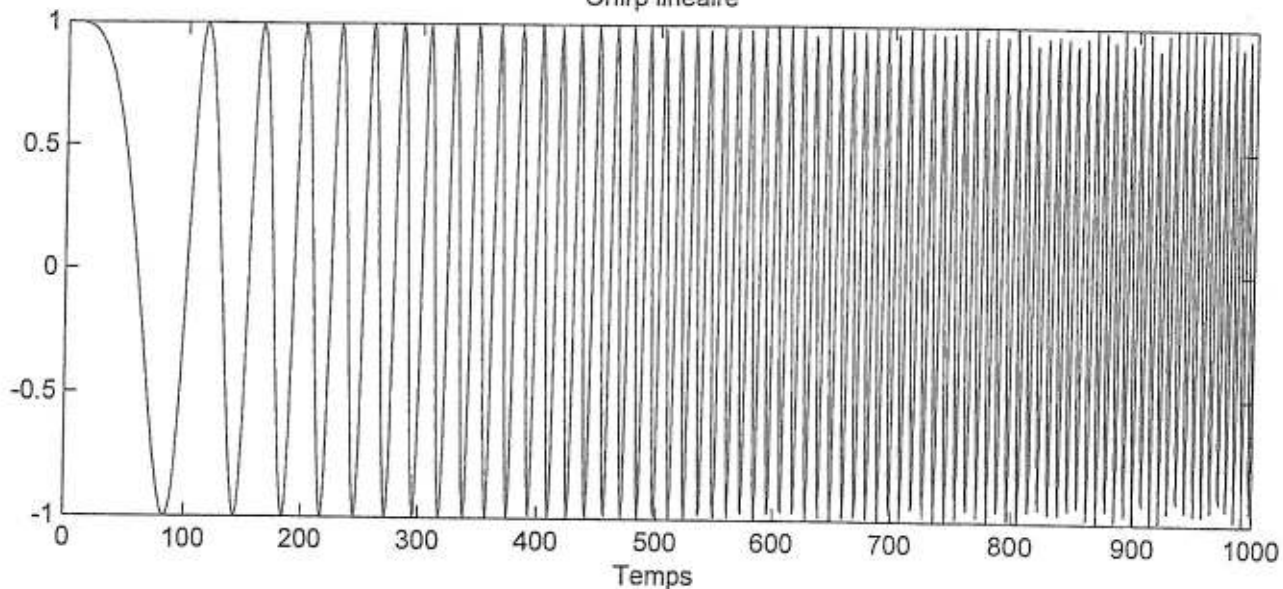
Sinusoïde à $f_0=0.13=6.5/50$ sur 50 points, bourrage de zéros à 512



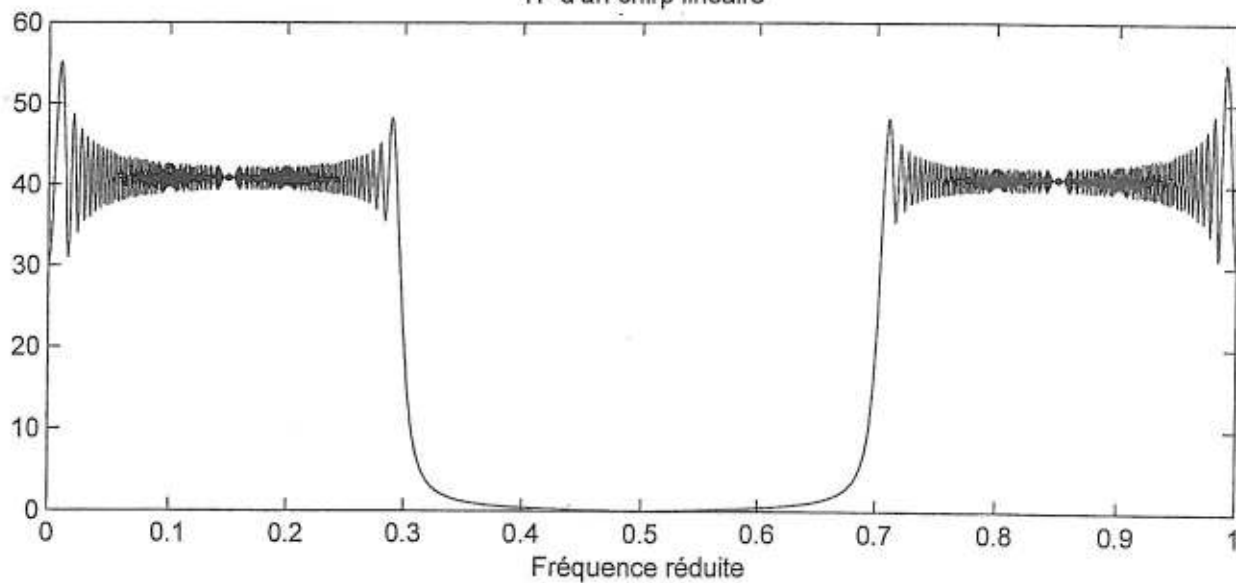
Sinusoïde à $f_0=0.12=6/50$ sur 50 points



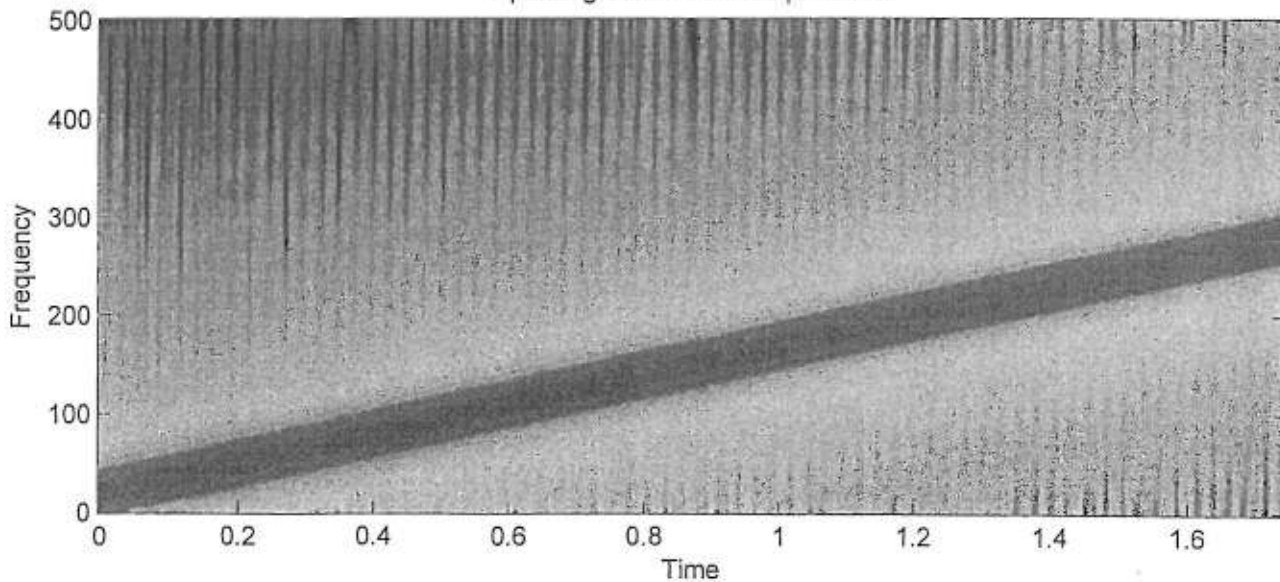
Chirp linéaire



TF d'un chirp linéaire



Spectrogramme d'un chirp linéaire



Zoologie des transformées et propriétés fondamentales.

Dans ce paragraphe, on revient sur les définitions, les liens et les propriétés essentielles des transformées de Fourier et apparentées (TL, TZ). En fait, on trouvera une représentation de Fourier par « paire de domaines » continu-continu, continu-discret, ... et un ou plusieurs espaces associés dans lequel le calcul de la TF pourra être compris comme un produit scalaire, et la représentation du signal comme la décomposition sur une base orthogonale. Les représentations temporelles et transformées portent la même information et permettent de mettre en évidence plus aisément certaines caractéristiques.

Exemple: signaux périodiques de période T , espace $L_2(T)$

L'espace $L_2(T)$ est l'espace des signaux de durée T et de puissance finie. Il est muni d'un produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y^*(t) dt$$

Les exponentielles complexes dont la fréquence est multiple du fondamental $\frac{1}{T}$ forment une base orthogonale :

si on prend

$$e_k(t) = e^{+j2\pi \frac{k}{T} t}$$

alors

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_l \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{+j2\pi \frac{(k-l)}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{e^{+j2\pi \frac{(k-l)}{T} t}}{+j2\pi \frac{(k-l)}{T}} \right]_0^T \\ &= \frac{e^{+j2\pi(k-l)} - 1}{+j2\pi(k-l)} \\ &= 0 \quad \text{pour } k \neq l \\ &= 1 \quad \text{pour } k = l. \end{aligned}$$

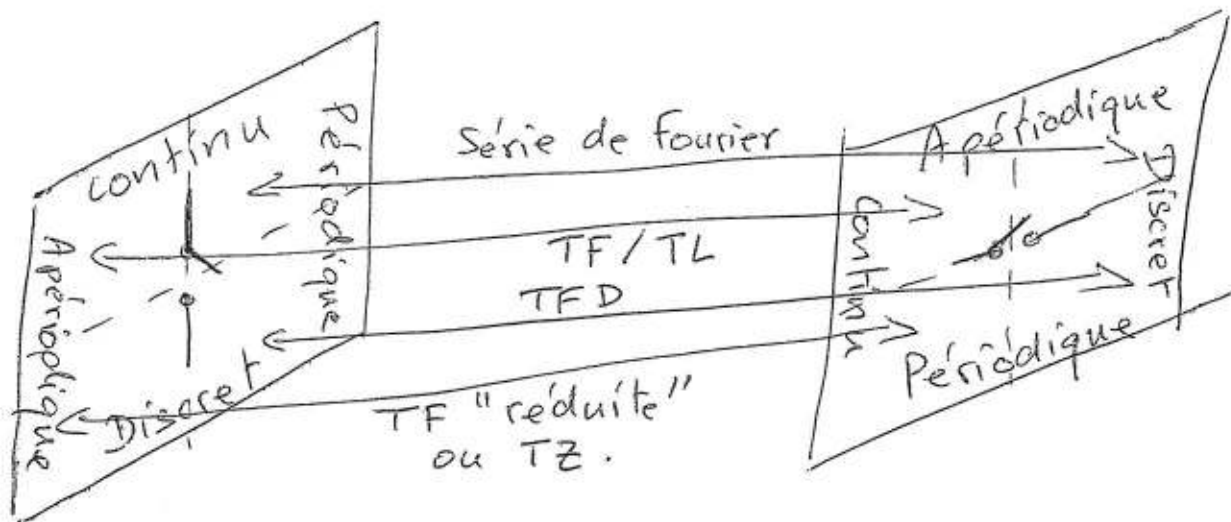
Par suite, on peut exprimer tout signal sur cette base selon

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k(t) \\ &= \sum_k c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \end{aligned}$$

avec

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt,$$

Ce qui n'est rien d'autre que la série de Fourier.



- Transformées et domaine associés -

On passe du domaine continu au domaine discret par échantillonnage, et de l'apériodique au périodique par périodisation.

Continu périodique - Discret apériodique : Série de Fourier

- $x(t)$, période T
- représentation fréquentielle discrète, fréquences en $\frac{1}{T}$

$$\begin{cases} x(t) = \sum_k c_k e^{+j2\pi \frac{k}{T} t} \\ c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt \end{cases}$$

Continu apériodique - Continu apériodique : TF.

Transformée de Fourier « standard »

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} dt$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

[Laplace].

$$x(t) = \frac{1}{2j\pi} \oint_C X(p) e^{pt} dp$$

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

Discret apériodique - Continu périodique - $\frac{TF \text{ réduite}}{TZ}$

$$TZ \quad \begin{cases} x(n) = \frac{1}{2j\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz \\ X(z) = \sum_n x(n) z^{-n} \end{cases}$$

avec $z = e^{pT_e}$ T_e période d'échantillonnage

$$TF \quad \begin{cases} x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(f) e^{-j2\pi f n} df \\ X(f) = \sum_n x(n) e^{-j2\pi f n} \end{cases}$$

$f = e^{j2\pi f T_e}$

Échantillonnage: condition de Shannon / Nyquist

Pour un signal à bande limitée

$$|X(f)| = 0 \text{ pour } |f| > B,$$

en prenant $f_E > 2B$, on a

$$x(t) = \sum_n x(n) \Phi_n(t)$$

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin \pi f_E (t - nT_e)}{\pi f_E (t - nT_e)}$$

Discret périodique - Discret périodique - TFD 5
Transformée de Fourier discrète -

$$x(n) = \alpha \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+j\frac{2\pi kn}{N}}$$

$$X(k) = \beta \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Condition d'inversibilité: $\alpha\beta = \frac{1}{N}$.

La TFD s'interprète simplement comme la série de Fourier d'une séquence discrète périodique de longueur N , ou, comme

l'échantillonnée fréquentielle de la TF "réduite".
Auquel cas, il y a une condition d'échantillonnage pour éviter les recouvrements temporels, et une formule d'interpolation qui permet de retrouver la TF continue $X(f)$ à partir de ses échantillons $X(k)$.

————— 0 —————

Propriétés fondamentales.

- Linéarité $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$

- Échelle $x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(f/a)$

- Retard $x(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$

$$x(n-n_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f n_0} X(f)$$

[TFD] $\|x(n-n_0)\|_N \Leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi k n_0}{N}} X(k)$

- Dérivée

$$\dot{x}(t) \Leftrightarrow j2\pi f X(f)$$

- Moyennes

$$x(0) = \int X(f) df$$

[TFD] $x(0) = \alpha \sum_{k=0}^{N-1} X(k)$

[SF] $x(0) = \sum_k c_k$

[TF/SF*] $X(0) = \int x(t) dt$

[TFD/TFr] $X(0) = \sum_n x(n)$

- Dualité

[TF] $x(t) \Leftrightarrow X(f)$

$$X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

Symétries

$$\begin{array}{l} x(t) \\ x(n) \end{array} \iff \begin{array}{l} X(f) \\ X(f) \end{array} \begin{array}{l} c_k \\ X(k) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x(-t) \\ x(-n) \\ x(N-n) \end{array} \iff \begin{array}{l} X(-f) \\ X(-f) \\ X(N-k) \end{array} \begin{array}{l} c_{-k} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^*(t) \\ x^*(n) \end{array} \iff \begin{array}{l} X^*(-f) \\ X^*(-f) \\ X^*(N-k) \end{array} \begin{array}{l} c_{-k}^* \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^*(-t) \\ x^*(-n) \\ x^*(N-n) \end{array} \iff \begin{array}{l} X^*(f) \\ X^*(f) \\ X^*(k) \end{array} \begin{array}{l} c_k^* \\ \\ \end{array}$$

Signaux réels : symétrie hermitienne

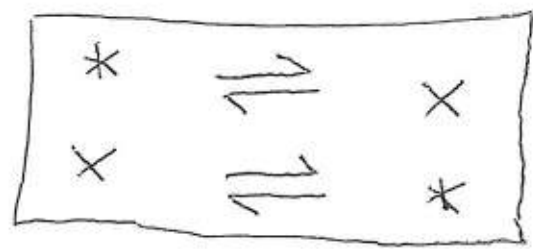
$$X(f) = X^*(-f)$$

$$c_k = c_{-k}^*$$

$$X(k) = X^*(N-k)$$

SIGNAUX RÉELS \Rightarrow MODULE PAIR - PHASE IMPAIRE
[ou symétrie en $\frac{N}{2} + 1$].

PLANCHEREL



* : $(x * y)(u) = \int x(v) y(u-v) dv$
 $(x * y)(n) = \sum x(l) y(n-l)$
 [circulaire] $(x * y)(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \|y(n-l)\|_N$

Pour la TFD, le théorème de Plancherel est vrai pour des convolutions circulaires

PARSEVAL

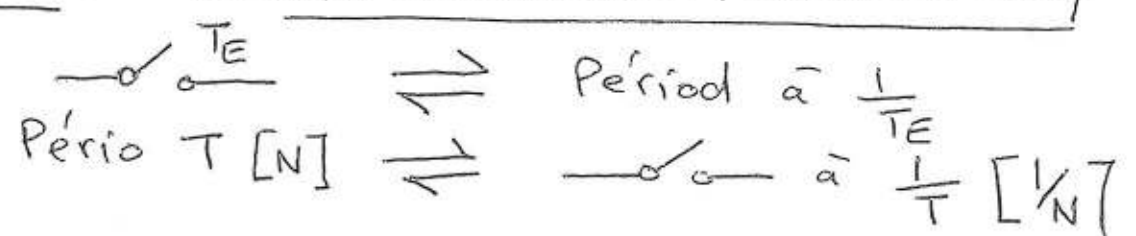
Conservation de la Puissance ou énergie

$$\int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$$

$$\int |x(t)|^2 dt = \sum_k |c_k|^2$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \alpha_B^2 \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

DUALITÉ ÉCHANTILLONNAGE - PÉRIODISATION



1

Finalement,

$$\underline{W}_N \underline{M} = \begin{bmatrix} H(0) & & \\ & \ddots & \\ (0) & & H(N-1) \end{bmatrix} \underline{W}_N^+$$

En multipliant à droite par \underline{W}_N^+ , en tenant compte de $\underline{W}_N \underline{W}_N^+ = N \underline{1}$, on obtient

$$\underline{W}_N \underline{M} \underline{W}_N^+ = N \text{diag} \{ H(0) \dots H(N-1) \}.$$

Une matrice [de convolution] circulante se diagonalise donc par la matrice de Fourier, dont les colonnes sont les vecteurs propres de \underline{M} et les valeurs propres associées les valeurs de la TFD pour chaque indice fréquentiel.

Bourrage de zéros, Résolution, etc

La TFD d'une séquence discrète de longueur N est obtenue en échantillonnant la transformée de Fourier à fréquence continue (TF réduite) sur une grille fréquentielle de N points (ce qui est équivalent à construire une séquence implicite périodique - le signal temporel étant lui-même échantillonné, la TFD relie alors 2 séquences discrètes périodiques).

Il s'en suit que des informations peuvent être dissimulées "entre" les points de la grille et/ou qu'une analyse trop rapide peut conduire à des inexactitudes d'interprétation.

Débutons par le rappel de l'expression de la TF d'une porte discrète sur N points.

$$\pi_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \dots N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{TF} \{ \pi_N(n) \} &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\alpha n} \\ &= \frac{1 - e^{-j2\pi\alpha N}}{1 - e^{-j2\pi\alpha}} \\ &= \frac{e^{-j\pi\alpha N}}{e^{-j\pi\alpha}} \frac{e^{j\pi\alpha N} - e^{-j\pi\alpha N}}{e^{+j\pi\alpha} - e^{-j\pi\alpha}} \\ &= e^{-j\pi\alpha(N+1)} \frac{\sin(\pi\alpha N)}{\sin(\pi\alpha)} \end{aligned}$$

On obtient là une forme en sinus sur sinus différente du sinus cardinal habituel, mais qui correspond en fait au sinus cardinal périodisé (la TF d'une séq. échantillonnée / discrète est périodique) et prenant en compte des recouvrements (une porte étant de TF à support infini; la condition de Shannon n'est pas vérifiée).

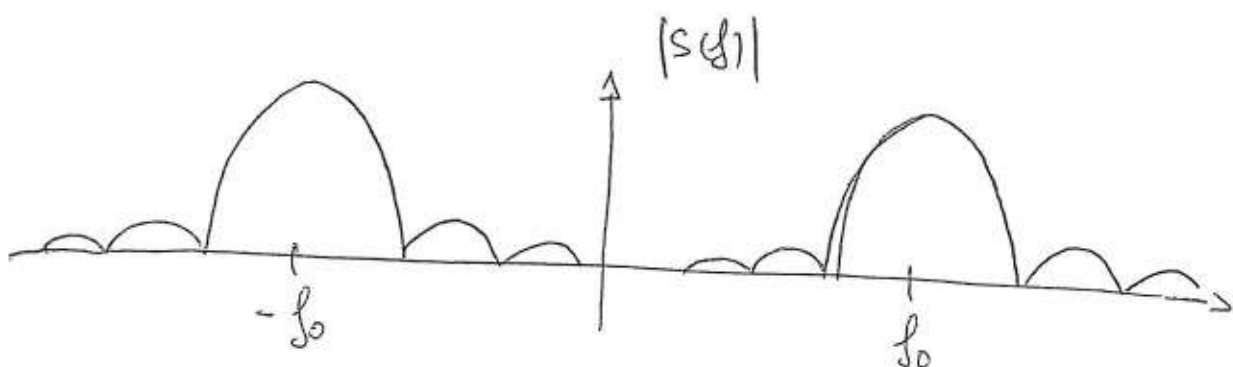
Le terme $e^{j\pi d(N-1)}$ correspond quant à lui à un décalage de $(N-1)/2$ d'une porte qui serait centrée.

Considérons maintenant la TF d'une sinusoïde sur N points :

$$s(n) = A \sin(2\pi f_0 n) \quad \text{pour } n \in [0, N-1].$$

$$\begin{aligned} \text{On a } S(f) &= \frac{A}{2j} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi(f-f_0)n} - e^{-j2\pi(f+f_0)n} \\ &= \frac{A}{2j} \left[e^{-j\pi(f-f_0)(N-1)} \frac{\sin \pi(f-f_0)N}{\sin \pi(f-f_0)} - e^{-j\pi(f+f_0)(N-1)} \frac{\sin \pi(f+f_0)N}{\sin \pi(f+f_0)} \right] \end{aligned}$$

En module, on obtient alors une représentation du type



Cette transformée de Fourier s'interprète également comme le résultat de la convolution de deux raies situées en $\pm f_0$ par un noyau de Dirichlet (le $\frac{\sin(\pi x N)}{\sin(\pi x)}$).

En effet, la limitation sur N points peut être vue comme la pondération d'une sinusoïde sur $]-\infty, +\infty[$ par une porte de longueur N :

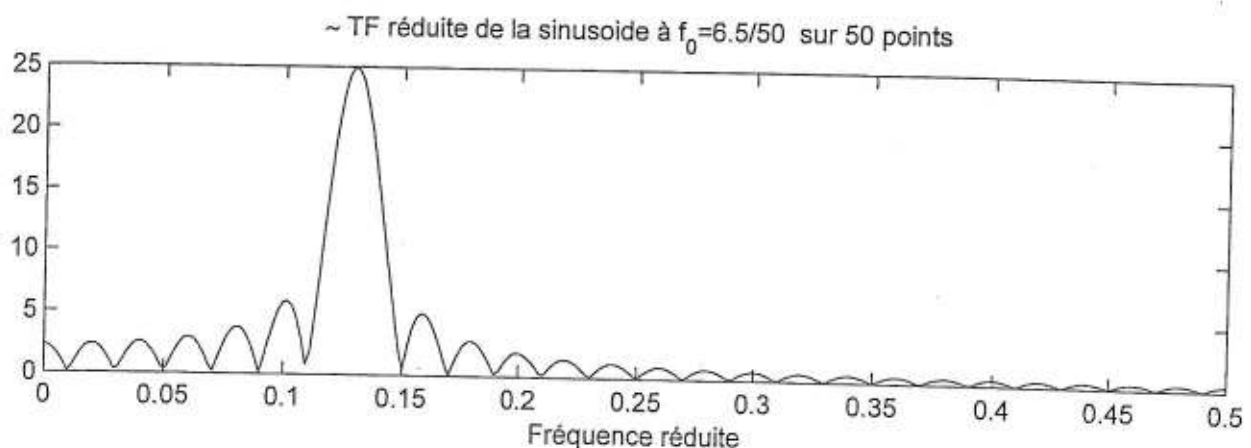
$$S(n) = \Pi_N(n) \times A \sin(2\pi f_0 n)$$

Par le théorème de Plancherel, la TF est donnée par

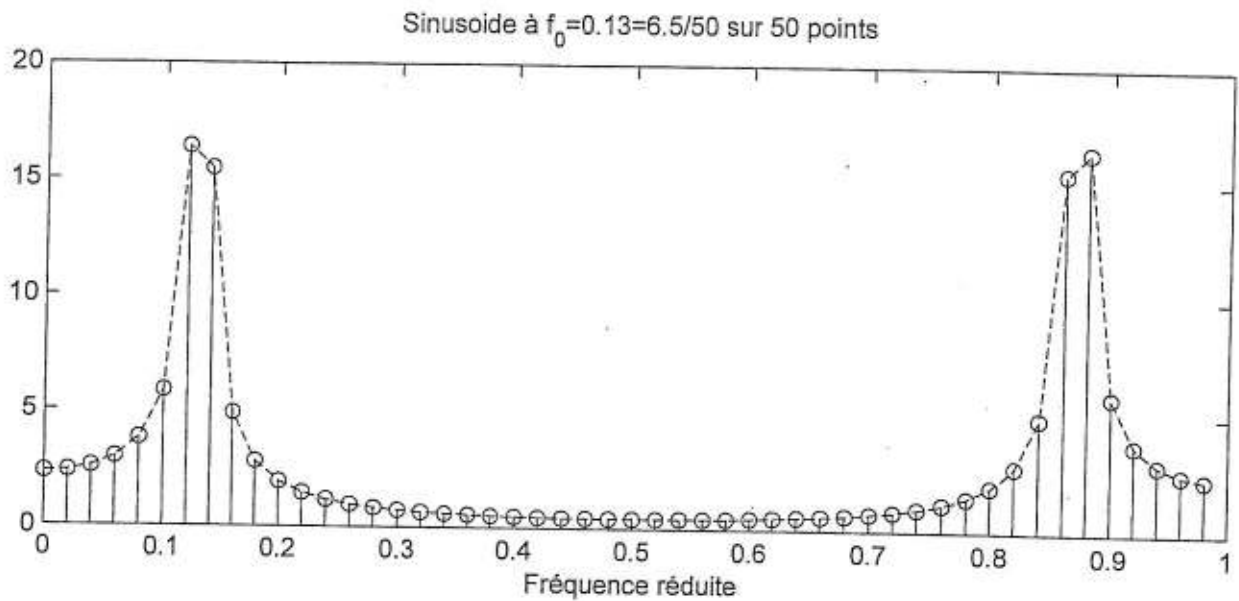
$$\begin{aligned} S(f) &= \text{TF}\{\Pi_N(n)\} * \text{TF}\{A \sin(2\pi f_0 n)\} \\ &= \frac{e^{-j\pi f(N-1)} \sin(\pi f N)}{\sin \pi f} * \frac{A}{2j} [\delta(f-f_0) * \delta(f+f_0)], \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat précédent.

C'est ainsi la longueur et la forme de la fenêtre de pondération qui fixeront l'allure et les caractéristiques de la TF complète. Comme on le verra, on peut modifier la forme de la fenêtre de pondération. Dans notre cas, la TF d'une sinusoïde de fréquence $f_0 = 0,13$ donnée sur $N = 50$ points est donnée ci-dessous (en module)



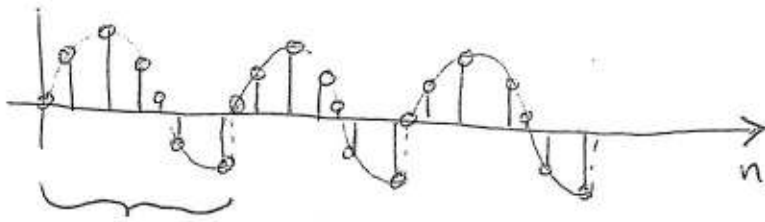
La TFD est ensuite donnée par échantillonnage régulier de la TF réduite au pas $(1/N)$ (l'inverse de la période de répétition du signal temporel). On obtient alors la forme suivante,



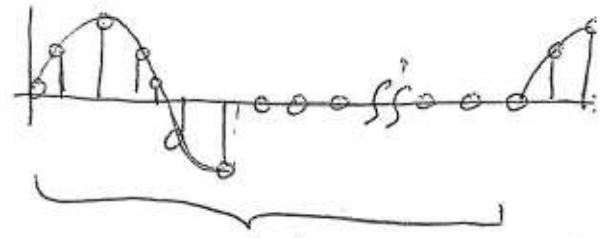
à partir de laquelle il n'est pas facile de conclure que le signal initial est une sinusoïde dont la TF attendue serait deux raies.

Afin d'augmenter la définition de la TFD, il est possible d'effectuer un échantillonnage plus fin de l'axe fréquentiel. Pour cela, il suffit d'augmenter le nombre d'échantillons sur chaque "période" du signal temporel. Ceci s'effectue en complétant le signal disponible par des zéros jusqu'à la longueur désirée, disons M . On parle alors de bourrage de zéros. La résolution de définition sur la grille fréquentielle est alors en $\frac{1}{M}$. Il est important de noter que l'opération ne change pas la nature de la TF mais simplement affine la visualisation.

Dans le domaine tempore, les signaux utilisés pour calculer la TFD se présentent comme suit :

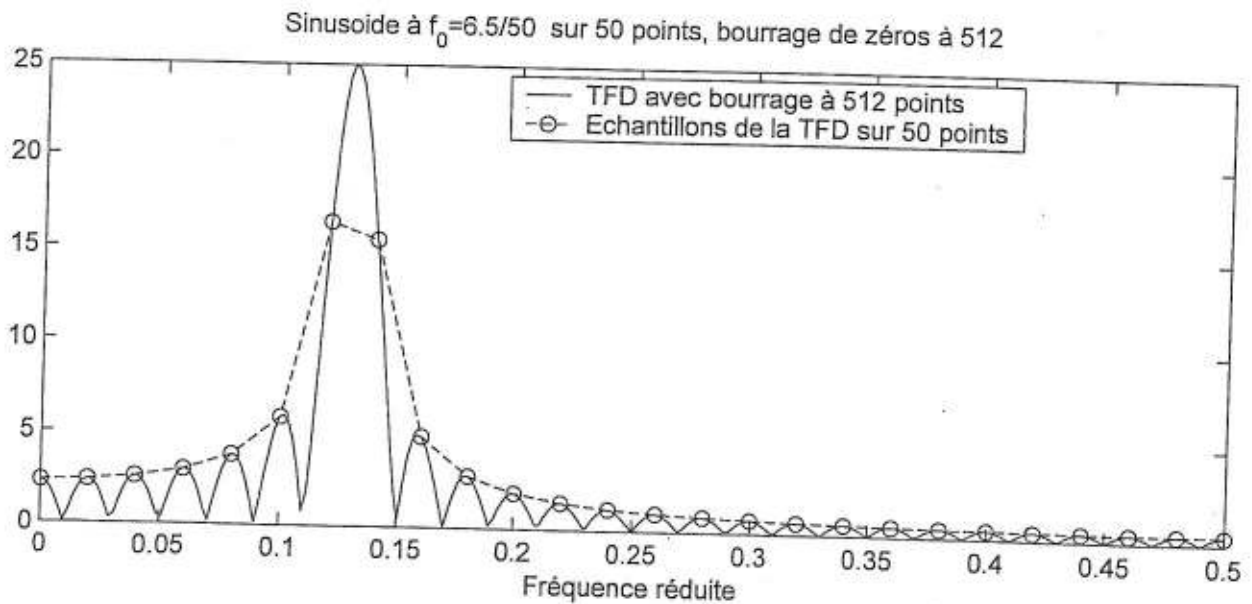


N points pour calculer la TFD
 → définition en $\frac{1}{N}$



M points
 → définition en $\frac{1}{M}$

Si l'on prend par exemple $M=512$ dans notre exemple précédent, on obtient une définition en $\frac{1}{512} \approx 0,002$ et le résultat suivant, sur lequel on a figuré les points d'échantillonnage de la TFD sur 50 points.



En augmentant ainsi artificiellement la période par bourrage de zéros, on se rapproche de la TF réduite. En fait, il est possible simplement de retrouver

la TF réduite à partir de la TFD.

Interpolation de la TFD.

En effet, le signal non périodique de départ $s(n)$ se retrouve comme le signal temporel périodique $s_N(n)$, pondéré par une porte de longueur N ,

$$s(n) = \pi_N(n) \times s_N(n)$$

donc $S(f) = \text{TF}\{\pi_N(n)\} * \text{TF}\{s_N(n)\}$

et la $\text{TF}\{s_N(n)\}$ n'est autre que

$$\sum_k S(f) \delta(f - \frac{k}{N}) = \sum_k S(\frac{k}{N}) \delta(f - \frac{k}{N})$$

où $S(\frac{k}{N})$ désigne la TF prise en $f = \frac{k}{N}$,
et $S(k)$ désigne la TFD pour l'indice k , au risque
d'une grande confusion des esprits...

Alors,

$$S(f) = \left[e^{-j\pi f(N-1)} \frac{\sin(\pi f N)}{\sin \pi f} \right] * \sum_k S(k) \delta(f - \frac{k}{N})$$

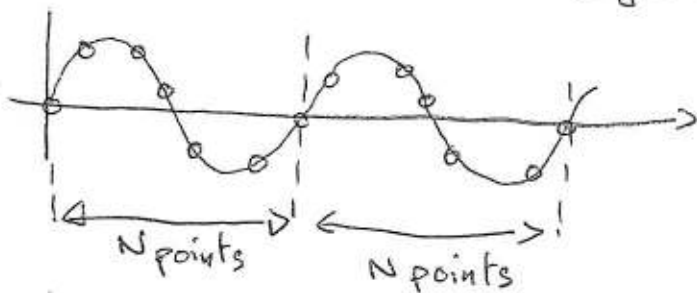
soit

$$S(f) = \sum_k S(k) \frac{e^{-j\pi \frac{k(N-1)}{N}(f - \frac{k}{N})} \sin \pi (\frac{k}{N}) N}{\sin \pi (f - \frac{k}{N})}$$

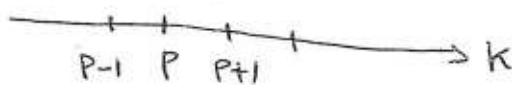
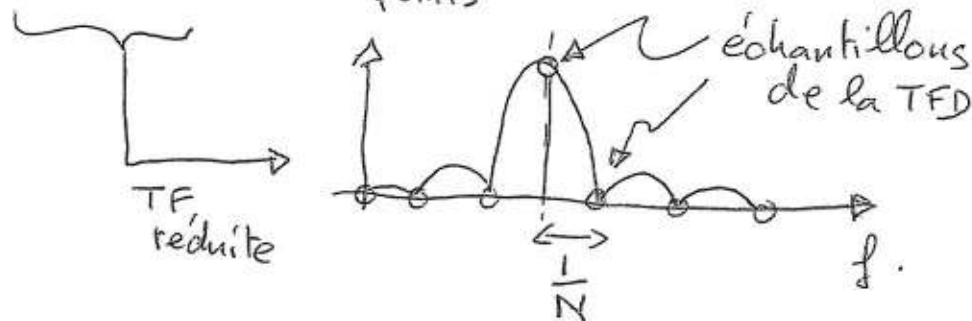
Il est ainsi possible de reconstruire exactement la TF réduite à partir de ses échantillons (la TFD) en interpolant entre ceux-ci avec des "sinus cardinaux" (version Dirichlet). C'est exactement le pendant de la formule d'interpolation de Shannon pour la reconstruction du signal temporel à partir de ses échantillons.

Coïncidence entre TF et TFD.

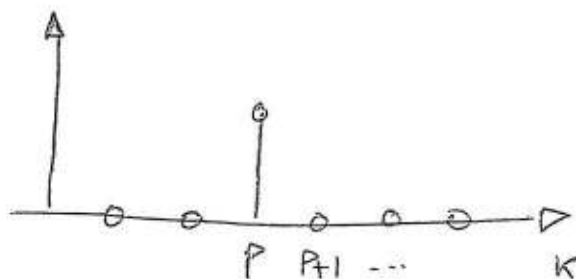
Il peut y avoir coïncidence (mais rarement en fait...) entre la TF et la TFD lorsque l'on s'intéresse à un signal périodique et que le nombre de points N est choisi de sorte à couvrir un nombre entier de périodes. Sous cette condition, le signal sur N points rendu implicitement périodique par la TFD se confond avec le signal initial.



Si on a L points par période, P périodes sur la durée N , la fréquence apparente est de $\frac{P}{N} = \frac{1}{L}$ et la fréquence apparaît à l'indice P de la TFD.



Dans ces conditions, le ^{max du} sinus cardinal est situé sur un des points de la grille, en $\frac{P}{N}$ et les échantillons étant pris tous les $\frac{1}{N}$, on échantillonne le sinus cardinal sur ses passages à zéro. La TFD apparente est alors

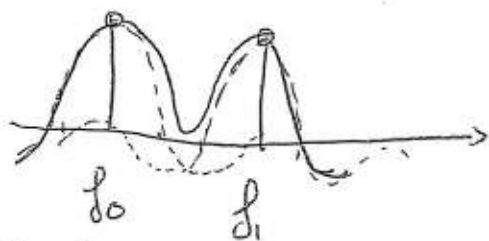


La résolution de FOURIER.

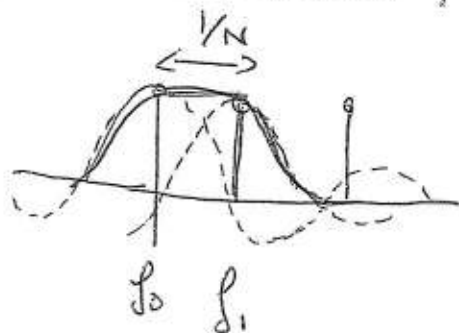
Le sinus cardinal à temps discret, noyau de Dirichlet, possède un lobe principal de largeur totale $2/N$ et des lobes secondaires de largeur $1/N$.

Lorsque l'on considère deux sinusoïdes proches, la convolution de la réponse fréquentielle par ce sinus cardinal peut empêcher de distinguer, résoudre les 2 raies.

Le cas limite se comprend aisément :



$$|f_1 - f_0| > \frac{1}{N}$$



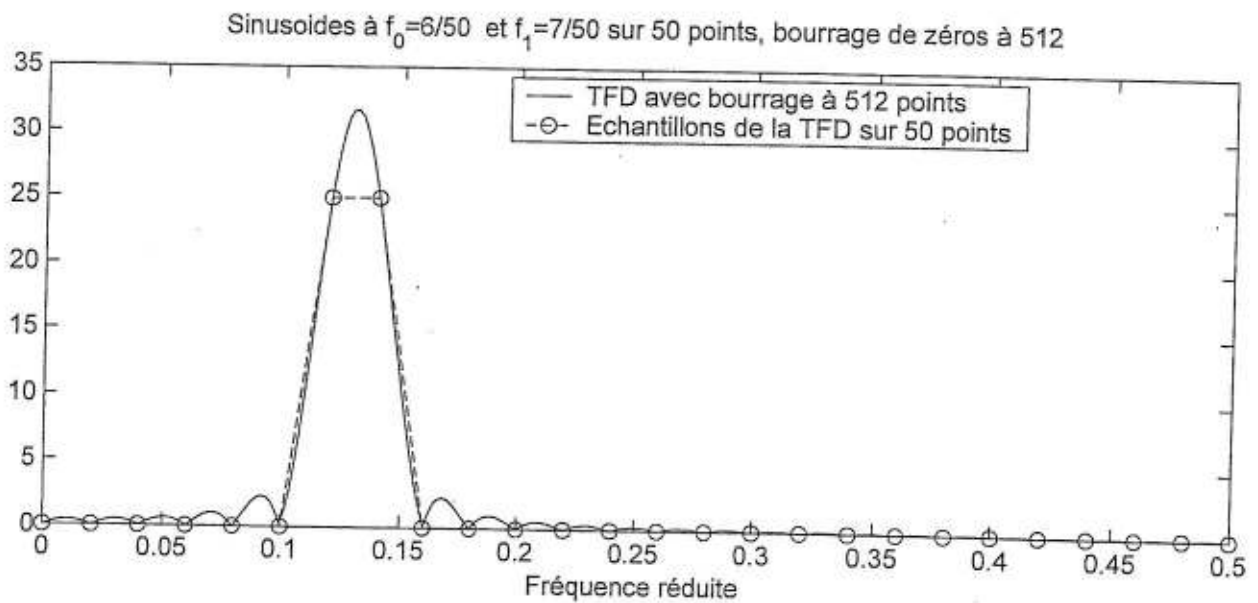
$$|f_1 - f_0| = \frac{1}{N}$$

Dès que les raies seront séparées de moins de la demi-largeur du lobe principal, la superposition des sinus cardinaux ne présentera plus qu'un maximum qui n'indiquera plus la présence de 2 raies distinctes. Il n'est possible de résoudre 2 raies que si leur écart en fréquence est supérieur à la résolution de FOURIER $1/N$...

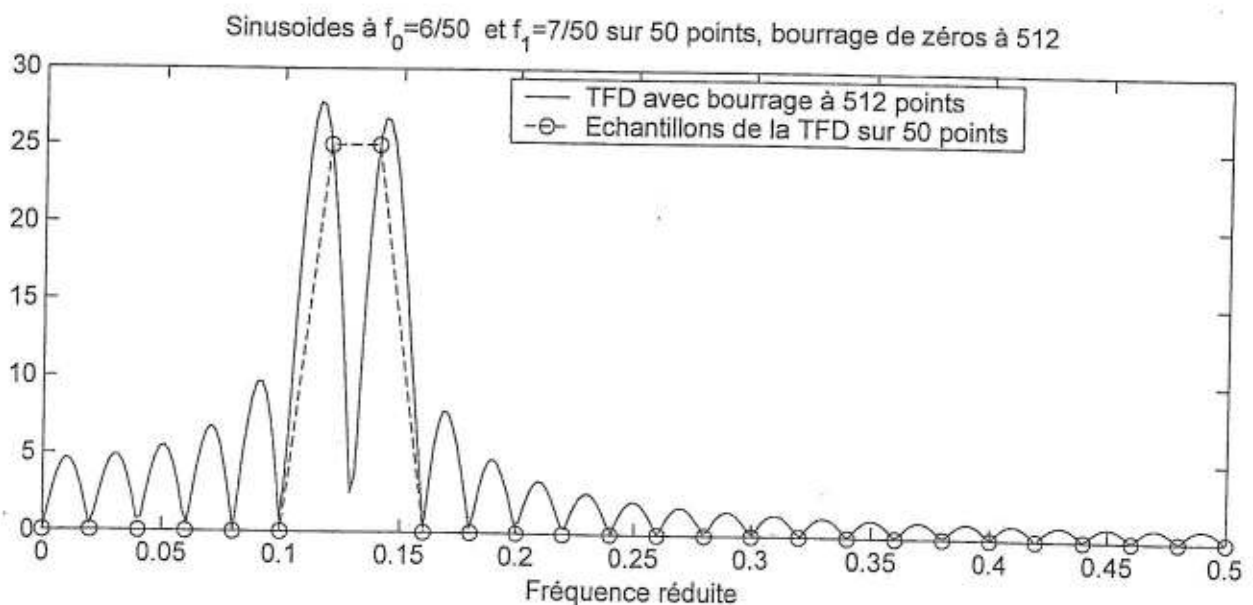
Notons qu'en pratique, il peut être possible de distinguer 2 maxima pour un écart inf. à $1/N$, lorsque les sinusoïdes sont déphasées. La recombinaison des sine est alors différente. Mais la limite de résolution de Fourier indique l'écart au dessus duquel il sera toujours possible de résoudre 2 évts proches.

Les figures suivantes illustrent la séparation ou non, de deux raies proches. On a également indiqué les points correspondant à la TFD sans interpolation pour reillustrer l'éventuelle difficulté d'interprétation des résultats « bruts » de la TFD.

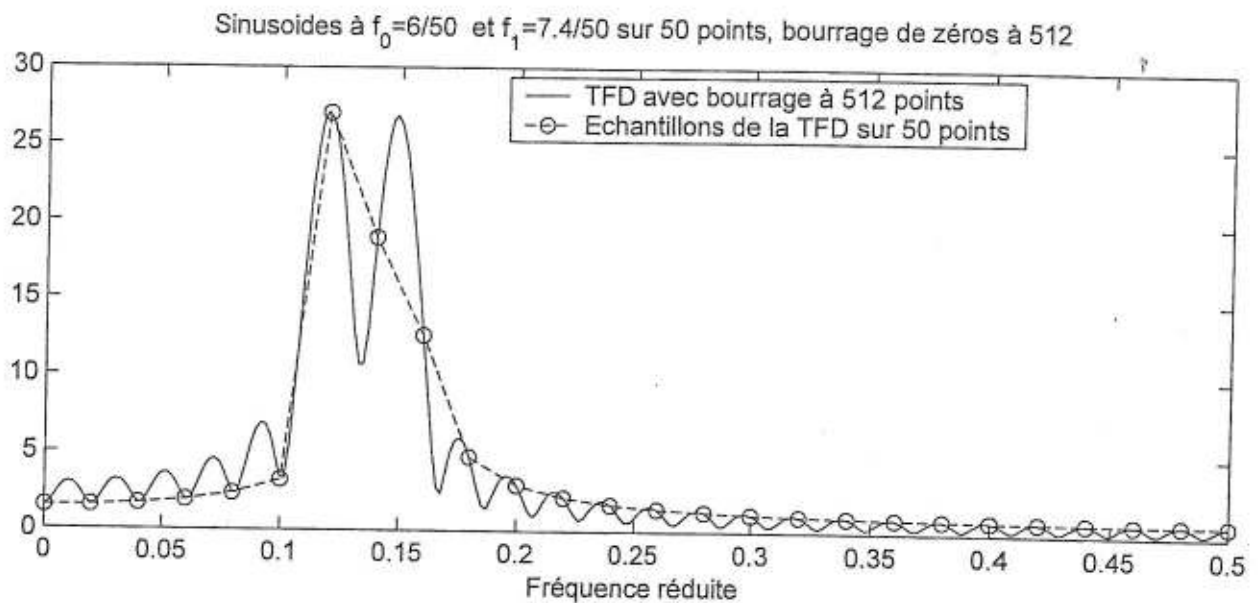
Séparation de 2 sinusoides séparées de $1/N$.



Même cas de figure, mais avec un déphasage différent entre les 2 composantes.



Et un dernier exemple, avec une séparation supérieur à la limite de résolution - La TFD sur 50 points n'est pas aisément interprétable --- Il faut interpoler.



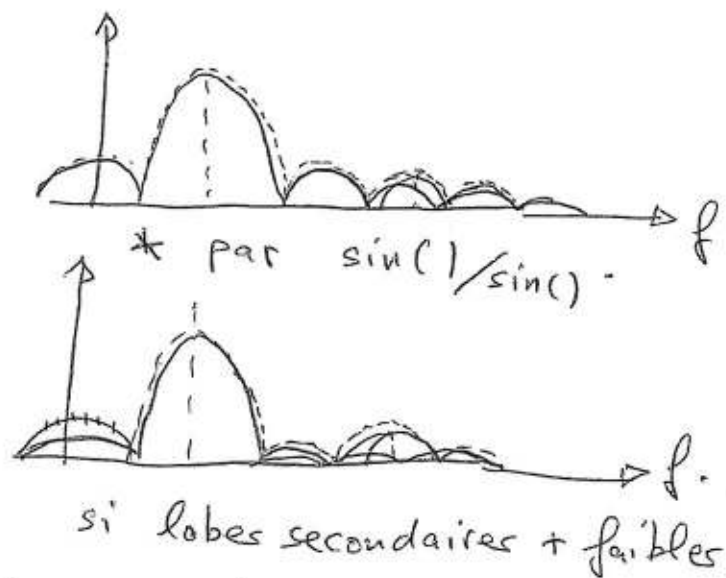
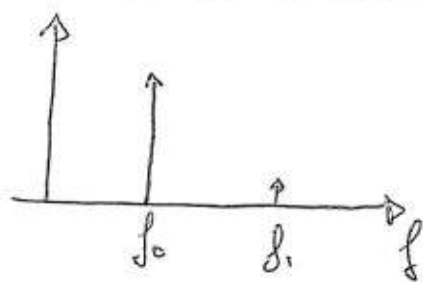
Dernière remarque: du fait des interactions entre les 2 sinus cardinaux, les maxima ne sont pas nécessairement situés à l'emplacement des raies (revoir la figure $f_0 = 6/50$, $f_1 = 7/50$ page précédente).

Choix d'une fenêtre de pondération.

Du fait de la limitation de la durée d'analyse, le signal temporel est implicitement pondéré par une fenêtre rectangulaire, ce qui entraîne à son tour la convolution de la TF par une fonction en sinus cardinal (périodique), et induit une limitation en résolution en $1/N$.

Il est possible de choisir d'autres fenêtres de pondération ou d'apodisation (« couper les pieds ») afin de diminuer l'amplitude des lobes secondaires et limiter ainsi un effet de masquage de signaux de faible amplitude fréquentielle.

Exemple : effet de masquage



On utilise donc un signal apodisé de la forme

$$x_p(n) = w(n) \times x(n)$$

soit

$$X_p(f) = W(f) * X(f)$$

Mais globalement, la réduction de l'amplitude des lobes secondaires correspond à un élargissement du lobe principal et une dégradation de la résolution. Une bonne analyse relève alors de « l'art de l'ingénieur ».

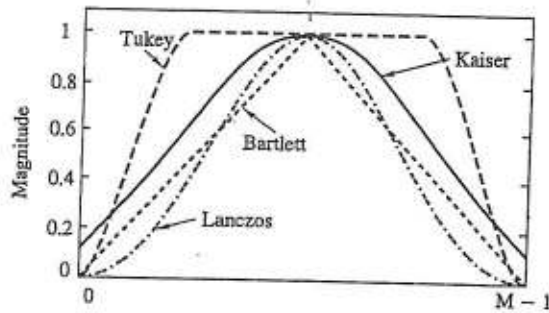
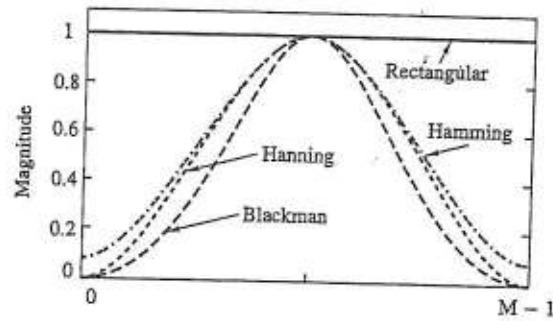


Figure 8.5 Shapes of several window functions.

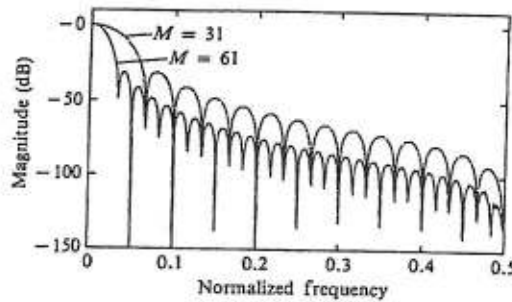


Figure 8.6 Frequency responses of Hanning window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

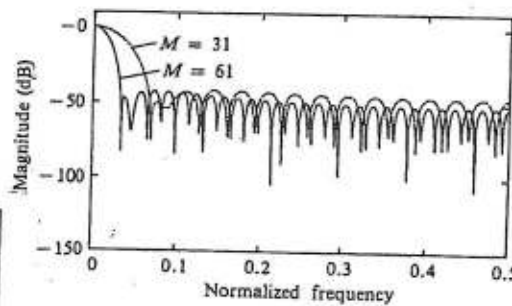


Figure 8.7 Frequency responses for Hanning window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

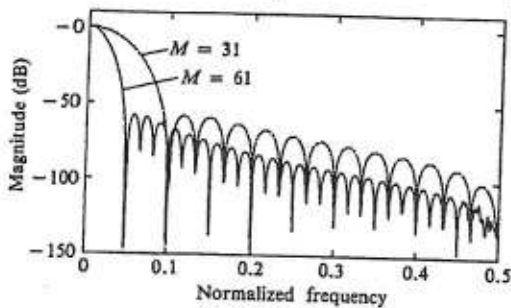


Figure 8.8 Frequency responses for Blackman window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

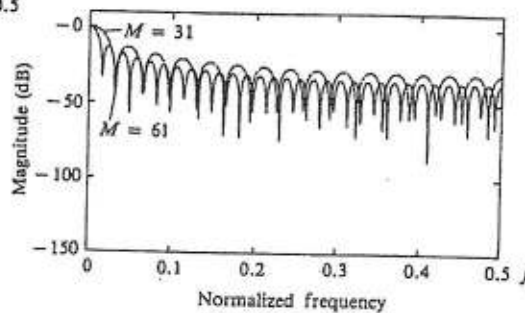


Figure 8.4 Frequency response for rectangular window of lengths (a) $M = 31$, (b) $M = 61$.

Name of window	Time-domain sequence, $h(n), 0 \leq n \leq M-1$
Bartlett (triangular)	$1 - \frac{2 \left n - \frac{M-1}{2} \right }{M-1}$
Blackman	$0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$
Hamming	$0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$
Hanning	$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right)$
Kaiser	$\frac{I_0 \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{M-1}{2} \right)^2 - \left(n - \frac{M-1}{2} \right)^2} \right]}{I_0 \left[\alpha \left(\frac{M-1}{2} \right) \right]}$
Lanczos	$\left\{ \frac{\sin \left[2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) / (M-1) \right]}{2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) / \left(\frac{M-1}{2} \right)} \right\}^L \quad L > 0$ $1, \left n - \frac{M-1}{2} \right \leq \alpha \frac{M-1}{2} \quad 0 < \alpha < 1$
Tukey	$\frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{n - (1+\alpha)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2} \pi \right) \right]$ $\alpha(M-1)/2 \leq \left n - \frac{M-1}{2} \right \leq \frac{M-1}{2}$

TABLE 8.2 IMPORTANT FREQUENCY-DOMAIN CHARACTERISTICS OF SOME WINDOW FUNCTIONS

Type of window	Approximate transition width of main lobe	Peak sidelobe (dB)
Rectangular	$4\pi/M$	$1/M$ -13
Bartlett	$8\pi/M$	$2/M$ -27
Hanning	$8\pi/M$	-32
Hamming	$8\pi/M$	-43
Blackman	$12\pi/M$	$3/M$ -58

D'après J.G. Proakis, D. Manolakis,
« Digital Signal Processing »,
Prentice Hall, 1996.

Principe d'incertitude temps-fréquence.

On sait que la TF d'une porte est d'autant plus large que la porte est étroite et réciproquement. Les signaux "localisés" dans le domaine temporel [un $\delta(t-t_0)$ par exemple] sont larges dans le domaine fréquentiel tandis que les signaux mal localisés en temps [une sinusoïde par exemple] sont bien localisés dans le domaine fréquentiel. On ne peut pas trouver de fonction qui soit à support limité simultanément dans les deux domaines. Au contraire, plus une fonction est concentrée dans un domaine, plus elle est étalée dans l'autre.

L'énergie d'un signal est donnée par

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

(par Parseval),

et on peut considérer

$$\frac{|x(t)|^2}{E_x} \quad \text{et} \quad \frac{|X(f)|^2}{E_x}$$

comme analogue à des densités de probabilité, et définir les moments de ces densités.

$$\bar{t} = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{+\infty} t |x(t)|^2 dt \quad \text{temps moyen}$$

$$\bar{f} = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{+\infty} f |X(f)|^2 df \quad \text{freq. moyenne}$$

et l'on définit ensuite les "variances" par

$$(\Delta t)^2 = \frac{1}{E_x} \int (t - \bar{t})^2 |x(t)|^2 dt$$

$$(\Delta f)^2 = \frac{1}{E_x} \int (f - \bar{f})^2 |X(f)|^2 df$$

Remarquons que le produit $\Delta t \cdot \Delta f$ est invariant par contraction/dilatation temporelle ou fréquentielle, car $x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$. De même, Δt et Δf sont invariants par décalages $t \rightarrow t + \tau$ lorsque Δt est faible, le signal est bien localisé autour de l'instant \bar{t} .

On considère ensuite la fonction de λ positive suivante:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \lambda \frac{dx(t)}{dt} + t x(t) \right|^2 dt \geq 0$$

ce qui se développe sous la forme

$$I(\lambda) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{d|x(t)|^2}{dt} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt$$

En notant que

$$1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |j2\pi f X(f)|^2 df = 4\pi^2 (\Delta f)^2 E_x$$

$$2 - \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{d|x(t)|^2}{dt} dt = \left[t|x(t)|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x, \text{ si } t|x(t)|^2 \rightarrow 0 \text{ pour } t \rightarrow \pm\infty$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt = (\Delta t)^2 E_x$$

et il reste donc

$$I(\lambda) = \left[\lambda^2 4\pi^2 (\Delta f)^2 + \lambda + (\Delta t)^2 \right] E_x \geq 0$$

La fonction $I(\lambda)$ étant toujours de même signe, le discriminant doit être négatif, ce qui conduit à :

$$\boxed{\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}}$$

Le produit durée moyenne - bande moyenne est ainsi borné inférieurement, ce qui induit une relation d'incertitude - de, de type Gabor-Heisenberg entre les 2 domaines.

Les signaux qui sont conjointement les plus compacts sont ceux qui permettent d'atteindre la borne, c'est à dire ceux tels que

$$I(\lambda_0) = \lambda_0^2 4\pi^2 (\Delta f)^2 + \lambda_0 + (\Delta t)^2 = 0$$

soit
$$\lambda_0 \frac{dx(t)}{dt} + t x(t) = 0$$

ce qui conduit aux signaux gaussiens

$$x(t) = A e^{-\lambda_0 t^2}$$

dont la TF est également gaussienne :

$$X(f) = A e^{-f^2 / \lambda_0^2}$$

Transformée de Fourier à court terme.

La transformée de Fourier n'est pas bien adaptée à la description de changements locaux du "contenu fréquentiel", dans la mesure où la TF rend compte d'un "comportement moyen" du signal pour toute sa durée d'existence (ou d'observation). De façon à appréhender des caractéristiques "locales" pour des signaux non stationnaires, on peut utiliser une analyse de Fourier limitée à un certain intervalle autour de chaque instant. Cette TF à court terme permet ainsi une analyse temps-fréquence. La TF à CT est définie selon

$$\begin{cases} X(f, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) w(t-\tau) e^{-j2\pi f t} dt \\ x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f, \tau) w(t-\tau) e^{+j2\pi f t} dt df. \end{cases}$$

Bien entendu, la fonction $w(t-\tau)$
Cette transformation peut être comprise comme une TF à fenêtre glissante; on déplace le centre de la fenêtre $w(t)$ au temps τ , on pondère le signal puis on calcule la TF

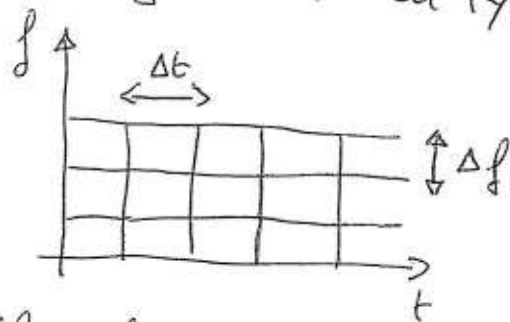
Le coefficient $X(f, \tau)$ résulte du produit scalaire entre $x(t)$ et la fonction de base

$$b(f, \tau) = w(t-\tau) e^{+j2\pi f t}$$

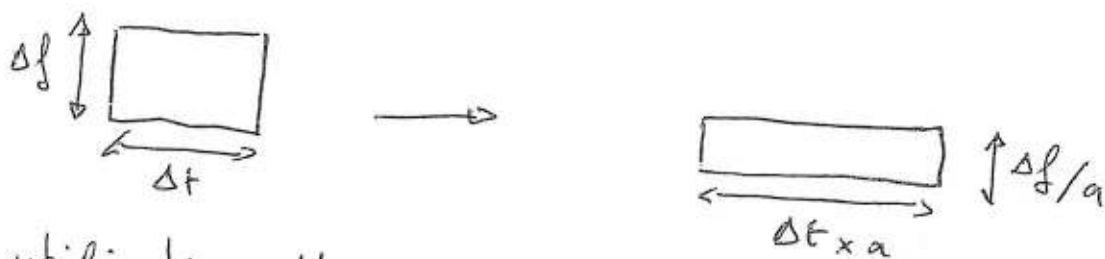
$$\begin{aligned} \tau &\in]-\infty, +\infty[\\ f &\in]-\infty, +\infty[\end{aligned}$$

Cette fonction peut être vue comme une décalée en temps et en fréquence d'une fonction initiale $w(t)$.

Les résolutions temporelle et fréquentielle sont données par Δt et Δf respectivement, quantités qui sont invariantes par des décalages temporels ou fréquentiels, de sorte que le produit $\Delta t \Delta f$ et les largeurs $\Delta t, \Delta f$ de chaque fonction de base $b(t, f)$ sont les mêmes. On représente souvent l'ensemble des fonctions de base par un diagramme du type



On peut modifier la largeur spectrale Δf en élargissant (ou contractant) la fenêtre $w(t)$, mais le produit $\Delta t \cdot \Delta f$ reste constant,



L'utilisation d'une fenêtre large fournit une bonne résolution fréquentielle mais de pauvres capacités de localisation temporelle, tandis que l'utilisation d'une fenêtre étroite donne une bonne résolution temporelle au détriment de la résolution fréquentielle.

La fenêtre gaussienne fournit la meilleure résolution "conjointe" dans les 2 domaines - la TFA à CT utilisant cette fenêtre est appelée transformée de Gabor (1946). La représentation obtenue à partir de la TFA à CT est souvent appelée spectrogramme.

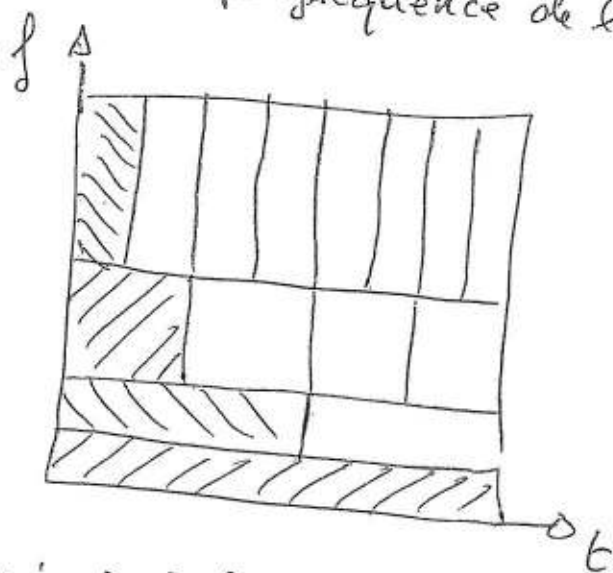
3
Cependant, une résolution uniforme dans tout le plan temps-fréquence n'est pas forcément toujours la + efficace.
Considérons la séparation de 2 sinusoides. On sait que la résolution fréquentielle est en $\frac{1}{T}$, avec T la longueur de l'intervalle d'observation.

Pour 1 et 1,001 Hz il faut $T = 1000$ s

Pour 1000 et 1001 Hz il faut $T = 1$ s

alors que dans les 2 cas, la différence des fréquences est de 0,1%.

Ceci indique qu'il pourrait être intéressant d'utiliser des fenêtres larges temporellement pour les basses fréquences, et plus étroites pour les hautes fréquences: c'est la base d'une analyse multirésolution avec un pavage du plan temps fréquence de la forme:



Et on arrive ainsi à la notion de transformée en ondelettes. Pour effectuer cette analyse multirésolution, on utilise la contraction-dilatation d'une ondelette mère que l'on décale également temporellement. Cet élément s'écrit

$$\Psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$$

avec a et $\tau \in \mathbb{R}$. Si $\int \Psi(t) dt = 0$, si $C_{\Psi} = \int \frac{|\Psi(f)|^2}{f^2} df < \infty$
 et si $\|\Psi(t)\| = 1$ alors $\|\Psi_{a,\tau}(t)\| = 1 \forall a, \forall \tau$, et
 la Transformée en ondelette est définie par

$$\begin{cases} X(a,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi_{a,\tau}^*(t) dt \\ x(t) = \frac{1}{C_{\Psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} X(a,\tau) \Psi_{a,\tau}(t) d\tau da \end{cases}$$

La TO réalise une transformation temps-échelle
 (la fréquence est remplacée par le degré de contraction
 ou dilatation de l'ondelette mère).

Ondelette de Morlet, par exemple:

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-t^2/2}$$

avec $f_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{c}{\log 2}}$

