

Détection¹

1 Fondements de la théorie de la détection

1.1 Modélisation

Le problème central est de choisir l'un des mots de l'alphabet d'émission (l'ensemble des mots codes c_i issus du codeur de canal) à partir du signal reçu r . La règle de décision habituelle consiste à effectuer une partition de l'ensemble des mots de réception.

On note Z l'ensemble de tous les mots r susceptibles d'être reçus, et on note Z_i l'ensemble de tous les mots r reçus tel que c_i soit décidé. C'est l'ensemble *décodeur* associé à c_i . Le problème est alors de trouver la meilleure partition possible, au sens d'un critère à définir, de l'ensemble des signaux reçus Z .

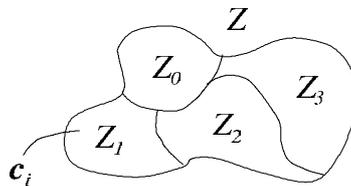


FIG. I.1: Partition de l'ensemble des signaux reçus

Dans le schéma précédent, il y aura erreur dès que le signal reçu r n'appartient pas à Z_i , alors que c_i a été émis :

$$\begin{aligned} P(\text{erreur} \mid c_i) &= P(r \in \overline{Z_i} \mid c_i), \\ &= 1 - P(r \in Z_i \mid c_i). \end{aligned}$$

En moyenne, la probabilité d'erreur au décodage vaut

$$P(\text{erreur}) = \sum_{i=1}^N P(c_i) P(\text{erreur} \mid c_i)$$

$$\text{soit } P(\text{erreur}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} P(\text{décider } c_j \mid c_i \text{ émis}).$$

Lorsque les symboles émis sont équiprobables, on obtient

$$P(\text{erreur}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(\text{erreur} \mid c_i)$$

Construction de la partition :

On distingue en général deux règles, selon que l'on considère les probabilités *a priori* ou non (ou que l'on prend une loi uniforme pour la source). La probabilité *a posteriori* est obtenue en appliquant la règle de Bayes :

$$P(c_i \mid r) = \frac{P(c_i) P(r \mid c_i)}{P(r)}$$

La probabilité $P(c_i \mid r)$ est la probabilité *a posteriori*, c'est-à-dire la probabilité de c_i connaissant l'observation r . La probabilité $P(r \mid c_i)$ est la vraisemblance de l'observation, c'est-à-dire la probabilité d'observer r lorsque c_i est émis.

¹Ce chapitre reprend de larges extraits du chapitre « Récepteur Optimal » de l'ouvrage collectif « Radiocommunications numériques. Tome 1 Principes, modélisation et simulation », Dunod, 2002.

1. règle du maximum *a posteriori*

$$Z_i = \left\{ r / P(c_i | r) = \max_K P(c_K | r) \right\}$$

cette partition dépend à la fois de la loi d'entrée $P(c_i)$ et des probabilités de transition $P(r | c_i)$, (c'est à dire du canal).

2. règle du maximum de vraisemblance

$$Z_i = \left\{ r / P(r | c_i) = \max_K P(r | c_K) \right\}$$

Lorsque $P(c_i)$ est uniforme, maximiser $P(c_K | r)$ est équivalent à maximiser $P(r | c_K)$, et les deux règles sont alors équivalentes.

On considère les quatre espaces suivants et leurs relations :

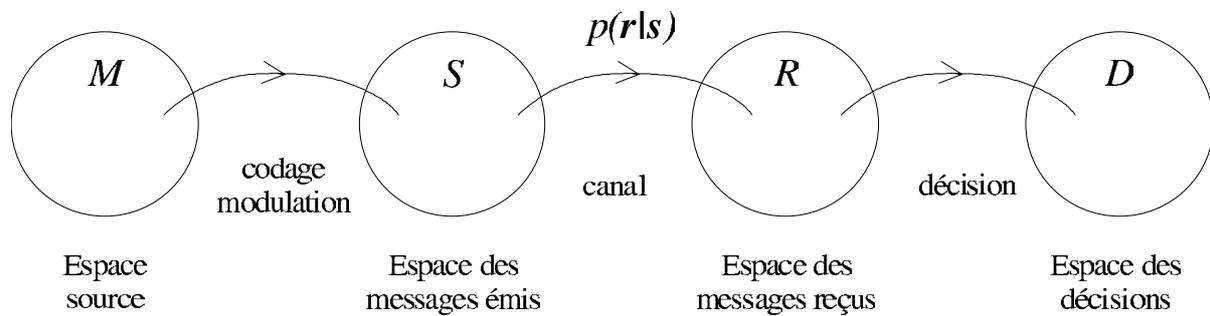


FIG. I.2: Espaces de signaux pour une chaîne de transmission.

Ces différents espaces sont des espaces de fonctions/variables certaines ou aléatoires, de dimension finie ou infinie.

Les passages de M à S et de R à D sont généralement des applications certaines, alors que le canal (passage de S à R) est aléatoire et caractérisé par une distribution de probabilité conditionnelle.

1.2 Stratégie bayésienne-Notions de coût

On définit un « coût » $C(s, D)$, qui représente la pénalité ou la perte associée à l'événement conjoint (s émis, Décision D prise). Le coût attaché à l'événement conjoint représente donc en quelque sorte le prix à payer pour chacune des décisions. Afin de privilégier les bonnes décisions, on attachera alors un coût important aux mauvaises décisions et un coût nul, ou négatif aux bonnes décisions. Notons que certaines mauvaises décisions peuvent être « plus graves » que d'autres ; on pourra ordonner ces décisions en jouant sur les coûts associés. Lorsque les coûts sont fixés, on pourra chercher à minimiser le coût moyen d'une décision, c'est-à-dire la moyenne des coûts pondérée par les probabilités de chacun des événements conjoints : c'est la stratégie bayésienne.

La stratégie bayésienne consiste à minimiser le coût moyen. On parle alors de la minimisation du risque bayésien.

$$R = E_{D,s} [C(s, D)].$$

Examinons tout d'abord comment ceci se traduit dans le cas binaire : la source peut émettre deux messages s_0 et s_1 , et il s'agit de décider quel message a été émis au vu de l'observation r . La stratégie doit alors amener à trouver la meilleure partition de l'ensemble des observations possibles Z en deux sous ensembles, auxquels on associe des décisions D_0 et D_1 .

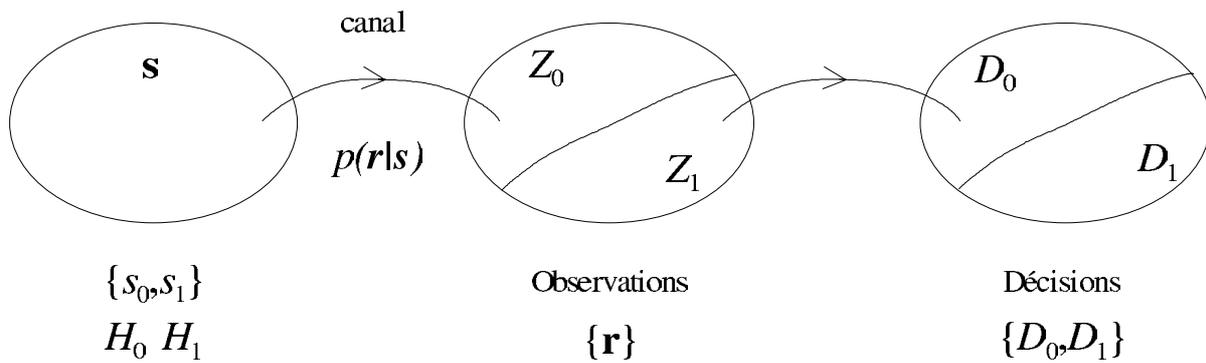


FIG. I.3: Partition des observations et décisions.

On note C_{ij} le coût associé à la décision D_i (on décide que s_i est émis), lorsque l'hypothèse H_j est vraie (s_j a été émis).

Le risque bayésien s'écrit alors

$$R = C_{00} P(D_0, H_0) + C_{01} P(D_0, H_1) + C_{10} P(D_1, H_0) + C_{11} P(D_1, H_1).$$

En faisant intervenir les lois a priori,

$$R = C_{00} P(D_0 | H_0) P(H_0) + \dots + C_{11} P(D_1 | H_1) P(H_1)$$

or,

$$P(D_0 | H_0) = P(r \in Z_0 | s_0 \text{ mis}) = \int_{Z_0} p(r | s_0) dr$$

La stratégie bayésienne consiste à trouver la partition Z_0, Z_1 tel que le risque bayésien R soit minimal. Le risque bayésien s'exprime alors, en fonction des probabilités de transition et des régions de décisions, comme :

$$R = C_{00} P(H_0) \int_{Z_0} p(r | H_0).$$

On supposera dans toute la suite que le coût attaché à une mauvaise décision est plus important que celui associé à une bonne décision :

$$\begin{cases} C_{10} > C_{00} \\ C_{01} > C_{11} \end{cases}$$

Par ailleurs, on note que $Z = Z_0 + Z_1$. Par conséquent,

$$\int_{Z_1} = \int_{Z-Z_0} = \int_Z - \int_{Z_0}.$$

En observant de plus que

$$\int_Z p(r | H_0) dr = \int_Z p(r | H_1) dr = 1,$$

le risque bayésien peut simplement être réduit à

$$R = P(H_0) C_{10} + P(H_1) C_{11} + \int_{Z_0} P(H_1) (C_{01} - C_{11}) p(r | H_1) - P(H_0) (C_{10} - C_{00}) p(r | H_0) dr$$

Les deux premiers termes de R sont des termes constants. L'intégrale représente le coût contrôlé par les points assignés à Z_0 . En supposant que le coût associé à une mauvaise décision est plus important que celui associé à une bonne décision, on note que l'intégrande est constitué par la différence de deux termes positifs.

Comme on veut trouver une partition de Z qui permette de minimiser le risque bayésien, il faut que tous les points r tels que

$$P(H_0) (C_{10} - C_{00}) p(r|H_0) > P(H_1) (C_{01} - C_{11}) p(r|H_1)$$

soient assignés à l'ensemble Z_0 (et donc à la décision D_0), car ils contribuent alors à rendre l'intégrale négative. En suivant la même idée, tous les points r tels que l'inégalité précédente ne soit pas vérifiée doivent être exclus de Z_0 , c'est-à-dire affectés à Z_1 (décision D_1). Ceci nous permet donc de définir la partition Z_0/Z_1 qui minimise le risque bayésien. Ceci s'écrit

$$P(H_0) (C_{10} - C_{00}) p(r|H_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{>}} P(H_1) (C_{01} - C_{11}) p(r|H_1)$$

Plus classiquement, on écrit le *test du rapport de vraisemblance (Likelihood Ratio Test)*

$$\frac{p(r|H_1)}{p(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \cdot \frac{(C_{10} - C_{00})}{(C_{01} - C_{11})}$$

ou encore

$$\Lambda(r) \underset{H_1}{\overset{H_0}{>}} \eta.$$

Il est important de noter que

- le rapport de vraisemblance $\Lambda(r)$ ne dépend que des probabilités de transition $p(r|H_i)$, c'est-à-dire du canal, et non des coûts et des probabilités *a priori*,
- le rapport de vraisemblance, comme rapport de deux distributions, est une *quantité monodimensionnelle*,
- le seuil η ne dépend que des coûts et des probabilités *a priori*,
- le rapport de vraisemblance, comme rapport de deux fonctions d'une variable aléatoire est lui-même une variable aléatoire. Les performances du test sont alors liées aux caractéristiques statistiques de $\Lambda(r)$.

L'implantation du détecteur consiste donc à calculer le rapport de vraisemblance $\Lambda(r)$, puis à comparer ce rapport à un seuil η .

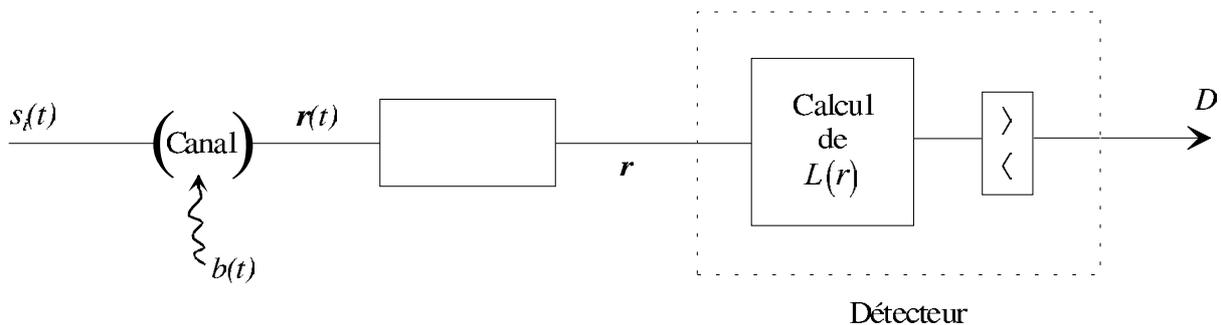


FIG. I.4: Structure d'un détecteur à maximum de vraisemblance.

On utilise souvent le logarithme du rapport de vraisemblance, $l(r)$ et le test devient alors

$$l(r) = \log(\Lambda(r)) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \log \eta.$$

En général, on prend simplement $C_{00} = C_{11} = 0$, pour les bonnes décisions, et $C_{01} = C_{10} = 1$ pour les mauvaises décisions. Si en outre les deux hypothèses sont équiprobables, le test peut s'écrire

$$p(r|H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} p(r|H_0),$$

qui est simplement la *règle du maximum de vraisemblance*.

1.2.1 Lien avec la probabilité d'erreur

Lorsque

$$\begin{cases} C_{00} = C_{11} = 0 \\ C_{01} = C_{10} = 1 \end{cases}$$

et si les probabilités *a priori* sont équiprobables, alors le risque est simplement

$$\begin{aligned} R &= C_{01} P(D_0|H_1) + C_{10} P(D_1|H_0) \\ &= P(D_0|H_1) + P(D_1|H_0) = P(\text{erreur}). \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas particulier, *la minimisation du risque bayésien R est équivalente à la minimisation de la probabilité d'erreur*.

1.3 Stratégie de Neyman-Pearson

La stratégie de Neyman-Pearson est essentiellement définie dans le cas binaire. On considère deux types d'erreur :

- L'erreur de fausse alarme : $\alpha = P_{fa} = P(D_1|H_0) = \int_{Z_1} p(r|H_0) dr$,
- L'erreur de mauvaise détection : $\beta = P_{md} = P(D_0|H_1) = \int_{Z_0} p(r|H_1) dr$,

La probabilité $P(D_1|H_1) = 1 - \beta$ est appelée la puissance du test. La stratégie consiste à se fixer une probabilité maximale de fausse alarme, et, cette probabilité étant fixée, à maximiser la puissance du test, c'est-à-dire à minimiser la probabilité de mauvaise détection.

Ceci conduit à un test du type rapport de vraisemblance,

$$\frac{p(r|H_1)}{p(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \lambda.$$

où le paramètre de Lagrange λ est déterminé afin de satisfaire la contrainte :

$$P_{fa} = \int_{\lambda}^{\infty} p(\Lambda|H_0) d\Lambda = P_r(\Lambda > \lambda|H_0)$$

La stratégie de Neyman-Pearson conduit donc à la même structure de récepteur que la stratégie bayésienne : seul change le seuil de décision, qui est ici fixé par la probabilité de fausse alarme.

1.4 Observation vectorielle - Cas gaussien général

On considère maintenant le problème de détection binaire

$$\begin{aligned} H_0 &: \mathbf{r} \sim N(\mathbf{m}_0, \Gamma_0) \\ H_1 &: \mathbf{r} \sim N(\mathbf{m}_1, \Gamma_1) \end{aligned}$$

où il s'agit de décider entre deux signaux gaussiens de moyennes respectives \mathbf{m}_0 et \mathbf{m}_1 , et de matrices de covariances Γ_0 et Γ_1 .

Le rapport de vraisemblance est, comme précédemment

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r}|H_1)}{p(\mathbf{r}|H_0)}$$

or $p(\mathbf{r}|H_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \Gamma_i}} \exp -\frac{1}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{m}_i)^t \Gamma_i^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{m}_i)$, où \det désigne le déterminant. Alors

$$\begin{aligned} l(\mathbf{r}) = \log \Lambda(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{m}_0)^t \Gamma_0^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{m}_0) - (\mathbf{r} - \mathbf{m}_1)^t \Gamma_1^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{m}_1) \right] \\ &\quad \left\langle \begin{array}{l} H_1 \\ \log(\eta) + \frac{1}{2} \log \left[\frac{\det \Gamma_1}{\det \Gamma_0} \right] \\ H_0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant examiner le problème de la détection de deux signaux certains, connus, s_0 et s_1 , à partir d'une observation bruitée.

$$\begin{aligned} H_0 &: \mathbf{r} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{b} \quad N(\mathbf{s}_0, \Gamma_b) \\ H_1 &: \mathbf{r} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{b} \quad N(\mathbf{s}_1, \Gamma_b) \end{aligned}$$

Compte tenu des résultats précédents, on obtient alors

$$\begin{aligned} l(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{s}_0)^t \Gamma_b^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_0) - (\mathbf{r} - \mathbf{s}_1)^t \Gamma_b^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2\mathbf{r}^t \Gamma_b^{-1} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0) - \mathbf{s}_1^t \Gamma_b^{-1} \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_0^t \Gamma_b^{-1} \mathbf{s}_0 \right] \left\langle \log \eta \right. \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\mathbf{r}^t \Gamma_b^{-1} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0) \left\langle \begin{array}{l} H_1 \\ \log \eta + \frac{1}{2} \left(\mathbf{s}_1^t \Gamma_b^{-1} \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0^t \Gamma_b^{-1} \mathbf{s}_0 \right) \\ H_0 \end{array} \right.$$

Cas particuliers :

Si le bruit d'observation est blanc, on a $\Gamma_b = \sigma^2 \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la matrice identité. Si d'autre part on a $\eta = 1$, alors

$$\mathbf{r}^t (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0) \left\langle \begin{array}{l} H_1 \\ \frac{1}{2} \left(\mathbf{s}_1^t \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0^t \mathbf{s}_0 \right) \\ H_0 \end{array} \right.$$

Si les deux signaux possèdent la même énergie $E_s = \mathbf{s}_1^t \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0^t \mathbf{s}_0$, on obtient le simple test

$$\mathbf{r}^t \mathbf{s}_1 \left\langle \begin{array}{l} H_1 \\ \mathbf{r}^t \mathbf{s}_0 \\ H_0 \end{array} \right.$$

qui consiste à comparer les produits scalaires entre les observations \mathbf{r} et les deux signaux attendus s_0 et s_1 .

Enfin, dans le cas où l'on cherche à détecter un seul signal s_1 dans du bruit blanc ($s_0 = \mathbf{0}$), le test obtenu consiste à comparer le résultat du produit scalaire à la moitié de l'énergie

$$\mathbf{r}^t \mathbf{s}_1 \left\langle \begin{array}{l} H_1 \\ \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^t \mathbf{s}_1 \\ H_0 \end{array} \right.$$

1.5 Test à M hypothèses

Nous avons présenté précédemment le cas de la décision entre deux hypothèses, ce qui correspond finalement à l'étude de signaux binaires. On peut généraliser ceci au test à M hypothèses, c'est-à-dire par exemple au problème d'affectation d'un symbole reçu à un point d'une constellation. On a ainsi un problème de détection d'un signal parmi M :

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad r = s_0 + b \\ H_1 : & \quad r = s_1 + b \\ & \quad \vdots \\ & \quad \vdots \\ & \quad \vdots \\ H_{M-1} : & \quad r = s_{M-1} + b \end{aligned}$$

À ces hypothèses correspondent M^2 éventualités (D_i, H_j) , auxquelles on associe les coûts C_{ij} . La minimisation du coût moyen, c'est-à-dire du risque bayésien, conduit à diviser l'espace d'observation Z en M sous-espaces Z_i , tels que $r \in Z_i \Leftrightarrow \text{Décision } D_i$. L'étude précise conduit ici simplement au fait qu'il faut tester les hypothèses deux à deux. En définissant les rapports de vraisemblance

$$\Lambda_{1|0}(r) \stackrel{D}{=} \frac{p_{r|H_1}}{p_{r|H_0}}, \quad \Lambda_{2|0}(r) \stackrel{D}{=} \frac{p_{r|H_2}}{p_{r|H_0}}, \quad \dots \quad \Lambda_{M-1|0}(r) \stackrel{D}{=} \frac{p_{r|H_{M-1}}}{p_{r|H_0}},$$

on a accès à l'ensemble des rapports de vraisemblance, puisque

$$\Lambda_{i|j}(r) \stackrel{D}{=} \frac{p_{r|H_i}}{p_{r|H_j}} = \frac{\Lambda_{i|0}}{\Lambda_{j|0}}.$$

On effectue ensuite tous les tests

$$\Lambda_{i|j}(r) \underset{H_j \text{ (ou } H_k, k \neq i, j)}{\overset{H_i \text{ (ou } H_k, k \neq i, j)}{\langle}} \frac{p_j}{p_i},$$

qui permettent de tester une hypothèse (mais une seule) contre une autre. En collectant l'ensemble des résultats, on obtiendra alors la décision.

2 Détection de signaux à temps continu

Nous n'avons considéré pour le moment que la détection de constantes, ou de signaux à temps discrets, représentés sous la forme de vecteurs. L'information est véhiculée, le long du canal, par des signaux analogiques à temps continu, et il convient donc de s'intéresser au problème de la détection des signaux à temps continu. Ceci nous amènera en fait à présenter la structure générale d'un récepteur. Pour passer à l'analyse de signaux à temps continu, sans perdre l'investissement théorique précédent, nous allons utiliser les méthodes de représentation des signaux aléatoires présentées au début de ce chapitre, qui nous permettront de nous ramener au cas vectoriel. Pour introduire cette démarche, nous débuterons par le problème de détection d'un signal dans du bruit.

2.1 Représentation

Les deux hypothèses sont

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad r(t) = b(t) \\ H_1 : & \quad r(t) = s(t) + b(t) \end{aligned}$$

où $s(t)$ est un signal certain, d'énergie $E_s = \int_0^T |s(t)|^2 dt$, et $b(t)$ un signal aléatoire, centré, gaussien, de fonction de corrélation $\Gamma_b(t, u)$.

On choisit comme base de représentation les $\Phi_i(t)$ (fonctions propres) de $\Gamma_b(t, u)$, définis par $\int_0^T \Phi_i(t)\Gamma_b(t, u) dt = \lambda_i\Phi_i(u)$ pour $u \in [0, T]$, et où les coefficients b_i du développement de $b(t)$ sont décorrelés : $E[b_i b_j] = \lambda_i\delta_{ij}$. L'utilisation de la transformée de Kahunen-Loève permet ici de traiter sans difficulté le cas d'un bruit coloré.

Dans ces conditions, les signaux d'intérêt peuvent s'exprimer à l'aide des développements en série suivants :

$$\begin{cases} s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i\Phi_i(t) & \text{avec } s_i = \int_0^T s(t)\Phi_i(t) dt, \\ b(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\Phi_i(t) & \text{avec } b_i = \int_0^T b(t)\Phi_i(t) dt, \\ r(t) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i\Phi_i(t) & \text{avec } r_i = \int_0^T r(t)\Phi_i(t) dt. \end{cases}$$

Le bruit $b(t)$ étant gaussien, on peut connaître $r|H_0$ et $r|H_1$...

Par propriétés du développement de Kahunen-Loève, et en tenant compte du fait que $b(t)$ est par hypothèse gaussien centré, les variables aléatoires b_i sont gaussiennes dans leur ensemble, centrées et décorrelées. On déduit de ceci les distributions de $r_i|H_0$ et $r_i|H_1$:

- les $r_i|H_0$ sont des variables aléatoires gaussiennes centrées, non corrélées,
- les $r_i|H_1$ sont gaussiennes, non corrélées, de valeurs moyennes $E[r_i|H_1] = s_i$

Notons $\tilde{r}_i|H_1$ la variable aléatoire $r_i|H_1$ centrée : on a

$$\tilde{r}_i|H_1 = r_i|H_0,$$

et par suite les variances sont égales et $= \lambda_i$.

$$E[r_i|H_0. \tilde{r}_j|H_1] = E[b_i b_j] = \lambda_i\delta_{ij}.$$

2.2 Troncature

On peut tronquer les développements à l'ordre N (on sait que le développement de KL converge en moyenne quadratique). On obtient alors les développements suivants :

$$r_N(t) = \sum_{i=1}^N r_i\Phi_i(t) \quad s_N(t) = \sum_{i=1}^N s_i\Phi_i(t) \quad b_N(t) = \sum_{i=1}^N b_i\Phi_i(t)$$

Sur la base $\{\Phi_i\}$, $i = 1..N$, les différents signaux pourront simplement être représentés par les composantes du développement, c'est-à-dire par un vecteur.

Sous l'hypothèse H_0 : $r(t)$ est représenté par $r_N(t)$, i.e. par les r_i pour $i = 1$ à N ,

$$\mathbf{r}|H_0 = [r_1, r_2, \dots, r_N]^T = [b_1, b_2, \dots, b_N]^T,$$

et sous H_1 :

$$\mathbf{r}|H_1 = [r_1, r_2, \dots, r_N]^T = [s_1, s_2, \dots, s_N]^T + [b_1, b_2, \dots, b_N]^T = \mathbf{s} + \mathbf{b}.$$

2.3 Stratégie bayésienne

Nous pouvons maintenant appliquer les résultats obtenus précédemment : le problème est simplement la détection d'un signal certain \mathbf{s} dans un bruit gaussien \mathbf{b} , avec $p_{\mathbf{r}|H_0}$ une densité gaussienne centrée de matrice de corrélation Γ_b , et $p_{\mathbf{r}|H_1}$ gaussienne de moyenne \mathbf{s} et de même matrice de corrélation.

La matrice de corrélation est diagonale, par propriété de décorrélation du développement de Kahunen-Loève :

$$\Gamma_b = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix}.$$

On a alors :

$$l(\mathbf{r}) = r^T \Gamma_b^{-1} s \Bigg\langle_{H_0}^{H_1} \log \eta + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \Gamma_b^{-1} \mathbf{s}$$

or, la matrice diagonale Γ_b est particulièrement simple à inverser, et

$$\Gamma_b^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_N} \end{bmatrix}.$$

On obtient alors finalement

$$l(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{r_i s_i}{\lambda_i} \Bigg\langle_{H_0}^{H_1} \log \eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{s_i^2}{\lambda_i}$$

2.4 Retour au continu

Comme on sait que le développement de Kahunen-Loève converge, on peut faire tendre N vers l'infini.

A COMPLETER

On ne peut en général pas revenir à une expression simple en fonction des signaux à temps continu initiaux, et à l'exception notable du bruit additif blanc gaussien, le traitement doit passer soit par un blanchiment préalable, soit par l'emploi effectif d'une décomposition de type Kahunen-Loève.

En posant $w_i = s_i/\lambda_i$, on peut définir $w(t) = \sum_i w_i \Phi_i(t)$, et le filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = w(T-t)$, échantillonné à l'instant T , est le filtre de réception optimal. Mais le calcul du filtre en question n'est pas forcément aisé... Une autre manière de procéder consiste à se ramener, par blanchiment, au cas du bruit blanc (gaussien) additif, pour lequel existent de beaux résultats.

2.4.1 Cas du bruit blanc

Dans le cas du bruit blanc, toutes les valeurs propres sont égales, et on a $\lambda_i = \frac{N_0}{2} \forall i$. Le test du log-rapport de vraisemblance s'écrit alors

$$l = \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^{\infty} r_i s_i \Bigg\langle \log \eta + \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2,$$

ou

$$l' = \sum r_i s_i \Bigg\langle \log \eta + \sum s_i^2.$$

En remplaçant r_i par son expression,

$$\begin{aligned} l' &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T r(t) \Phi_i(t) s_i dt = \int_0^T r(t) \sum s_i \Phi_i(t) dt \\ &= \int_0^T r(t) s(t) dt, \end{aligned}$$

on arrive alors à :

$$\int_0^T r(t) s(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N_0}{2} \log \eta + \frac{1}{2} \int_0^T s(t) s(t) dt.$$

Le récepteur optimal consiste ainsi à calculer le *produit scalaire* entre $s(t)$ et $r(t)$, c'est-à-dire aussi l'intercorrélation entre $r(t)$ et $s(t)$, pour un retard nul, et à comparer le résultat à un seuil qui fait intervenir l'énergie du signal.

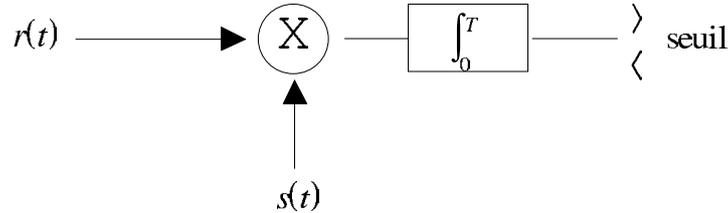


FIG. I.5: Récepteur optimal pour la détection d'un signal noyé dans du bruit.

Cette opération peut également s'interpréter comme un filtrage particulier, un *filtrage adapté*, au signal attendu $s(t)$, avec échantillonnage et prise de décision au temps T . On parlera alors de manière équivalente de récepteur à corrélation ou de récepteur à filtre adapté.

Pour caractériser le récepteur, il nous faut maintenant chercher à établir quelles sont les performances du récepteur optimal, c'est-à-dire les probabilités d'erreur, de détection, de fausse alarme, etc... Pour cela, il suffit de connaître les deux distributions de probabilité $p_{l|H_0}(l)$ et $p_{l|H_1}(l)$. La variable l étant gaussienne, il suffit alors de connaître la moyenne et la variance. On a

$$l|H_0 = \int_0^T b(t) s(t) dt \quad \text{soit} \quad E[l|H_0] = 0$$

$$l|H_1 = \int_0^T s(t)s(t) + s(t)b(t) dt \quad \text{soit} \quad E[l|H_1] = E_s$$

puis

$$\begin{aligned} \text{Var}[l|H_0] &= \text{Var}[l|H_1] = E[l^2|H_0] \\ &= E\left[\int_0^T b(t) s(t) b(u) s(u) dt du\right] \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T (s(t))^2 dt = \frac{N_0}{2} E_s, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $b(t)$ est un bruit blanc de fonction d'autocorrélation $R_{bb}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(t - \tau)$.

On définit l'*indice de performance* comme

$$d^2 = \frac{\{E[l|H_1] - E[l|H_0]\}^2}{\text{Var}(l|H_0)} = \frac{2E_s^2}{N_0 E_s} = \frac{2E_s}{N_0}.$$

Il s'agit là aussi de la valeur du rapport signal-à-bruit en sortie d'un filtre adapté. Les variables $l|H_0$ et $l|H_1$ étant respectivement deux variables gaussiennes,

$$l|H_0 = N\left(0, \frac{N_0}{2} E_s\right),$$

$$l|H_1 = N\left(E_s, \frac{N_0}{2} E_s\right),$$

la probabilité de fausse alarme s'exprime comme

$$P_{fa} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\frac{N_0}{2E_s}} \log \eta + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{l'^2}{2} \right\} dl' = Q \left(\sqrt{\frac{N_0}{2E_s}} \log \eta + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \right)$$

On trouvera enfin :

$$P_{fa} = Q \left[\log \eta \sqrt{\frac{N_0}{2E_s}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \right]$$

$$P_d = Q \left[\log \eta \sqrt{\frac{N_0}{2E_s}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \right]$$

On pourra noter que les probabilités P_{fa} et P_d ne dépendent que du rapport signal-à-bruit $\frac{2E_s}{N_0}$. D'autre part, la minimisation du risque bayésien dans le cas du signal blanc gaussien revient à maximiser le rapport signal-à-bruit et à retrouver la notion de filtre adapté.

3 Détection de signaux de phase inconnue, ou à paramètres inconnus.

Les signaux reçus sont non seulement bruités, mais il peuvent être *imparfaitement connus* : la phase, le rythme ou la fréquence des signaux reçus peuvent être mal connus, en raison de la propagation ou de la désynchronisation de l'émetteur et du récepteur. Il s'agit donc de détecter la présence de signaux qui sont eux même imparfaitement caractérisés : on considèrera par exemple le cas d'une détection binaire

$$r(t) = s_0(t, \theta) + b(t)$$

$$r(t) = s_1(t, \theta) + b(t),$$

où le paramètre θ est inconnu.

Comme classiquement, on formule le rapport de vraisemblance

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p(\mathbf{r} | H_1)}{p(\mathbf{r} | H_0)},$$

où l'on définit les distributions $p(\mathbf{r} | H_0)$ et $p(\mathbf{r} | H_1)$ comme les distributions marginales

$$\begin{cases} p(\mathbf{r} | H_0) = \int_{\theta} p(\mathbf{r} | H_0, \theta) p(\theta | H_0) d\theta, \\ p(\mathbf{r} | H_1) = \int_{\theta} p(\mathbf{r} | H_1, \theta) p(\theta | H_1) d\theta. \end{cases}$$

On dit qu'on intègre le paramètre de « nuisance » θ hors du problème. Le problème est alors résolu, si l'on se donne des les distributions *a priori* $p(\theta | H_0)$ et $p(\theta | H_1)$, et si les distributions marginales sont calculables.

Une autre possibilité souvent utilisée est de construire un *rapport de vraisemblance conditionnel* :

$$\Lambda_{\theta}(\mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | H_1, \theta)}{p(\mathbf{r} | H_0, \theta)}$$

On retient alors dans un premier temps la valeur de θ comme l'argument du maximum du rapport de vraisemblance : $\theta^* = \operatorname{argmax}_{\theta} \Lambda_{\theta}(\mathbf{r})$, puis il reste à résoudre un problème classique, avec $\theta = \theta^*$ connu. Le problème a alors été scindé en deux étapes : d'abord une étape d'*estimation* du paramètre, puis une étape de détection.

Enfin, une dernière manière de procéder, qui peut être équivalente à la première, consiste à utiliser un rapport de vraisemblance moyen :

$$\Lambda_{\theta}^{-}(\mathbf{r}) = E_{\theta} \left\{ \frac{p(\mathbf{r} | H_1, \theta)}{p(\mathbf{r} | H_0, \theta)} \right\}$$

3.1 Récepteurs pour un signal à phase inconnue

Pour illustrer le problème de la détection d'un signal à paramètres inconnus et fournir le récepteur correspondant à un cas particulier important, considérons maintenant le problème de la détection d'un signal sinusoïdal dont la phase est inconnue.

$$\begin{aligned} H_1 \quad r(t) &= \cos(2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta) + b(t) \\ H_0 \quad r(t) &= b(t) \end{aligned}$$

Après décomposition sur une bonne base, on peut écrire le rapport de vraisemblance, puis faire tendre N vers l'infini pour obtenir l'expression continue. Cette démarche ayant déjà été répétée à plusieurs reprises, on peut donner ici directement le résultat. On a en outre introduit une loi *a priori* $p_\theta(\theta)$ sur le paramètre θ , et on a exprimé les lois marginales.

$$\Lambda(r) = \int_{-\pi}^{\pi} p_\theta(\theta) d\theta \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) s_0(t, \theta) dt - \frac{4}{N_0} \int_0^T s_0(t, \theta)^2 dt \right]$$

Le signal $s_0(t, \theta) = \cos(2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta)$ peut être exprimé comme

$$\cos(\omega t + \Phi(t) + \theta) = \cos(\omega t + \Phi(t)) \cos \theta - \sin(\omega t + \Phi(t)) \sin \theta$$

On peut alors décomposer $\int_0^T r(t) s_0(t, \theta) dt$ sous la forme $L_C \cos \theta - L_S \sin \theta$, avec

$$\begin{aligned} L_C &= \int_0^T r(t) \cos[\omega t + \Phi(t)] dt \\ L_S &= \int_0^T r(t) \sin[\omega t + \Phi(t)] dt \end{aligned}$$

et le rapport de vraisemblance devient alors (à une constante près) :

$$\Lambda'(r) = \int_{-\pi}^{\pi} p_\theta(\theta) \exp \left[\frac{2}{N_0} (L_C \cos \theta - L_S \sin \theta) \right] d\theta.$$

Il nous reste maintenant à spécifier la distribution *a priori*. On peut prendre une famille de densités indexée par un paramètre L_m :

$$p_\theta(\theta, L_m) = \frac{\exp(L_m \cos \theta)}{2\pi I_0(L_m)}$$

où I_0 est la fonction de Bessel de 1ère espèce, définie par

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos(\theta+\phi)} d\theta.$$

Pour cette famille paramétrée, on a en particulier

$$\begin{aligned} L_m = 0 &\quad \rightarrow p_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \\ L_m \rightarrow \infty &\quad \rightarrow p_\theta(\theta) = \delta(\theta) \end{aligned}$$

Le rapport de vraisemblance devient alors

$$\begin{aligned} \Lambda'(r(t)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\left(L_m + \frac{2L_C}{N_0} \right) \cos \theta - \frac{2L_S}{N_0} \sin \theta \right] \frac{1}{2\pi I_0(L_m)} d\theta \\ &= \frac{1}{I_0(L_m)} \cdot I_0 \left[\left\{ \left(L_m + \frac{2L_C}{N_0} \right)^2 + \left(\frac{2L_S}{N_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

et

$$\log \Lambda'(r) = \log I_0 \left[\left\{ \left(L_m + \frac{2L_C}{N_0} \right)^2 + (L_S)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \log \eta + \frac{2E_s}{N_0} + \log I_0(L_m).$$

En tenant compte du fait que

$$I_0(x) \approx 1 + \frac{x^2}{4} \quad (x \ll 1),$$

c'est-à-dire $\log(I_0(x)) \approx \frac{x^2}{4}$,

il vient

$$\left(L_C + \frac{N_0}{2}L_m\right)^2 + L_s^2 > \gamma,$$

et on en déduit le récepteur optimal : un schéma de démodulation non cohérente typique, qui consiste à démoduler par deux signaux en quadrature, à intégrer puis à élever au carré afin de faire disparaître la dépendance en la phase inconnue : Dans ce dernier schéma, on peut remplacer la partie démodulation

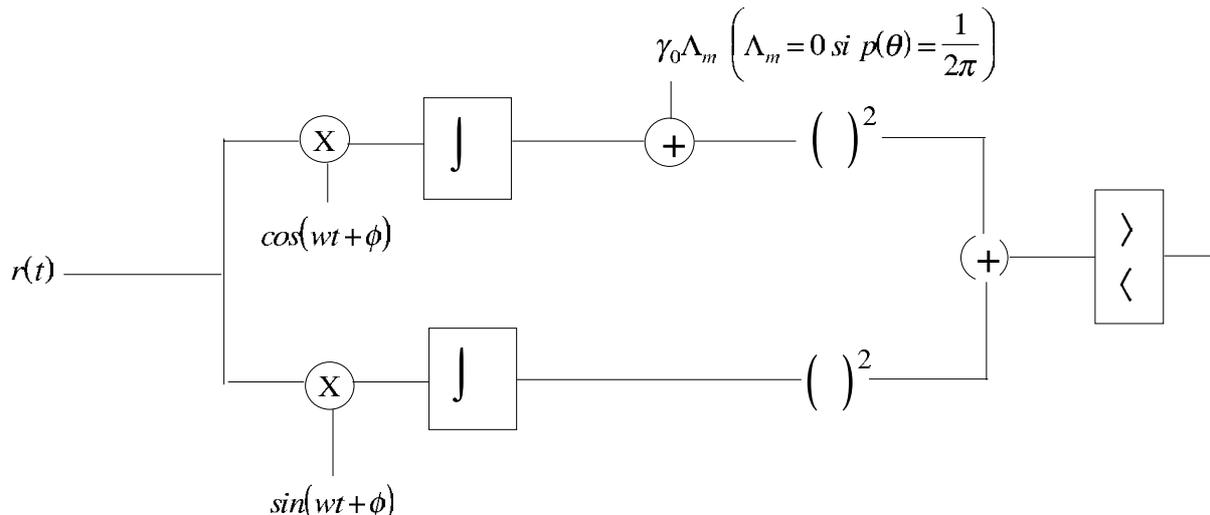


FIG. I.6: Récepteur optimal non cohérent dans le cas de la détection d'un signal dans du bruit.

et intégration (le calcul de corrélation) par un filtre adapté suivi d'un échantillonnage au temps T pour obtenir un récepteur équivalent à filtres adaptés.

Ce type de résultat s'étend à des modulations à plus d'états ; dans le cas d'une modulation M-FSK avec une incertitude sur la phase de réception, on trouverait ainsi un récepteur constitué par M voies où l'on calcule les produits scalaires du signal reçu avec les composantes en quadrature de la fréquence attendue, intégration et élévation au carré ; c'est-à-dire simplement le récepteur élémentaire précédent, répliqué pour les M fréquences potentielles. Enfin, la décision est prise en faveur de la voie fournissant la plus grande valeur.

Lorsque $L_m = 0$, le test se réduit à

$$L_C^2 + L_s^2 > \gamma,$$

et l'on doit calculer $L_C^2 + L_s^2$, ou, de manière équivalente, $\sqrt{L_C^2 + L_s^2}$. Ceci peut être réalisé en employant un filtre passe-bande isolant le signal recherché suivi par un détecteur d'enveloppe. En effet, si l'on prend $h(t) = \cos(2\pi f_0 t + \psi(t))$, alors le signal de sortie vaut

$$\begin{aligned} (h * r)(t) &= \int_0^T h(t - \tau)r(\tau) d\tau = \int_0^T \cos(2\pi f_0(t - \tau) + \psi(t - \tau)) r(\tau) d\tau \\ &= L_C \cos(2\pi f_0 t + \psi(t - \tau) - \Phi(\tau)) - L_s \sin(2\pi f_0 t + \psi(t - \tau) - \Phi(\tau)). \end{aligned}$$

L'enveloppe de la sortie du filtre est alors proportionnelle à la racine carrée du test. Il suffit donc d'utiliser un détecteur d'enveloppe après la démodulation (un seuil à zéro suivi par un filtrage passe-bas par exemple). L'enveloppe étant insensible à la phase du signal reçu, ce dispositif permet ainsi la détection. Si le signal émis comportait en outre une modulation d'amplitude $a(t)$, c'est-à-dire qu'il

serait de la forme $a(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$, alors on devrait utiliser un filtre passe-bande de réponse impulsionnelle $h(t) = b(t) \cos(2\pi f_0 t + \psi(t))$, cf [1, pages 341-343] et dans ce cas l'enveloppe de sortie est la racine du test $\sqrt{L_C^2 + L_s^2}$ à l'instant T , si on choisit $b(t) = a(T-t)$ et $\psi(t) = -\Phi(T-t)$. Ceci peut alors être interprété comme la combinaison d'une démodulation d'une part et un filtrage adapté d'autre part. Cette opération, suivie par la détection d'enveloppe et échantillonnage à l'instant T est parfois appelée *filtre adapté non cohérent*.

3.2 Récepteur pour un signal à amplitude et phase inconnue

Pour conclure ce chapitre, nous nous intéresserons au cas d'un signal issu d'un canal de Rayleigh. En l'absence de bruit d'observation, le signal recueilli a la forme

$$r(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta(t)),$$

où l'enveloppe $a(t)$ varie continûment et a une densité de probabilité de Rayleigh, et où la phase est distribuée uniformément entre 0 et 2π . Lorsque l'on a un « *fading* » lent, on peut considérer que $a(t)$ et $\theta(t)$ sont constants sur chaque durée symbole, et si on s'intéresse simplement à un problème de détection, on a

$$\begin{aligned} H_1 \quad r(t) &= a \cos(2\pi f_0 t + \theta) + b(t), \\ H_0 \quad r(t) &= b(t), \end{aligned}$$

où a est une variable aléatoire de Rayleigh et θ une variable aléatoire uniforme. On peut écrire la partie signal en fonction des composantes en quadrature :

$$a \cos(2\pi f_0 t + \theta) = a_1 \cos(2\pi f_0 t) + a_2 \sin(2\pi f_0 t) = a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t),$$

où a_1 et a_2 sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes, centrées et de même variance σ^2 . De plus, les deux composantes sont orthogonales. On obtient alors pour le rapport de vraisemblance

$$\begin{aligned} \Lambda(r(t)) &= \int \int p_{a_1}(A_1) p_{a_2}(A_2) \exp\left(\frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) (A_1 s_1(t) + A_2 s_2(t)) dt\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N_0} \int_0^T \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 A_i A_j s_i(t) s_j(t) dt\right) dA_1 dA_2. \end{aligned}$$

En définissant alors

$$L_i = \int_0^T r(t) s_i(t) dt,$$

et en utilisant l'orthogonalité entre s_1 et s_2 , on obtient

$$L_1^2 \left(\frac{\sigma_{a_1}^2}{\sigma_{a_1}^2 + N_0/2} \right) + L_2^2 \left(\frac{\sigma_{a_2}^2}{\sigma_{a_2}^2 + N_0/2} \right) > \gamma.$$

En se souvenant enfin que $\sigma_{a_1}^2 = \sigma_{a_2}^2 = \sigma^2$, et en notant que L_1 et L_2 ne sont rien d'autre que les fonctions L_C et L_s introduites précédemment, on obtient finalement

$$L_C^2 + L_s^2 > \gamma',$$

qui est le même test que celui obtenu pour le cas d'une phase aléatoire, et l'on adoptera donc les mêmes structures de récepteur. Bien entendu, les performances seront dégradées par rapport au cas où seule la phase est inconnue, mais l'étude de cette question sort du cadre de ce texte, et l'on pourra se reporter à [1].

4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons tâché de présenter des outils et une méthodologie pour comprendre ou concevoir un détecteur, et plus largement un récepteur. Cette démarche s'applique aisément au contexte radar, comme nous l'avons illustré en cours. Cependant en ce qui concerne le cas particulier du radar, il resterait à étudier d'autres aspects, comme la détection à partir d'observations multiples (réponse à un train d'impulsions), la détection séquentielle, la détection de cibles multiples. Par ailleurs, l'importante étude des performances a été éludée. Ces différents points sont donc, pour les étudiants, les thèmes à explorer pour une exploration plus approfondie, et pour l'enseignant, les thèmes à développer pour la prochaine version du cours et du polycopié...

CHAPITRE II

Bibliographie

- [1] Van Trees H. L. – *Detection, Estimation and Modulation Theory*, New York, Wiley, 1968.
- [2] Proakis J. G. – *Digital Communications*, 4^e édition, New York, Mc Graw-Hill, 2000.
- [3] Haykin S. – *Communication Systems*, 4^e édition, New York, John Wiley and Sons, 2001.