J.-F. BERCHER
ESIEE

LA TRANSFORMÉE EN Z et SES PROPRIÉTÉS

Nous avons vu que les transformées de Laplace et Fourier permettent l'analyse des systèmes et signaux à temps continu. Notamment, ces transformées permettent, d'une part d'effectuer un calcul symbolique (résolution des éqs. différentielles), et d'autre part donnent un éclairage complémentaire à la simple représentation en forme d'onde.

Après quelques rappels sur l'échantillonnage et les signaux à temps discret, nous examinerons comment on peut passer de la transformée de Laplace à la transformée en z, qui jouera un rôle analogue pour les signaux à t.d. (analogue, mais pas identique!) On définira ensuite une transformée de Fourier adaptée aux signaux à t.d comme restriction de la TZ.
Nous nous attarderons ensuite sur les principales propriétés de la TZ en examinant certaines de leurs implications. Enfin, nous discuterons des méthodes d'inversion de la TZ, c'est-à-dire des méthodes de retour au domaine temporel (discret) à partir du domaine en z.

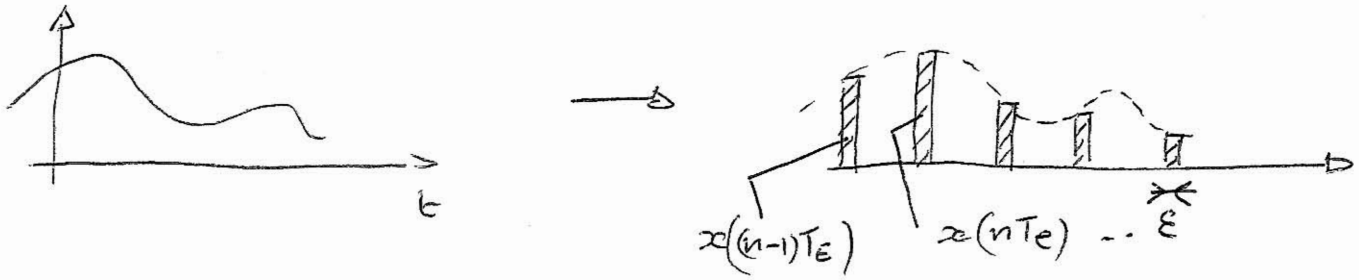
1. Échantillonnage.

Même si tous les signaux discrets ne résultent pas d'un échantillonnage (il existe des signaux intrinsèquement à temps discret), la plupart des signaux que nous rencontrerons pourront être vus comme résultant de l'échantillonnage (ou du traitement de ceux-ci).

On définit un signal discret comme la collection des amplitudes du signal à des instants bien précis, les instants d'échantillonnage :

$$x_D(n) = x(t = nT_E) \qquad n = -\infty \ldots +\infty$$

Il est alors commode de se représenter un signal échantillonné comme une suite d'impulsions modulées par les valeurs du signal aux instants nT_E. Plus exactement, on supposera que ces impulsions sont de surface $x_D(n) = x(nT_e)$. [On imaginera que le signal a été intégré sur un temps ε].

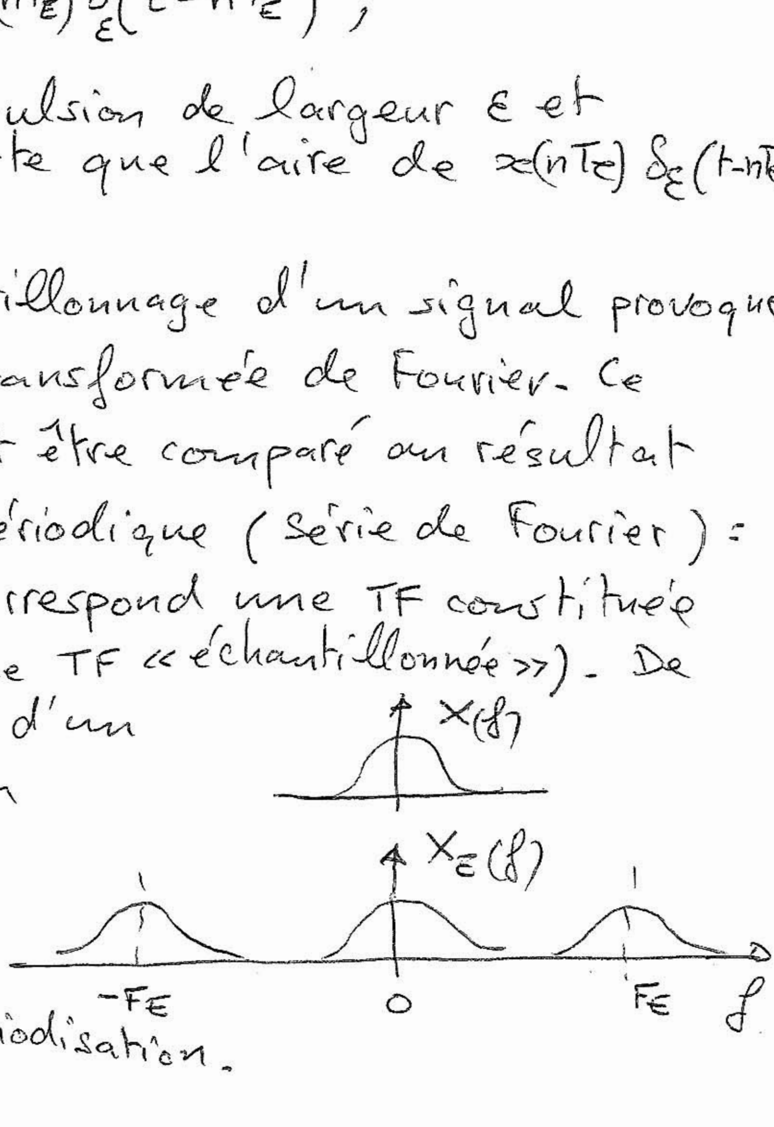


On pourra ainsi écrire le signal échantillonné sous la forme

$$x_{E,\varepsilon}(t) = \sum_n x(nT_E)\,\delta_\varepsilon(t - nT_E),$$

où $\delta_\varepsilon(t)$ est une impulsion de largeur ε et d'amplitude $1/\varepsilon$, de sorte que l'aire de $x(nT_E)\,\delta_\varepsilon(t-nT_E) = x(nT_E)$.

On montre que l'échantillonnage d'un signal provoque une périodisation de sa Transformée de Fourier. Ce résultat ~~est similaire~~ peut être comparé au résultat sur la TF d'un signal périodique (Série de Fourier) : à un signal périodique correspond une TF constituée de raies fréquentielles (une TF « échantillonnée »). De la même manière, la TF d'un signal échantillonné sera périodique. Nous verrons en I3 que ce résultat est général. On parle de dualité échantillonnage-périodisation.



2. De la transformée de Laplace à la transformée en Z.

Pour introduire la transformée en z, considérons la transformée de Laplace d'un signal échantillonné. Celui-ci s'écrit

$$x_E(t) = \sum_n x(nT_E)\, \delta_\varepsilon(t - nT_E) .$$

En utilisant la définition de la TL, on a

$$X_E(p) = \int_0^{+\infty} x_E(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_n x(nT_E)\, \delta_\varepsilon(t-nT_E)\, dt$$

$$= \sum_n x(nT_E) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}\, \delta_\varepsilon(t-nT_E)\, dt$$

Dans la mesure où $\delta_\varepsilon(t-nT_E)$ est une impulsion de largeur ε et d'aire unité située en $t = nT_E$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, \delta_\varepsilon(t-nT_E)\, dt \simeq e^{-npT_E} ,$$

et

$$X_E(p) = \sum_n x(nT_E)\, e^{-npT_E}$$

En posant alors $z = e^{pT_E}$ et $x_D(n) = x(nT_E)$, on a

$$X(z) = X_E(p)\Big|_{z=e^{pT_E}} = \sum_n x_D(n)\, z^{-n} .$$

De manière générale, on posera donc

$$\boxed{X(z) = \sum_n x(n)\, z^{-n} \qquad z \in \mathbb{C}}$$

On rencontrera deux types de TZ, la première

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$$

est dite TZ monolatérale et correspondrait à la transformation de séquences causales. La seconde prend également en compte les séquences non causales :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}.$$

Elle est appelée TZ bilatère.

On définit donc la TZ, de manière générale, comme

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} \quad , \quad \text{pour } z \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C} ,$$

où $\mathcal{D}$ est un domaine de $\mathbb{C}$, tel que la série converge.

i Existence de la TZ. Domaine de convergence.

L'existence de la TZ est examinée à l'aide du critère de Cauchy :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u(n)| < +\infty$$

$$\text{si} \quad \lim_{n \to +\infty} |u(n)|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Application : séquences causales $x(n) = 0$ si $n < 0$

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} \right| \leqslant \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \right| < +\infty$$

$$\text{si} \quad \lim_{n \to +\infty} |u(n)|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{|z|} < 1$$

Il faut donc que $\quad |z| > \lim_{n \to +\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = \rho^{+}$

Par conséquent, $X(z)$ converge à l'extérieur d'un cercle de rayon ρ^{+}.

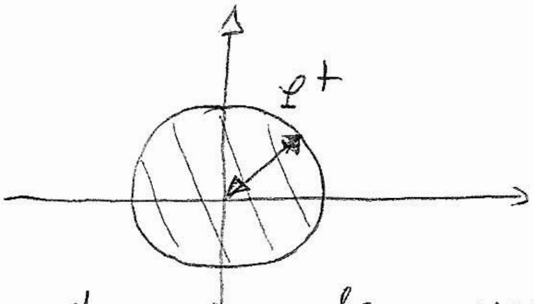
séquences anticausales $x(n) = 0$ si $n > 0$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x(-n)\, z^{+n}$$

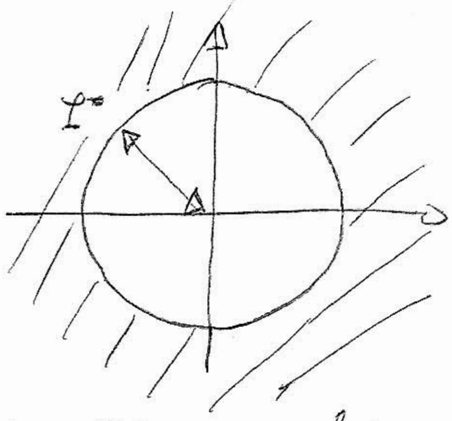
Cette séquence converge si $|z| < \lim_{n \to +\infty} |x(-n)|^{\frac{1}{n}} = \rho^{-}$

La séquence converge donc à l'intérieur d'un cercle de rayon ρ^{-}.

Une séquence quelconque peut être décomposée comme la somme d'une séquence causale et d'une séquence anti-causale. Ainsi, une séquence quelconque convergera dans un disque.



domaine de convergence des séq. causales.



convergence des séq. anti-causales.

TZ sous forme de fraction rationnelle :

La plupart des TZ que nous rencontrerons se mettent sous la forme d'un rapport de deux polynômes en z :

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}.$$

Un polynôme de degré n possède n racines :

$$P(z) = a_0 + \dots + a_{n-1} z^{-(n-1)} = a_0 \prod_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i z^{-1}).$$

Ces racines α_i peuvent être réelles ou complexes. Lorsque les coefficients a_i sont réels, les racines complexes apparaissent par paires complexes conjuguées.

On appelle <u>zéros</u> de $X(z)$ les racines du numérateur et <u>pôles</u> les racines du dénominateur.

Évidemment, $X(z)$ diverge lorsque son dénominateur s'annule. On en déduit que

- séq. causales : les pôles sont de module $< r^+$ (i.e. sont à l'intérieur du cercle).
- séq. anti-causales : les pôles sont de module $> r^-$

Exemples :

- Soit $x(n) = \delta(n)$, alors

$$X(z) = \sum \delta(n) z^{-n} = \delta(0) z^{-0} = 1.$$

Cette TZ converge dans tout le plan complexe.

- Soit $x(n) = a^n \quad n \geq 0$ et 0 sinon

$$= a^n u(n).$$

Alors $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n$

On reconnait la somme d'une suite géométrique :

$$X(z) = \frac{1-(az^{-1})^{+\infty}}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

si la série converge, ie si $|az^{-1}| < 1$, soit $|z| > |a| = r^+$.

- soit $x(n) = -a^n u(-(n+1)) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \geq 0 \\ -a^n \text{ si } n < 0 \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = -\sum_{1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n$$

$$= -1 - \sum_{1}^{+\infty} (a^{-1}z)^{n} + 1$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n + 1$$

$$= -\frac{1-(a^{-1}z)^{+\infty}}{1-a^{-1}z} + 1 = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} =$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{si } |z| < |a| = r^-$$

Sur ces deux exemples, on retrouve bien les régions de convergence générales, et on constate que deux séquences différentes peuvent avoir la même TZ. Pour revenir à l'original d'une TZ, il sera nécessaire de spécifier le domaine de convergence de la série.

<u>Exo.</u> soit $x(n) = a^{|n|}$ $\quad -\infty < n < +\infty$

- montrer que $X(z) = \dfrac{az}{1-az} + \dfrac{1}{1-az^{-1}}$
- donner le domaine de convergence correspondant. À quelle condition sur $|a|$ ce domaine est-il non vide ?

<u>Exo.</u>

soit $x(n) = a^n \cos(n\theta)\, u(n)$.

Montrer que la TZ vaut $X(z) = \dfrac{1 - az^{-1}\cos\theta}{1 - 2az^{-1}\cos\theta + a^2 z^{-2}}$

4 - <u>Une TZ peut cacher une TF. La transformée de Fourier en fréquence réduite.</u>

La variable z est un complexe. Examinons ce que devient la TZ lorsque l'on restreint z à être de module 1, c'est-à-dire à prendre z de la forme $z = e^{j2\pi f}$:

$$X(z = e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j2\pi f n}$$

On observe que cette fonction de f est continue et périodique de période 1 (faire $f = f+1$ dans l'expression précédente). Puisque l'argument de l'exponentielle est en radians, on observe que f est nécessairement <u>sans dimension</u>. Il s'agit effectivement, comme on va le voir, d'une fréquence <u>normalisée</u> par rapport à la fréquence d'échantillonnage.

Considérons la transformée de Fourier de la séquence échantillonnée $x_{E,\varepsilon}(t) = \sum_n x(nT_E)\,\delta_\varepsilon(t-nT_E)$

$$X_{E,\varepsilon}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{E,\varepsilon}(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n x(nT_E)\,\delta_\varepsilon(t-nT_E)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$
$$= \sum_n x(nT_E) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t-nT_E)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$
$$\simeq \sum_n x(nT_E)\, e^{-j2\pi f T_E}.$$

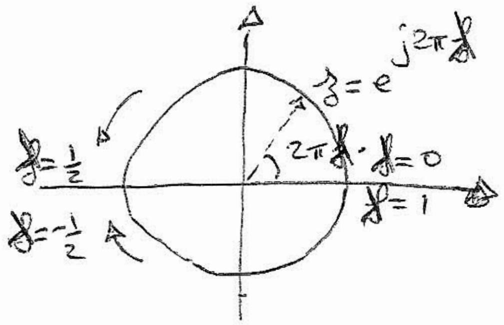
En posant $\lambda = f T_E = f/F_E$ la fréquence réduite
et en notant $x_D(n) = x(nT_E)$, on obtient

$$X_D(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_D(n)\, e^{-j2\pi\lambda n}$$

qui est la même expression que celle de la TZ pour $z = e^{j2\pi\lambda}$.

Interprétation :

la TZ est définie pour $z \in \mathbb{C}$. Lorsque l'on se restreint à $z = e^{j2\pi\lambda}$, z parcourt le cercle unité ($|z|=1$)



On retrouve que $\begin{cases} X(\lambda) = X(\lambda+1) \\ X(\frac{1}{2}) = X(-\frac{1}{2}), \end{cases}$

ou, en fréquence « standard » (non normalisée), $X(f) = X(f+F_E)$

La TF en fréquence réduite est la TF d'un signal échantillonné. Il s'agit d'une fonction périodique. On retrouve ainsi que la TF d'un signal échantillonné est périodique. Il suffira donc de considérer une seule période de la TF.

Inversion

Puisque $X(\lambda)$ est périodique, on peut considérer que $X(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j2\pi\lambda n}$ est un développement en « série de Fourier », dont les coefficients sont $x(n)$, soit

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\lambda)\, e^{+j2\pi n\lambda}\, d\lambda .$$ (si SF définie sur $]-\infty, +\infty[$).

5. Propriétés de la transformée en z.

- Linéarité :

si $w(n) = a\,x(n) + b\,y(n)$, alors $W(z) = a\,X(z) + b\,Y(z)$.

- Valeur initiale (pour des séq. causales).

$$\lim_{n \to 0} x(n) = \lim_{z \to +\infty} X(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \dots + \frac{x(k)}{z^k} + \dots$$
$$= 0 \text{ si } z \to +\infty .$$

- Valeur finale

$$\lim_{n \to +\infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, X(z).$$

- Intégration et dérivation

$$TZ\left\{ \sum_{i=-\infty}^{n} x(i) \right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}\, X(z)$$

$$TZ\left\{ x(n) - x(n-1) \right\} = (1 - z^{-1})\, X(z)$$

Démontrable à l'aide du théorème du retard (voir plus loin).

- Multiplication par une exponentielle.

$$y(n) = a^n x(n)$$

$$Y(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a^n x(n) z^{-n} = X(z/a).$$

Tous les pôles et les zéros sont multipliés par a.

- Retournement temporel

$$y(n) = x(-n) \qquad Y(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(-n) z^{-n}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) z^{+n} = X(z^{-1}).$$

- Décalage.

Si $y(n) = x(n-k)$, alors

$$Y(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n-k) z^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n-k) z^{-(n-k)} z^{-k}$$

$$= z^{-k} \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n-k) z^{-(n-k)} = z^{-k} X(z).$$

$$Y(z) = TZ\{x(n-k)\} = z^{-k}\, TZ\{x(n)\}.$$

Remarque :

Si on utilise la TZ monolatérale, alors on voit apparaître l'effet de conditions initiales :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x(n-k) z^{-(n-k)} z^{-k} =$$

$$= z^{-k} \left[\sum_{n=0}^{k-1} x(n-k) z^{-(n-k)} + \sum_{n=k}^{+\infty} x(n-k) z^{-(n-k)} \right]$$

$$= \underbrace{z^{-k} \sum_{n=0}^{k-1} x(n-k) z^{-(n-k)}}_{\text{conditions initiales}} + z^{-k} X(z).$$

- ~~R~~ TZ d'une équation aux différences.

On considère un système décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i\, y(n-i) + \sum_{j=0}^{q} b_j\, x(n-j)$$

Alors, en utilisant le théorème du retard et la linéarité de la TZ, on obtient

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{p} a_i\, z^{-i}\, Y(z) + \sum_{j=0}^{q} b_j\, z^{-j}\, X(z),$$

soit $$Y(z) = X(z) \cdot \frac{\sum_{j=0}^{q} b_j z^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^{-i}}.$$

Pour une entrée donnée $x(n)$, on peut donc calculer $X(z)$, puis en déduire la TZ $Y(z)$ de $y(n)$. En recherchant alors l'original, on obtiendra $y(n)$.

Le rapport $\frac{Y(z)}{X(z)}$ est appelé <u>fonction de transfert en z</u>.

En prenant $z = e^{j2\pi\lambda}$, on obtient une fonction de transfert en fréquence (réduite).

La propriété de décalage est une propriété fondamentale pour étudier ou plutôt relier une équation aux différences et une fonction de transfert (dans les deux sens !).

<u>Exemples:</u>

- $y(n) = y(n-1) + x(n) + 2x(n-1)$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

- si $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$ alors $Y(z) = X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + a_1 z^{-1} Y(z)$

$$\Rightarrow y(n) = a_1 y(n-1) + x(n) + b_1 x(n-1)$$

6. Évaluation rapide d'une fonction de transfert.

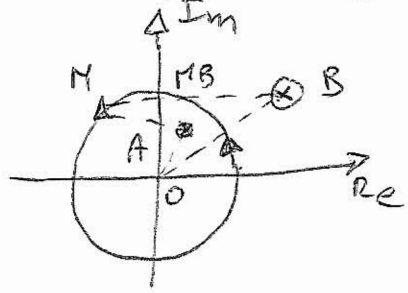
Considérons une fonction de transfert du premier ordre

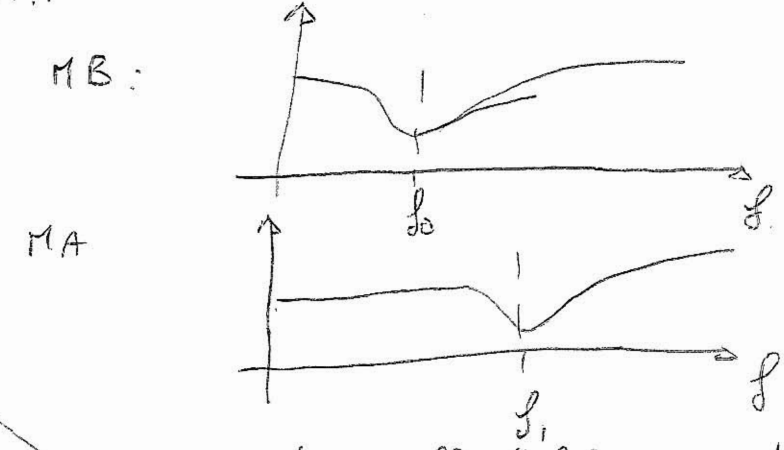
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{z + b_1}{z - a_1} \qquad \begin{array}{l} \text{zéro : } -b_1 \\ \text{pôle : } a_1 \end{array}$$

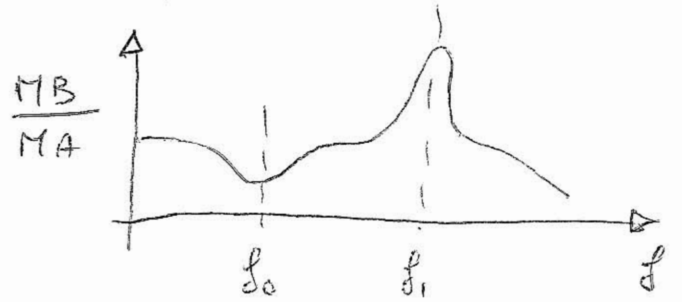
$$H(f) = \frac{e^{j2\pi f} + b_1}{e^{j2\pi f} - a_1}$$

Soit B le point de coordonné $-b_1$ dans le plan complexe et A le point de coordonnée a_1. Enfin, on note M le point de coord. $e^{j2\pi f}$.

Alors, $H(f) = \dfrac{MB}{MA}$, rapport de deux vecteurs







$|H(f)|$ obtenue comme le rapport MB/MA

Les affaiblissement en f_0 et f_1 correspondent aux plus petites distances MB et MA. Les fréquences correspondantes sont données par l'angle xOM associé.

Ceci se généralise à une fonction de transfert d'ordre quelconque : il suffit de factoriser celle-ci en un produit de premier ordres :

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^{q} (z - z_i)}{\prod_{j=1}^{p} (z - p_j)} = \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)} \times \cdots \times \frac{(z - z_q)}{(z - p_p)}$$

INVERSION DE LA TZ :

Il existe trois méthodes de calcul de la transformée en z :

- une méthode générale par intégration dans le plan complexe,
- une méthode par développement en série,
- une méthode par décomposition en éléments simples, (lorsque la fonction est une fraction rationnelle).

- Développement en série :

ex : $\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ pour $|z|>|a|$

On effectue la division polynomiale, et on obtient

$$H(z) = 1 + az^{-1} + \dots + \underbrace{a^n}\, z^{-n} + \dots$$

↳ terme $h(n)z^{-n}$

d'où $h(n) = a^n$.

- Décomposition en éléments simples :

ex : $H(z) = \dfrac{1}{(1+az^{-1})(1-bz^{-1})}$ $|z|>|a|$ $|z|>|b|$

$$= \frac{a}{a+b}\,\frac{1}{1+az^{-1}} + \frac{b}{a+b}\,\frac{1}{1-bz^{-1}}$$

et $h(n) = \dfrac{a}{a+b}(-a)^n + \dfrac{b}{a+b}\,b^n$ pour $n \geq 0$

- Intégration dans le plan complexe :

Cette méthode utilise la formule de CAUCHY :

$\mathcal{C}$ est un contour fermé, $f(z)$ une fonction holomorphe dans et sur $\mathcal{C}$ et z_0 un point intérieur de $\mathcal{C}$

(une fonction holomorphe est continue, uniforme et analytique)

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2j\pi f(z_0).$$

Par dérivation / à z_0, on a

$$n! \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = 2j\pi f^{(n)}(z_0)$$

En appliquant ceci à $f(z) = 1$ et en $z_0 = 0$, on obtient, si $\mathcal{C}$ est un contour entourant l'origine,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 2j\pi \qquad \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^n} = 0 \quad \text{pour } n \neq 1$$

soit
$$\oint_{\mathcal{C}} z^{n-1}\, dz = 2j\pi\, \delta(n)$$

En partant de $X(z) = \sum_k x(k)\, z^{-k}$,

on forme
$$\oint_{\mathcal{C}} X(z)\, z^{n-1}\, dz$$
$$= \oint_{\mathcal{C}} \sum_k x(k)\, z^{n-k-1}\, dz$$
$$= \sum_k x(k) \oint_{\mathcal{C}} z^{n-k-1}\, dz$$
$$= \sum_k x(k) \cdot 2j\pi\, \delta(n-k) = 2j\pi\, x(n).$$

Par suite,
$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\mathcal{C}} X(z)\, z^{n-1}\, dz}$$

On peut calculer cette intégrale par la méthode des résidus :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 2j\pi \sum_{\substack{\text{pôles} \\ \text{à l'intérieur} \\ \text{de } \Gamma}} \operatorname{Res}\{f(z)\} = -2j\pi \sum_{\substack{\text{pôles} \\ \text{extérieurs}}} \operatorname{Res}\{f(z)\}$$

On applique ceci avec $f(z) = X(z)\, z^{n-1}$

Si p_i est un pôle de $X(z)$ d'ordre k, on pose
$$\Phi(z) = (z - p_i)^k\, X(z)\, z^{n-1}$$
et
$$\operatorname{Res}[\Phi(z)] = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1}\Phi(z)}{dz^{k-1}} \right|_{z = p_i}.$$

si $k = 1$, $\operatorname{Res}[\ ] = \Phi(p_i)$

$k = 2$, $\operatorname{Res}[\ ] = \Phi'(z)\big|_{z = p_i}$

7- Lien avec le domaine analogique

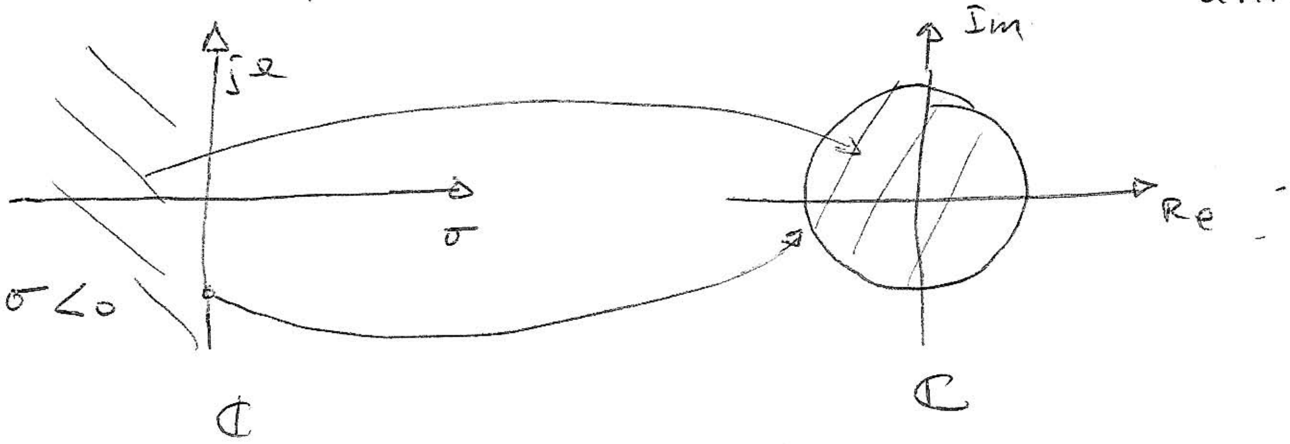
On a vu que l'on peut définir la TZ à partir de la transformée de Laplace en prenant

$$z = e^{pT_E}$$

or $p = \sigma + j\Omega$, donc $z = e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega T}$

pour $\sigma < 0$, $|z| = e^{\sigma T} < 1$ $\quad Re(p) < 0 \Rightarrow |z| < 1$

$\sigma = 0$ $\quad |z| = e^{0} = 1$ $\quad$ axe imag. $\Rightarrow$ cercle unité



pôles à partie réelle négative $\longrightarrow$ pôles de $|\,| < 1$

Table des transformées en Z.

SIGNAL	TRANSFORMÉE en Z
$x(n)$	$X(z)$
$\delta(n)$	1
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$
$a^n \cos(n\theta)\, u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\theta}{1-2az^{-1}\cos\theta + a^2z^{-2}}$
$a^n \sin(n\theta)\, u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin\theta}{1-2az^{-1}\cos\theta + a^2z^{-2}}$
$x(n-m)$	$z^{-m}X(z)$
$a^n x(n)$	$X(z/a)$
$n\,x(n)$	$z^{-1}\dfrac{dX(z)}{dz^{-1}} = -z\dfrac{dX(z)}{dz}$
$n\,a^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$