

ÉLÉMENTS DE TRAITEMENT D'ANTENNE¹

Il est naturel, lorsque l'on dispose de plusieurs antennes, de chercher à exploiter conjointement les mesures. À partir d'un réseau de capteurs, on peut former une antenne à plusieurs éléments, où les signaux délivrés par chacun des capteurs sont combinés entre eux de manière à orienter « électroniquement » l'antenne ou à réaliser d'autres fonctions. Cette orientation électronique est réalisée par des circuits spécialisés ou par des algorithmes. On parle alors de traitement. Ces quelques pages forment une introduction très simplifiée aux méthodes de traitement d'antenne, l'objectif essentiel étant de sensibiliser aux principes de base de quelques méthodes (on ne discutera notamment pas des bornes de performances, de la robustesse au bruit, etc.). Dans un premier temps, on présentera un modèle simple et les paramétrisations possibles du champ d'onde reçu. Dans un second temps, on donnera l'analogie entre l'imagerie d'un champ de source et l'estimation spectrale, dans le cas d'une propagation par ondes planes. On présentera ensuite les méthodes classiques pour un champ continu : formation de voies, méthode de Capon, modélisation AR. Enfin, sous l'hypothèse de sources ponctuelles, on présentera quelques méthodes à « haute résolution ». La présentation sera appuyée par des résultats de simulation.

1 Modèle et paramétrisation

Lorsque le champ est stationnaire, le milieu homogène et isotrope, alors le milieu se comporte comme un filtre, et le champ au point \mathbf{r} est :

$$e(\mathbf{r}, t) = \int_{\sigma} \int_{t'} G(\sigma - \mathbf{r}, t - t') s(\sigma, t') d\sigma dt'$$

où G désigne la fonction de Green du milieu, et s l'amplitude du champ émis. Cette relation, qui est une convolution spatiale et temporelle, exprime que le champ $e(\mathbf{r}, t)$, au point \mathbf{r} et au temps t , résulte de la superposition de toutes les émissions aux points σ , et au cours du temps.

Pour un capteur placé en \mathbf{r}_i , en tenant compte de ses propres caractéristiques (fonction de transfert en fréquence, directivité), on a :

$$x_i(t) = x(\mathbf{r}_i, t) = \int \int h_i(\sigma - \mathbf{r}_i, t - t') s(\sigma, t') d\sigma dt' + b_i(t).$$

On a supposé ici que les sources sont immobiles (l'effet Doppler est un effet non linéaire).

¹ Extrait du livre de O. Picon et al, Les Antennes - Théorie, Conception Et Applications, Dunod, septembre 2009. Chapitre rédigé par J.-F. Bercher.

L'hypothèse bande étroite permet de simplifier l'écriture précédente : en effet, la transformée de Fourier (TF), à la fréquence f , de la relation précédente est :

$$x_i(f) = \int_{\sigma} h_i(\sigma - \mathbf{r}_i, f) s(\sigma, f) d\sigma.$$

Si le champ est à bande étroite autour d'une fréquence f_0 , on a :

$$s(\sigma, t) \approx s(\sigma, f_0) e^{-j2\pi f_0 t} = s_0(\sigma) e^{-j2\pi f_0 t}$$

En collectant les mesures sur M capteurs placés en $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M$, on a :

$$\begin{bmatrix} x_1(t, f_0) \\ \vdots \\ x_M(t, f_0) \end{bmatrix} = e^{-j2\pi f_0 t} \int s_0(\sigma) \begin{bmatrix} h_1(\sigma - \mathbf{r}_1, f_0) \\ \vdots \\ h_M(\sigma - \mathbf{r}_M, f_0) \end{bmatrix} d\sigma + \begin{bmatrix} b_1(t, f_0) \\ \vdots \\ b_M(t, f_0) \end{bmatrix},$$

soit

$$\mathbf{x}(t, f_0) = e^{-j2\pi f_0 t} \int s_0(\sigma) \mathbf{a}(\sigma) d\sigma + \mathbf{b}(t, f_0)$$

où $s_0(\sigma)$ est l'amplitude émise en σ à la fréquence f_0 et $\mathbf{a}(\sigma)$ est le vecteur directionnel, qui intègre les informations sur le modèle et milieu de propagation ainsi que les caractéristiques des capteurs. L'hypothèse bande étroite est très importante, car elle permet de découpler les contributions spatiales et temporelles. Lorsque les signaux ne sont pas bande étroite, on se ramène à ce cas de figure, soit par un filtrage bande étroite en réception, soit en effectuant une transformée de Fourier des données en début de traitement.

On notera τ_{ik} le retard de propagation entre deux capteurs :

$$\tau_{ik} = T(\sigma - \mathbf{r}_i, f_0) - T(\sigma - \mathbf{r}_k, f_0)$$

où $T(\sigma - \mathbf{r}_i, f_0)$ désigne le temps de propagation de σ à \mathbf{r}_i , à la fréquence f_0 .

On peut omettre les dépendances en temps et fréquence en ne conservant que les amplitudes complexes :

$$\mathbf{x} = \int s_0(\sigma) \mathbf{a}(\sigma) d\sigma + \mathbf{b}$$

La connaissance du modèle de propagation, des caractéristiques du réseau (gain, directivité des capteurs, géométrie...) permet de relier $\mathbf{a}(\sigma)$ à un ensemble de paramètres physiques, $\boldsymbol{\theta}$.

Le vecteur paramétré $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$ est le *vecteur directionnel* ou *steering vector*. En enregistrant les données recueillies sur les capteurs à différents instants t_1, \dots, t_K (ou à partir du calcul sur différents blocs de données), on obtient une série de réalisations ou *snapshots* $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K$, qui sont utiles pour l'estimation des quantités statistiques.

▪ Exemples

Dans ce chapitre, les différentes méthodes seront illustrées pour un modèle de propagation sphérique, et un modèle de propagation par ondes planes, ces ondes illuminant un réseau de M capteurs répartis sur une droite, les capteurs étant uniformément répartis, avec une distance intercapteurs notée d .

□ **Modèle sphérique sur une Antenne Linéaire Uniforme (ALU).**

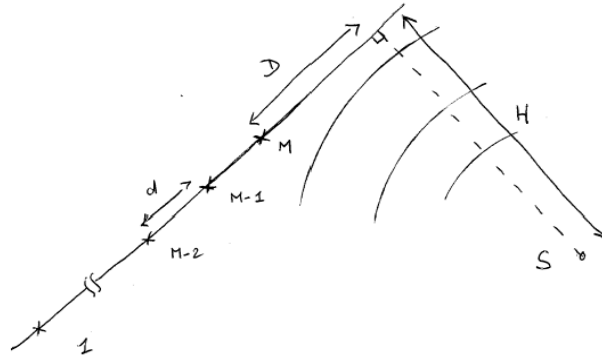


Figure 5.25 – Ondes à propagation sphérique illuminant une ALU.

On utilisera la modélisation suivante : la source S est située à une distance H de l'axe de l'antenne et on prend un capteur de référence à une distance D de la perpendiculaire vers la source. Dans ces conditions, le vecteur directionnel prend la forme :

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})^T = \left[\frac{1}{R_1} e^{-j2\pi f_0 R_1/c} \quad \dots \quad \frac{1}{R_M} e^{-j2\pi f_0 R_M/c} \right]$$

avec $R_m = \left(H^2 + (D + md)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ regroupe ici la hauteur H de la source à l'axe de l'antenne et la distance D à un capteur de référence : $\boldsymbol{\theta}^T = [D \quad H]$.

Remarque : Le vecteur directionnel $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$ est invariant par rotation autour de l'axe de l'antenne : ceci correspond à une ambiguïté sur la localisation des sources situées sur un cercle de rayon H , pour une antenne linéaire.

□ **Modèle plan sur une Antenne Linéaire Uniforme**

Lorsque R devient très grand devant les dimensions de l'antenne, le front d'onde devient plan, et le retard de propagation entre deux capteurs s'exprime comme

$$2\pi f_0 \tau_{ik} = \mathbf{r}_{ik}^+ \mathbf{k} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)^+ \mathbf{k}$$

avec \mathbf{k} le vecteur d'onde.

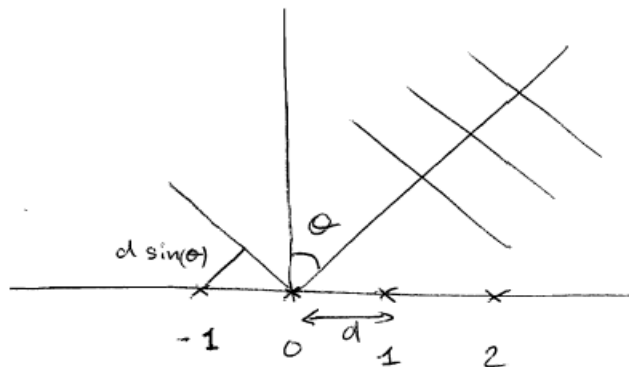


Figure 5.26 – Onde plane illuminant une ALU

Le paramètre $\boldsymbol{\theta}$ se réduit à l'azimut θ , et en notant τ le retard de propagation entre deux capteurs consécutifs, on a :

$$\tau = \frac{\mathbf{r}^+ \mathbf{k}}{2\pi f_0} = -\frac{d \sin \theta}{c},$$

ce qui correspond au temps mis par l'onde plane pour parcourir la distance $d \sin \theta$ à la vitesse c (le signe moins provient de la direction de \mathbf{k}).

Le vecteur directionnel peut alors s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta)^T &= \begin{bmatrix} 1 & e^{j2\pi f_0 \frac{d \sin \theta}{c}} & \dots & e^{j2\pi(M-1)f_0 \frac{d \sin \theta}{c}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & e^{j2\pi u(\theta)} & \dots & e^{j2\pi(M-1)u(\theta)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $u(\theta) = d \sin \theta / \lambda$.

Le vecteur $\mathbf{a}(\theta)$ est indépendant des effets de la propagation jusqu'au premier capteur. On ne pourra alors pas remonter à l'amplitude ou aux caractéristiques énergétiques des sources situées en θ , mais simplement remonter aux caractéristiques mesurées au niveau de l'antenne en provenance de la direction θ .

■ Illustrations

Nous illustrerons les différentes techniques présentées à l'aide des deux exemples suivants

- (A) Un signal résultant de la superposition de trois ondes planes, d'amplitudes respectives 2, 2 et 1, et d'angles d'incidence $\theta_1 = -20^\circ, \theta_2 = 38^\circ, \text{ et } \theta_3 = 40^\circ$.
- (B) Un signal résultant de la superposition de trois ondes à propagation circulaire, les trois sources, également d'amplitudes 2,2 et 1, étant caractérisées par les paramètres $[D, H]$ suivants : $[D_1, H_1] = [8, 35]d, [D_2, H_2] = [3, 40]d$ et $[D_3, H_3] = [-4, 14]d$, où d est la distance intercapteurs.

Dans les deux cas, on prend $d / \lambda = 1 / 4$.

2 L'imagerie d'un champ continu

L'imagerie consiste à étudier la répartition spatiale de telle ou telle propriété, en particulier la distribution spatiale d'intensité $I_s(\mathbf{n})$, dans la direction \mathbf{n} . Cela permet d'établir une cartographie du milieu. On trouve des applications en radar, sonar (cartographie sous-marine), astronomie.

■ Généralités

On débute avec la fonction d'intercorrélation :

$$\gamma(\mathbf{r}_{ik}) = E \left[x_i(t) x_k(t)^* \right]$$

entre les mesures $x_i(t)$ et $x_k(t)$ prises sur les capteurs positionnés en \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_k , et où $E[\bullet]$ désigne l'espérance mathématique.

Supposons que les capteurs soient identiques et de même gain sur la région D étudiée. De plus, on suppose que le signal est bande étroite et le modèle de propagation plan. Alors :

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{r}_{ik}) &= E \left[\int_D f(v_0) s(\mathbf{n}) e^{-j2\pi \mathbf{r}_i^+ \mathbf{n} / \lambda} d\mathbf{n} \int_D f(v_0)^* s(\mathbf{n}') e^{j2\pi \mathbf{r}_k^+ \mathbf{n}' / \lambda} d\mathbf{n}' \right] \\ &= \iint_D |f(v_0)|^2 E \left[s(\mathbf{n}) s(\mathbf{n}')^* \right] e^{-j2\pi (\mathbf{r}_i^+ \mathbf{n} - \mathbf{r}_k^+ \mathbf{n}') / \lambda} d\mathbf{n} d\mathbf{n}' \end{aligned}$$

Si le champ est incohérent, c'est-à-dire si $E[s(\mathbf{n})s(\mathbf{n}')^*] = I_s(\mathbf{n})\delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}')$ alors :

$$\gamma(\mathbf{r}_{ik}) = \int_D |f(v_0)|^2 I_s(\mathbf{n}) e^{-j2\pi\mathbf{r}_{ik}^+ \mathbf{n} / \lambda} d\mathbf{n}.$$

Ce lien entre la distribution d'intensité $I_s(\mathbf{n})$ et les corrélations $\gamma(\mathbf{r}_{ik})$ constitue un résultat connu comme le théorème de Van Cittert-Zernicke. Il indique que le lien entre $\gamma(\mathbf{r}_{ik})$ et $I_s(\mathbf{n})$ est une simple transformée de Fourier (inverse) multidimensionnelle. Ce résultat est bien sûr analogue au théorème de Wiener Kintchine en analyse spectrale qui indique que la densité spectrale de puissance et la fonction de corrélation forment une paire de transformée de Fourier.

Dès lors, la recherche de la distribution d'intensité $I_s(\mathbf{n})$ correspond à un problème d'estimation spectrale : à partir des échantillons de la fonction de corrélation spatiale, il s'agit de reconstruire la distribution d'intensité qui vérifie

$$I_s(\mathbf{n}) \propto \sum_{\mathbf{r}} \gamma(\mathbf{r}) e^{j2\pi\mathbf{r}^+ \mathbf{n} / \lambda}.$$

L'inversion directe, telle que fournie par la formule précédente, souffre du fait qu'il faut estimer la fonction d'autocorrélation spatiale $\gamma(\mathbf{r})$ à partir des données (erreurs d'estimation) ainsi que du fait que les dimensions limitées de l'antenne entraînent nécessairement un support fini de la fonction de corrélation calculée, ce qui limite alors la résolution.

Une autre solution pour estimer la puissance consiste à utiliser un filtre spatial $\mathbf{w}(\theta_0)$ afin d'isoler la portion de \mathbf{x} , $x(\theta_0)$, caractérisée par le paramètre θ_0 du modèle :

$$x(\theta_0) = \mathbf{w}(\theta_0)^+ \mathbf{x} = \sum_{k=1}^M w_k(\theta_0) x_k(t, f_0).$$

Ceci consiste ainsi à effectuer une combinaison linéaire des signaux recueillis sur chacun des capteurs, en choisissant les coefficients de pondération de manière à favoriser l'entrée de paramètre θ_0 . Ce principe est illustré sur la figure 5.27

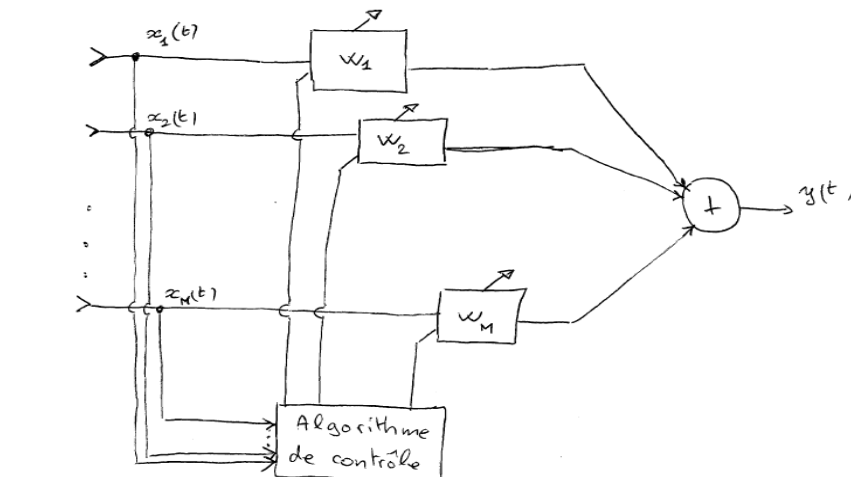


Figure 5.27 – Traitement d'antenne par filtrage spatial

La puissance en sortie du filtre spatial s'écrit :

$$E[|x(\theta_0)|^2] = E[|\mathbf{w}(\theta_0)^+ \mathbf{x}|^2] = \mathbf{w}(\theta_0)^+ E[\mathbf{x}\mathbf{x}^+] \mathbf{w}(\theta_0) = \mathbf{w}(\theta_0)^+ \mathbf{R}_x \mathbf{w}(\theta_0)$$

avec \mathbf{R}_x la matrice de corrélation des observations.

Dans le cas d'un champ continu, on a vu que

$$\mathbf{x} = \int s(\boldsymbol{\theta})\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}$$

on obtient

$$E\left[|x(\boldsymbol{\theta}_0)|^2\right] = \int I_s(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}_0)^+\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})|^2 d\boldsymbol{\theta}$$

en supposant à nouveau le champ incohérent, et le bruit centré.

On constate que cette puissance sera d'autant plus proche de $I_s(\boldsymbol{\theta}_0)$ que $\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}_0)^+\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$ sera sélectif : si $|\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}_0)^+\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})|^2 \propto \delta(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)$ alors $E\left[|x(\boldsymbol{\theta}_0)|^2\right] \propto I_s(\boldsymbol{\theta}_0)$. Il convient donc de bien choisir le filtre spatial, en relation avec le modèle de réception $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$. La section suivante présente un premier exemple de filtrage spatial, avec la formation de voies, et nous examinerons ensuite le filtre spatial associé à la méthode de Capon.

▪ La formation de voies

La technique de formation de voies vise à estimer la puissance émise pour une valeur particulière du paramètre $\boldsymbol{\theta}$.

L'idée de la formation de voies est de sommer les contributions recueillies sur les différents capteurs de manière constructive, et d'augmenter ainsi le rapport signal-à-bruit. On introduit ainsi une série de gains ajustables, qui servent à privilégier une composante du signal (caractérisée par un paramètre $\boldsymbol{\theta}$): on parle alors d'orientation électronique. On balaie ensuite les différentes valeurs possibles du paramètre pour reconstituer une carte de la distribution de puissance.

Considérons le cas d'une seule source de paramètre $\boldsymbol{\theta}_0$. Les observations correspondantes sont $\mathbf{x} = s\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathbf{b}$, où le vecteur \mathbf{b} collecte les contributions du bruit sur les différents capteurs ; on suppose que le bruit est blanc spatialement, c'est-à-dire décorrélé de capteur à capteur et de puissance σ_b^2 . On combine alors les observations recueillies sur les différents capteurs par $\mathbf{w}^+\mathbf{x} = s\mathbf{w}^+\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_0) + \mathbf{w}^+\mathbf{b}$. La puissance en sortie du filtre spatial \mathbf{w} s'écrit alors

$$\sigma_{FV} = E\left[|s|^2\right]|\mathbf{w}^+\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_0)|^2 + |\mathbf{w}|^2\sigma_b^2.$$

Dans ces conditions, il est facile de constater que le rapport signal-à-bruit :

$$r = \frac{E\left[|s|^2\right]|\mathbf{w}^+\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_0)|^2}{|\mathbf{w}|^2\sigma_b^2}$$

est maximum lorsque \mathbf{w} est colinéaire au vecteur directionnel $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_0)$: $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_0) = \lambda\mathbf{w}$. Comme ceci doit être prolongé pour chaque paramètre $\boldsymbol{\theta}$ possible, on prendra donc \mathbf{w} comme une fonction de $\boldsymbol{\theta}$; $\lambda\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$. On choisit généralement la normalisation pour que la puissance d'un bruit blanc en entrée ne soit pas modifiée : si on prend un bruit blanc en entrée de matrice de corrélation $\mathbf{R}_x = \sigma_b^2\mathbf{I}$, avec \mathbf{I} la matrice identité, on a $\sigma_{FV}(\boldsymbol{\theta}) = E\left[|x(\boldsymbol{\theta})|^2\right] = \mathbf{w}(\boldsymbol{\theta})^+\mathbf{R}_x\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma_b^2\lambda^2\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})^+\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma_b^2$, ce qui fournit λ^2 , et :

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})^+\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}}.$$

La puissance en sortie de la formation de voies devient :

$$E \left[|x(\theta)|^2 \right] = \mathbf{w}(\theta)^+ \mathbf{R}_x \mathbf{w}(\theta) = \frac{\mathbf{a}(\theta)^+ \mathbf{R}_x \mathbf{w}(\theta)}{\mathbf{a}(\theta)^+ \mathbf{a}(\theta)}$$

On notera ainsi que la technique de formation de voies peut s'appliquer quel que soit le modèle de propagation : il suffit de connaître l'expression du vecteur directionnel.

Dans le cas d'un modèle plan, la formation de voie consiste simplement à compenser les retards de propagations entre les différents capteurs, en ajustant des déphasages par l'intermédiaire de gains sur chaque voie de manière à effectuer une sommation constructive du signal d'intérêt.

En pratique, la puissance sera estimée de la manière suivante : filtrage, quadrature, intégration. Ceci est illustré sur la figure 5.28.

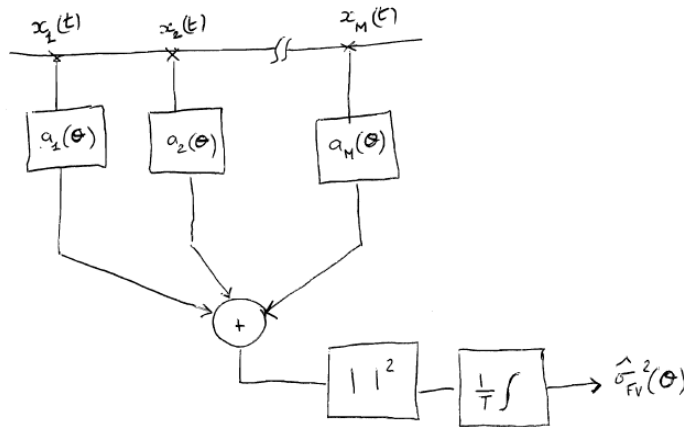


Figure 5.28 – Principe de la formation de voies.

Les signaux recueillis à la sortie de chacun des capteurs sont affectés d'un gain, puis sommés. La puissance est ensuite estimée par quadrature puis intégration temporelle.

Considérons maintenant le cas particulier d'un modèle de propagation par ondes planes et d'une antenne linéaire uniforme.

Dans ce cas, on a :

$$\mathbf{w}^+ = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[1 \quad e^{-j2\pi u(\theta_0)} \quad \dots \quad e^{-j2\pi(M-1)u(\theta_0)} \right],$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{FV}^2(\theta) &= \frac{1}{M} E \left[\left| \mathbf{a}(\theta)^+ \mathbf{x} \right|^2 \right] = \frac{1}{M} E \left[\left| \sum_{m=1}^M x(m) e^{-j2\pi m u(\theta)} \right|^2 \right] \\ &= \frac{1}{M} E \left[\sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M x(m_1) x(m_2)^* e^{-j2\pi(m_1-m_2)u(\theta)} \right] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M \gamma_x(m_1-m_2) e^{-j2\pi(m_1-m_2)u(\theta)} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=-M+1}^{M-1} (M-|m|) \gamma_x(m) e^{-j2\pi m u(\theta)} \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\sigma_{FV}^2(\theta) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} g(m)\gamma_x(m)e^{-j2\pi mu(\theta)},$$

avec $g(m)$ la fonction d'autocorrélation du réseau et $\gamma_x(m)$ la séquence de corrélation des observations. On reconnaît dans cette dernière relation l'expression d'une transformée de Fourier, où $u(\theta)$ joue le rôle d'une fréquence spatiale normalisée. Ainsi, la formation de voies correspond à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation, **apodisée** par une fenêtre de Bartlett (fenêtre triangulaire). Lorsque la fonction d'autocorrélation spatiale $\gamma_x(m)$ est estimée à partir des données, on obtient alors un simple périodogramme : si la matrice de corrélation \mathbf{R}_x est estimée par un **moyennage** sur K réalisations \mathbf{x}_k ,

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^+$$

alors la puissance correspondante vaut

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{FV}^2 &= \mathbf{w}(\theta)^+ \hat{\mathbf{R}}_x \mathbf{w}(\theta) = \frac{1}{MK} \sum_{k=1}^K \left| \mathbf{a}(\theta_0)^+ \mathbf{x}_k \right|^2 \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{M} \left| \sum_{m=1}^M x_k(m) e^{-j2\pi mu(\theta)} \right|^2 \end{aligned}$$

et prend exactement la forme d'un périodogramme moyenné.

Le calcul de la puissance théorique σ_{FV}^2 en sortie de la formation de voies nous montre qu'elle s'exprime comme la transformée de Fourier du produit $g(m)\gamma_x(m)$. Ainsi, la puissance s'exprimera aussi comme le produit de convolution de la transformée de la fenêtre et de la distribution d'intensité I_s (à un terme de bruit près) :

$$\sigma_{FV}^2(\theta) = G(u(\theta)) * I_s(u(\theta)) + \sigma_b^2(u(\theta)),$$

avec

$$G(u(\theta)) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin(\pi Mu(\theta))}{\sin(\pi u(\theta))} \right)^2.$$

Pour une source ponctuelle, équivalente à une « impulsion » dans le domaine spatial, par exemple dans la direction θ_0 , on a $I_s(u(\theta)) = \sigma_s^2 \delta(u(\theta) - u(\theta_0))$, et, en l'absence de bruit,

$$\sigma_{FV}^2(\theta) = G(u(\theta)) * I_s(u(\theta)) = \sigma_s^2 G(u(\theta) - u(\theta_0)).$$

Ainsi, la fonction $G(u(\theta))$ correspond à la réponse du réseau à une impulsion, et exhibe une limitation en résolution, liée à la largeur du lobe principal de $G(u(\theta))$. D'autre part, les lobes secondaires, importants, collectent de la puissance hors de la direction visée. La fonction $G(u(\theta))$ définit alors le diagramme de directivité de l'antenne.

La figure 5.29 représente la fonction $G(u(\theta))$ en fonction de $u(\theta)$: le lobe principal est d'autant plus large que l'antenne est courte et la résolution en $u(\theta)$ varie en $1/M$; la résolution en fréquences spatiales varie pour sa part en $1/Md$, c'est-à-dire en 1 sur la dimension de l'antenne formée par le réseau de capteurs. Cette résolution est la résolution de Fourier, et nous avons vu que la formation de voie s'interprète comme une méthode de Fourier. Pour accroître cette capacité de résolution, il n'y a guère d'autre moyen que d'augmenter le nombre de capteurs ou la distance intercapteurs d .

Il sera aussi possible, comme on le verra plus loin, d'envisager d'autres méthodes, à super ou à haute résolution.

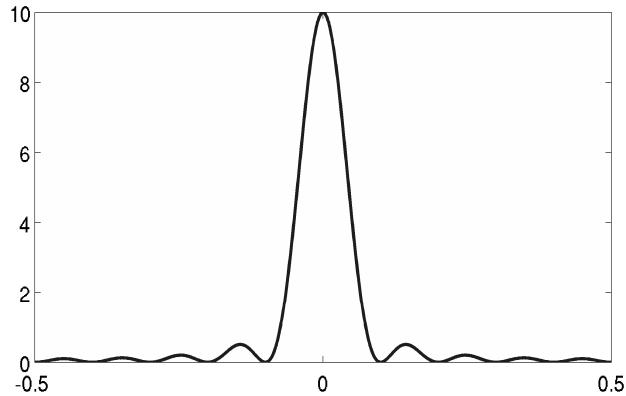


Figure 5.29 – Diagramme directivité en fréquences spatiales normalisées $u(\theta)$, avec $M = 10$.

Il est possible de pondérer cette formation de voie de manière à obtenir un diagramme de directivité avec des lobes secondaires plus bas, mais au détriment d'un élargissement du lobe principal.

Le traitement par formation de voies est ainsi caractérisé par son diagramme de directivité, fixé pour chaque direction d'arrivée.

▪ **Illustrations**

Considérons pour commencer le cas (A) de la somme de trois contributions de sources situées en -20° , 38° et 40° . La figure 5.30 donne le résultat obtenu avec $M = 10$. On observe que les sources ponctuelles sont très étalées, et qu'il est absolument impossible de séparer les sources en 38° et 40° .

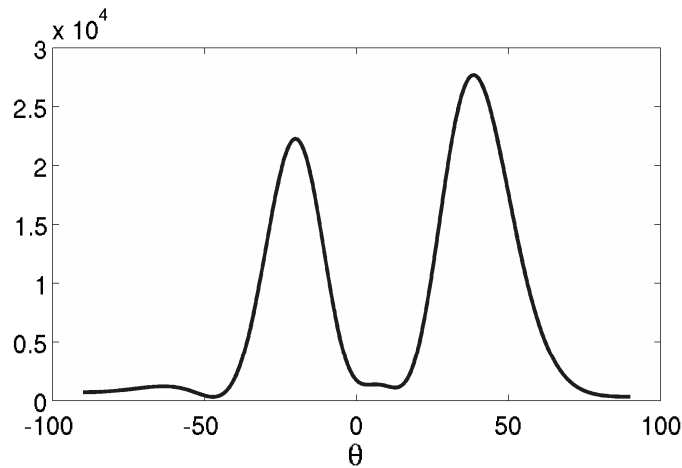


Figure 5.30 – Sortie de la formation de voies dans l'exemple (A), avec $M = 10$.

La largeur, en $u(\theta)$, de la fonction $G(u(\theta))$ est en $1/M$. Aussi, on pourra résoudre les deux sources si $u(\theta_3) - u(\theta_2) \geq 1/M$, ce qui fournit $M \geq \lambda / (d(\sin(\theta_3) - \sin(\theta_2)))$, soit $M \geq 148$. La figure 5.31 fournit le résultat obtenu pour $M = 200$: on observe que cette fois-ci les sources sont bien séparées, mais bien sûr au prix d'un nombre important de capteurs.

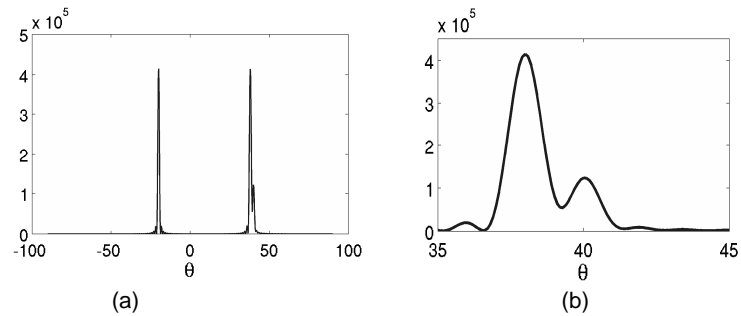


Figure 5.31 - Sortie de la formation de voies dans l'exemple (A), avec $M = 200$.
Sortie complète (a) et détail (b).

Considérons maintenant le cas du modèle de propagation circulaire, exemple (B). La technique de formation de voies est bien sûr applicable, avec l'expression du vecteur directionnel correspondant à la paramétrisation que nous avons donnée dans ce cas. Il s'agit alors de calculer la puissance en sortie du filtre spatial, en parcourant une grille de valeurs $[D, H]$ possibles. Les maxima du résultat donnent alors les sources. Le résultat obtenu ainsi avec $M = 100$ précédemment, la localisation des sources lorsqu'on augmente le nombre de capteurs

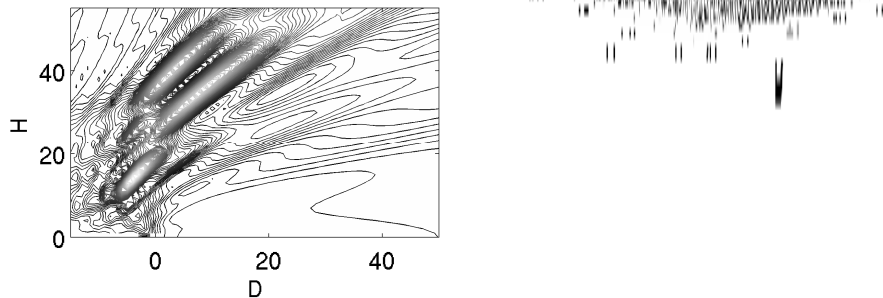


Figure 5.32 – Sortie de la formation de voies pour un modèle circulaire, avec $M = 100$.

À l'issue de cette section, nous pouvons retenir qu'il est possible de construire une antenne synthétique à partir d'un réseau de capteurs, chaque capteur du réseau n'ayant pas nécessairement de propriétés de directivité. C'est le traitement des signaux recueillis sur les capteurs qui permet de transformer un réseau inerte en une antenne. Plus encore, la modification des coefficients du filtre spatial $w(\theta)$ permet d'orienter électroniquement l'antenne, de manière similaire à l'orientation mécanique d'une antenne standard. Le diagramme de directivité de l'antenne obtenue est lié à la forme du réseau (nous n'avons ici considéré qu'une antenne linéaire) et au nombre de capteurs le composant. D'autres techniques de traitement du signal permettent d'améliorer les performances en résolution.

- **La méthode de Capon**

Du fait de la limitation en résolution et de la présence des lobes secondaires importants, des sources situées en dehors de la direction d'intérêt ou plus généralement pour un paramètre θ différent, peuvent « renvoyer » de la puissance et ainsi corrompre les mesures, voire même masquer des sources de faible puissance. La méthode introduite par Capon permet de tenir compte de l'ensemble des sources présentes pour pallier à la limitation en résolution de la formation de voies et réduire l'amplitude des lobes secondaires : c'est

une méthode adaptative. Le filtre spatial est ajusté afin d'orienter l'antenne tout en minimisant la contribution des sources qui ne sont pas situées dans la direction scrutée.

On cherche donc à *minimiser la puissance globale* recueillie pour le paramètre θ :

$$\sigma^2(\theta) = E[\mathbf{w}(\theta)^+ \mathbf{x}] = \mathbf{w}(\theta)^+ E[\mathbf{x}^+ \mathbf{x}] \mathbf{w}(\theta) = \mathbf{w}(\theta)^+ \mathbf{R}_x \mathbf{w}(\theta),$$

avec \mathbf{R}_x la matrice d'autocorrélation, sans modifier la puissance dans la direction visée. Ce desideratum s'écrit sous la forme de la contrainte :

$$\mathbf{w}(\theta)^+ \mathbf{a}(\theta) = 1,$$

ce qui signifie simplement que l'on impose un gain unitaire dans la direction θ . Par suite, la méthode sélectionnera un filtre spatial $\mathbf{w}(\theta)$ qui minimisera nécessairement la puissance renvoyée en θ par les « brouilleurs ».

On écrit alors le Lagrangien correspondant à ce problème de minimisation sous contrainte :

$$L(\mathbf{w}(\theta); \lambda) = \mathbf{w}(\theta)^+ \mathbf{R}_x \mathbf{w}(\theta) - \lambda (\mathbf{w}(\theta)^+ \mathbf{a}(\theta) - 1).$$

Le minimum de $L(\mathbf{w}(\theta); \lambda)$ suivant le premier argument est atteint pour $\mathbf{w}(\theta)$ tel que :

$$\frac{\partial L(\mathbf{w}(\theta); \lambda)}{\partial \mathbf{w}(\theta)} = 2\mathbf{R}_x \mathbf{w}(\theta) - \lambda \mathbf{a}(\theta) = \mathbf{0},$$

soit

$$\mathbf{w}(\theta) = \frac{\lambda}{2} \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta).$$

La contrainte $\mathbf{w}(\theta)^+ \mathbf{a}(\theta) = 1$ fournit alors :

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^+ \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta)}$$

soit finalement :

$$\mathbf{w}(\theta) = \frac{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}(\theta)^+ \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta)}.$$

Le spectre de Capon correspondant est quant à lui :

$$\sigma_{CAP}^2 = \mathbf{w}(\theta)^+ \mathbf{R}_x \mathbf{w}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^+ \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta)}.$$

Le filtre est adaptif à la direction visée et prend en compte l'ensemble de l'environnement, par l'intermédiaire de la matrice de corrélation, afin de minimiser les contributions des brouilleurs. Ce traitement est aussi caractérisé par un pouvoir de résolution dépendant du rapport signal-à-bruit ; plus le RSB est élevé, meilleure est la résolution.

La technique mise en œuvre dans la méthode de Capon peut-être étendue au cas où l'on souhaite prendre en compte plus de contraintes. Typiquement, on pourra rechercher non seulement à assurer un gain unité dans la direction d'intérêt, mais aussi d'imposer un gain nul dans les directions de brouilleurs connus. On introduit ainsi une matrice de contrainte \mathbf{C} et un tel que $\mathbf{C}^+ \mathbf{w}(\theta) = \mathbf{c}$. Un exemple simple est le cas où l'on veut annuler un brouilleur dans une direction prédéterminée θ_b , soit $\mathbf{a}(\theta_b)^+ \mathbf{w}(\theta) = 0$, en

plus de la condition $\mathbf{a}(\theta)^+ \mathbf{w}(\theta) = 1$. Dans ce cas on a $\mathbf{C} = [\mathbf{a}(\theta) \quad \mathbf{a}(\theta_b)]$ et $\mathbf{c} = [1 \quad 0]^T$. On cherche comme précédemment à minimiser la puissance globale $\sigma^2(\theta) = \mathbf{w}(\theta)^+ \mathbf{R}_x \mathbf{w}(\theta)$ sous la contrainte $\mathbf{C}^+ \mathbf{w}(\theta) = \mathbf{c}$. La résolution conduit alors à la solution

$$\mathbf{w}(\theta) = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^+ \mathbf{R}_x \mathbf{C})^{-1} \mathbf{c}$$

qui se réduit à la formule de Capon standard lorsque $\mathbf{C} = \mathbf{a}(\theta)$ et $\mathbf{c} = 1$. Notons qu'il est possible de calculer le filtre de Capon $\mathbf{w}(\theta)$ de manière itérative (par un algorithme de minimisation de type gradient), afin de réduire la charge en calcul.

■ Illustrations

Pour l'exemple (A) du modèle plan, avec trois sources situées en -20° , 38° et 40° , on obtient les résultats présentés sur la figure 5.33, avec $M = 10$. Ces résultats sont équivalents à ceux obtenus pour la formation de voies, mais avec 200 capteurs !

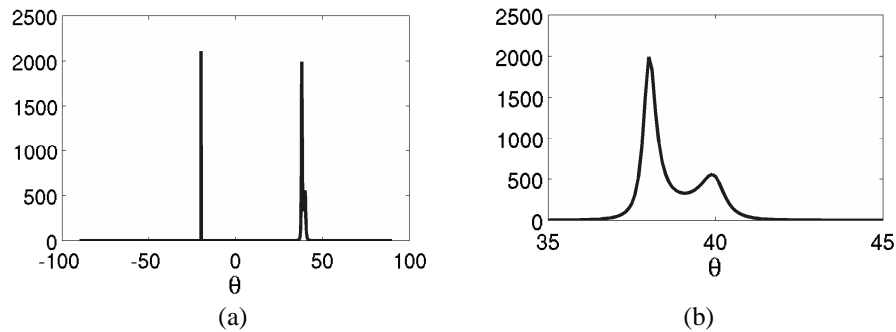


Figure 5.33 – Sortie de la méthode de Capon dans l'exemple (A), avec $M = 10$. Sortie complète et détail.

Dans le cas du modèle circulaire, exemple (B), les performances sont également meilleures qu'avec la simple formation de voies. La figure 5.34 fournit les résultats avec 15 capteurs.

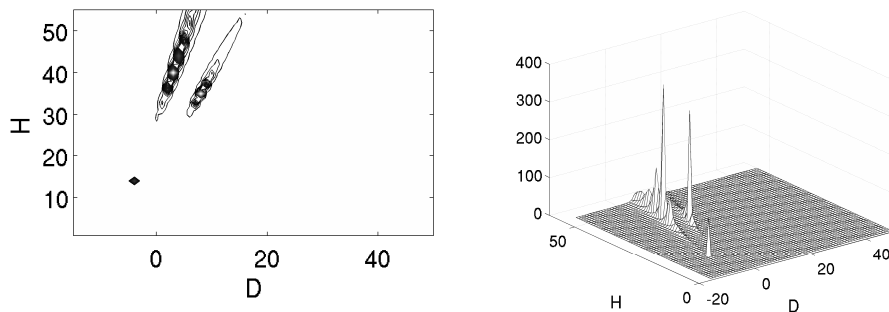


Figure 5.34 – Sortie de la méthode de Capon dans l'exemple (B), avec $M = 15$.

■ Filtrage

Pour terminer cette section, nous présenterons une application de filtrage spatial. Dans l'exemple (A), on suppose que les amplitudes sont maintenant variables : on prend un bruit en -20° et un autre en 40° et un signal binaire est émis par la source située en 38° . On suppose que la fréquence porteuse est suffisamment haute pour que l'hypothèse bande étroite soit vérifiée. Les trois sources illuminent l'antenne. On mesure donc sur chacun des capteurs un

mélange, avec différents déphasages, des signaux émis par les trois sources. La figure 5.35 donne ainsi le signal recueilli sur le premier capteur.

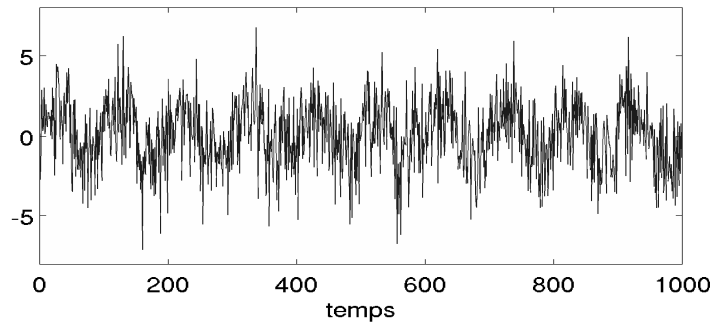


Figure 5.35 – Signal temporel recueilli sur le premier capteur (mélange de deux bruits et d'un train d'impulsions).

On utilise alors le filtre spatial de la méthode de Capon, orienté dans la direction 38° et on observe la sortie de la somme pondérée des signaux recueillis sur les capteurs. Le résultat est rapporté sur la figure 5.36 : on est capable d'extraire du mélange le signal binaire, avec une faible interférence résiduelle, essentiellement liée à l'émission proche en 40° . De telles applications du filtrage spatial sont maintenant mises en œuvre dans le cadre des communications cellulaires, en équipant les stations de plusieurs antennes de réception, ce qui permet de focaliser sur certains utilisateurs, et ainsi d'augmenter la capacité du système.

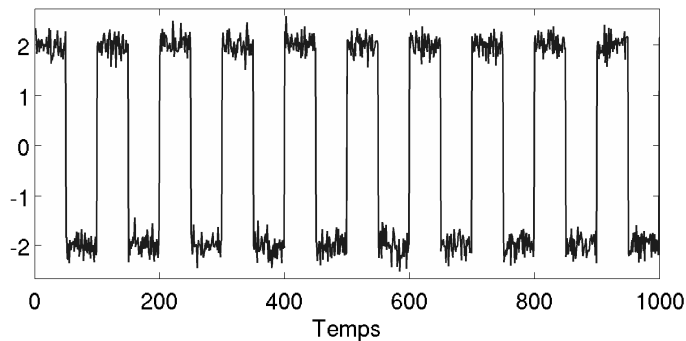


Figure 5.36 - Signal temporel obtenu après filtrage spatial de Capon dans la direction 38° .

▪ Prédiction linéaire

On a noté que sous l'hypothèse d'ondes planes et d'antenne linéaire uniforme, le problème de reconstruction de la distribution d'intensité est équivalent à un problème d'estimation spectrale. Il est donc possible d'utiliser les méthodes paramétriques standard appliquées en analyse spectrale, et notamment les méthodes autorégressives (AR). On sait que ces méthodes qui reposent sur un modèle paramétrique de la densité spectrale de puissance permettent d'aller au-delà de la limite de résolution de Fourier.

Rappelons ici simplement que l'idée est d'utiliser un modèle paramétrique de la densité spectrale et d'estimer les paramètres de ce modèle. Parmi les différentes familles possibles, le modèle AR est particulièrement utilisé, car les paramètres AR $\alpha^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_q]$ sont obtenus en résolvant système linéaire :

$$\mathbf{R}_x \alpha = \sigma^2 \mathbf{e}$$

avec \mathbf{R}_x la matrice de corrélation, $\mathbf{e}^+ = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ et $\mathbf{a}^+ \mathbf{e} = 1$.

Enfin, le spectre AR s'exprime alors comme :

$$\sigma_{AR}^2(\theta) = \frac{\sigma^2}{\left| \sum_{k=1}^q \alpha_k e^{-j2\pi k u(\theta)} \right|^2}.$$

3 Méthodes sous l'hypothèse de sources ponctuelles

Bien que les méthodes présentées précédemment soient toujours applicables, et disposent d'une certaine robustesse, lorsque le champ est composé d'un ensemble de sources ponctuelles, il est possible d'utiliser des méthodes spécifiques très performantes. Ces méthodes sont dites à haute résolution.

Pour P de sources ponctuelles, on a :

$$s(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{p=1}^P s_p \delta(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_p).$$

Dans ce cas, le vecteur d'observation recueilli sur le réseau de capteurs s'écrit :

$$\mathbf{x} = \sum_{p=1}^P s_p \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_p) + \mathbf{b}$$

où $\boldsymbol{\theta}_p$ est le paramètre du modèle correspondant à la position $\boldsymbol{\sigma}_p$.

Cette dernière relation indique que l'observation non bruitée appartient à un espace vectoriel de dimension P (si les vecteurs $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_p)$ sont linéairement indépendants, ce qui est raisonnable). Cette remarque fondamentale est à l'origine des méthodes à haute résolution.

Le vecteur des observations peut également s'exprimer comme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{b},$$

avec $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_1) \ \cdots \ \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_M)]$ et $\mathbf{s} = [s_1 \ \dots \ s_p]$.

La matrice de corrélation $\boldsymbol{\Gamma}_x$ des observations s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^+] &= \mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{s}\mathbf{s}^+] \mathbf{A}^+ + \mathbb{E}[\mathbf{b}\mathbf{b}^+] \\ \boldsymbol{\Gamma}_x &= \mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}_s \mathbf{A}^+ + \boldsymbol{\Gamma}_b = \boldsymbol{\Gamma}_y + \boldsymbol{\Gamma}_b \end{aligned}$$

avec des notations évidentes.

La matrice $\boldsymbol{\Gamma}_s$, de dimension $P \times P$ est de rang P , si le nombre de capteurs est supérieur à P .

La matrice $\boldsymbol{\Gamma}_y$ est également de rang P et son noyau est de dimension $(M-P)$. Cette matrice, la matrice de corrélation de l'observation non bruitée, peut être décomposée en éléments propres selon :

$$\boldsymbol{\Gamma}_y = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^+$$

où \mathbf{U} est la matrice des vecteurs propres et $\boldsymbol{\Lambda}$ la matrice diagonale des valeurs propres. Les P premiers vecteurs propres définissent l'espace signal et les $M-P$ suivants l'espace bruit. Les matrices de corrélation étant définies non négatives, toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. La matrice des vecteurs propres, \mathbf{U} est unitaire, et vérifie ainsi $\mathbf{U}\mathbf{U}^+ = \mathbf{I}_M$.

Lorsque le bruit est spatialement blanc, $\boldsymbol{\Gamma}_b$ est de la forme $\boldsymbol{\Gamma}_b = \sigma^2 \mathbf{I}_M$, avec \mathbf{I}_M la matrice identité de dimension $M \times M$. On peut alors écrire $\boldsymbol{\Gamma}_x$ sous la forme :

$$\Gamma_x = \Gamma_y + \Gamma_b = \Gamma_y = U\Lambda U^+ + \sigma^2 U U^+,$$

ou encore

$$\Gamma_x = U(\Lambda + \sigma^2 \mathbf{I}_M)U^+.$$

Ceci fournit la décomposition en éléments propres de Γ_x , qui montre que les vecteurs propres sont inchangés, et que les valeurs propres sont augmentées de σ^2 . Les valeurs propres correspondant à un « espace bruit », qui étaient nulles, valent maintenant σ^2 .

Par contre, si le bruit est corrélé, il est nécessaire de soustraire à Γ_x une estimée Γ_b de la matrice de corrélation du bruit.

La remarque fondamentale est alors que les sous-espaces « signal » et « bruit » sont orthogonaux. Tout vecteur \mathbf{v}_b de l'espace bruit est ainsi orthogonal à un vecteur de l'espace signal. Or l'espace signal est engendré par les P vecteurs directionnels $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_i)$. On a donc :

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_i)^+ \mathbf{v}_b = 0.$$

Dès lors, il suffit de sélectionner un ou plusieurs vecteurs du sous-espace bruit pour tester cette orthogonalité pour tous les paramètres $\boldsymbol{\theta}$. Pour cela, plutôt que de rechercher les passages par zéro du produit scalaire $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_i)^+ \mathbf{v}_b$ on peut utiliser la fonction de détection, ou de discrimination :

$$d(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{|\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_i)^+ \mathbf{v}_b|^2}$$

qui est maximale (infinie) lorsque $\boldsymbol{\theta}$ prend pour valeur l'un des vecteurs paramètres des sources. En pratique, la fonction de détection est seulement maximale (et non infinie) au voisinage des solutions.

Bien sûr, il est nécessaire de connaître le nombre de sources, qui définit la dimension de l'espace signal, et partant, de l'espace bruit. Ce nombre n'est le plus souvent pas connu, mais doit être déterminé à partir des données. Une méthode simple est la suivante : on a vu qu'en présence de bruit blanc, les valeurs propres sont augmentées de σ^2 . Comme les valeurs propres initiales sont positives (la matrice de corrélation est définie non négative), les valeurs propres de l'espace bruit sont les plus faibles et égales à σ^2 . Il suffit donc de rechercher les M-P valeurs propres les plus faibles qui soient toutes égales à une même valeur. En pratique, on n'obtient pas un plancher de valeurs toutes égales entre elles, mais les valeurs propres sont toujours légèrement décroissantes ; on recherche donc plutôt une rupture de pente des valeurs propres classées par ordre décroissant. D'autres techniques fondées sur les critères AIC ou MDL peuvent également être utilisées.

Lorsque les deux sous-espaces sont définis, il reste à choisir un vecteur \mathbf{v}_b du sous-espace bruit. Ce choix, arbitraire, donne lieu à plusieurs variantes.

- **Le vecteur orthogonal**

On peut choisir comme représentant une combinaison linéaire particulière de tous les vecteurs du sous-espace bruit.

Tufts et Kumaresan ont préconisé de choisir un vecteur de norme minimale, car celle-ci conduit à une estimée de variance minimale. Cette méthode est aussi appelée MIN-NORM.

On sélectionne ainsi la solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \min \mathbf{v}^+ \mathbf{v} & \text{norme minimale} \\ \text{avec } \mathbf{\Pi} \mathbf{v} = \mathbf{v} & \mathbf{v} \text{ appartient au sous espace bruit} \\ \text{et } \mathbf{v}^+ \mathbf{e} = 1 & 1^{\text{ere}} \text{ composante à 1} \end{cases}$$

où l'on a utilisé $\mathbf{\Pi} = \sum_{i=P+1}^M \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^+$ avec \mathbf{v}_i les vecteurs propres du sous-espace bruit, et $\mathbf{e}^+ = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$. Le Lagrangien du problème de minimisation s'écrit :

$$L(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{v}^+ \mathbf{v} + \lambda (\mathbf{v}^+ \mathbf{e} - 1).$$

En tenant compte de $\mathbf{v}^+ \mathbf{e} = \mathbf{v}^+ \mathbf{\Pi} \mathbf{e}$, on obtient $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{\Pi} \mathbf{e} / 2$, et la vérification de la contrainte $\mathbf{v}^+ \mathbf{e} = 1$ conduit à

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{\Pi} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^+ \mathbf{\Pi} \mathbf{e}}.$$

▪ Le projecteur orthogonal, ou goniomètre, ou MUSIC

Dans cette célèbre méthode introduite indépendamment par Schmidt (1979) sous l'acronyme de MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) et Bienvenu et Kopp (1980) sous le nom de goniomètre, on utilise l'ensemble des vecteurs du sous-espace bruit pour tester l'orthogonalité :

$$\sum_{i=P+1}^M |\mathbf{v}_i^+ \mathbf{a}(\theta)|^2 = 0.$$

En introduisant à nouveau une fonction de détection on a :

$$d(\theta) = \frac{1}{\sum_{i=P+1}^M |\mathbf{v}_i^+ \mathbf{a}(\theta)|^2} = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^+ \mathbf{\Pi} \mathbf{a}(\theta)}$$

Dans le cas d'une antenne rectiligne uniforme et d'un modèle de propagation par ondes planes, le vecteur directionnel est de la forme :

$$\mathbf{a}(\theta)^T = [1 \ e^{j2\pi u(\theta)} \ \dots \ e^{j2\pi(M-1)u(\theta)}]$$

On peut alors donner une solution explicite à la relation d'orthogonalité, puisque :

$$\mathbf{a}(\theta)^+ \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{M-1} v_i z^{-i} = 0$$

pour les $z_k = e^{j2\pi u(\theta_k)}$ correspondant à des sources, et avec \mathbf{v} un vecteur du sous-espace bruit.

Ainsi il suffit de rechercher les P racines d'un polynôme de degré M (on retient les racines de module 1), pour en déduire les valeurs des paramètres θ des P sources. Ceci s'étend bien sûr au cas d'une combinaison des vecteurs du sous-espace bruit, et si on recherche par exemple les racines du polynôme $[1 \ z \ \dots \ z^{M-1}] \mathbf{\Pi} [1 \ z \ \dots \ z^{M-1}]^+$ associé à MUSIC, on obtient la méthode Root-MUSIC.

Dans le cas où le sous-espace bruit est de dimension 1, soit $M = P + 1$, la méthode du vecteur orthogonal est la même que celle du projecteur, et est appelée Méthode de Pisarenko (1973).

▪ **Illustrations**

Pour le modèle plan, exemple (A), on obtient les résultats présentés sur la figure 5.37, avec $M = 10$.

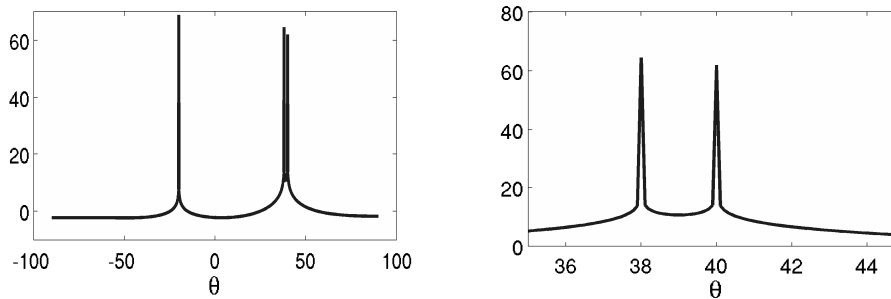


Figure 5.37 - Sortie de la méthode MUSIC pour l'exemple (A), avec $M = 10$.
Sortie complète et détail.

Pour l'exemple (B), la méthode MUSIC est également applicable, en prenant pour vecteur directionnel $\mathbf{a}(\theta)$ l'expression obtenue pour le modèle de propagation par ondes circulaires. Les résultats correspondants sont donnés figure 5.38. On obtient une très bonne localisation, mais au prix, il est vrai, d'une complexité accrue ainsi que d'une sensibilité aux hypothèses.

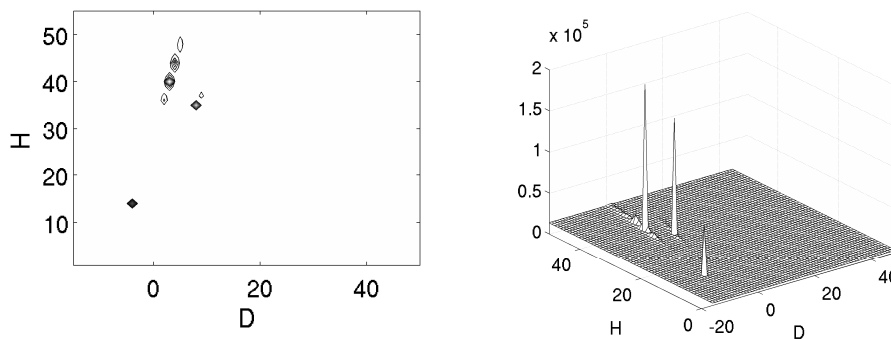


Figure 5.38 - Sortie de la méthode MUSIC pour l'exemple (B), avec $M = 15$.

Bibliographie

Monzingo, R. A., Miller T. W. – *Introduction to Adaptive Arrays*. Raleigh, SciTech Publishing, Inc. , 2004.

Weiner M. M. – *Adaptive Antennas and Receivers*. Boca Raton, CRC Press, 2005.

Haykin, S. – *Array Signal Processing*. New York, Prentice Hall, 1985.

Compton Jr., R.T. – *Adaptive Antennas: Concepts and Performances*. New York, Prentice Hall, 1988.

Godara, L. C. – *Smart antennas*. Boca Raton, CRC Press, 2004.

Van Trees H. L. – *Optimum Array Processing*, New York, John Wiley & Sons, 2002.