Corrigé du TD Signal I3 / IFC

Signaux aléatoires

EXERCICE 1 :

$$x(t) = B + A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

moyenne : $E[x(t)] = E[B] + E[A]\,E[\cos(2\pi f_0 t + \phi)]$

(indépendance entre A et ϕ).

Il faut déterminer

$E[\cos(2\pi f_0 t + \phi)]$ où ϕ est uniforme sur $[0, 2\pi]$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \phi)\,d\phi \qquad p(\phi) = \frac{1}{2\pi} \text{ pour } \phi \in [0, 2\pi].$$

$= 0$ (intégrale d'un cos sur une période).

Il reste alors

$$E[x(t)] = m_B + m_A \cdot 0 = m_B$$

autocorrélation :

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)\,x(t-\tau)]$$
$$= E\left[\left(B + A\cos(2\pi f_0 t + \phi)\right)\left(B + A\cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \phi)\right)\right]$$
$$= E\left[B^2 + AB\cos(2\pi f_0 t + \phi) + AB\cos(2\pi f_0(t-\tau) + \phi) + A^2\cos(2\pi f_0 t + \phi)\cos(2\pi f_0(t-\tau) + \phi)\right].$$

$*$ $E[\cos(2\pi f_0 t + \phi)\cos(2\pi f_0(t-\tau) + \phi)]$

$$= E\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\phi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

avec $E[\cos(\dots + k\phi)] = 0$

En utilisant en plus l'indépendance entre A, B et ϕ, il reste :

$$R_{xx}(\tau) = E[B^2] + E[A]E[B]\overbrace{E[\cos(\dots)]} + E[A]E[B]\overbrace{E[\cos(\dots)]} + E[A^2]E[\cos(\,)\cos(\,)]$$

$$R_{xx}(\tau) = e_B^2 + \frac{e_A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau).$$

Le moment d'ordre 1 ne dépend pas du temps et le moment d'ordre 2 (autocorrélation) ne dépend que du retard : le signal aléatoire est faiblement stationnaire d'ordre 2.

EXERCICE 2 :

moyennes : $E[y(n)] = E[x(n)]\,E[\cos(2\pi f_0 n + \phi)]$

par indépendance entre $x(n)$ et ϕ.

$= m_x \cdot 0$ (c.f. exercice 1).

$E[z(n)] = m_x \cdot 0 = 0$

autocorrélations :

$E[y(n)\,y(n-r)] = E[x(n)\,x(n-r)] \times E[\cos(2\pi f_0 n + \phi)\cos(2\pi f_0(n-r) + \phi)]$

soit $R_y(r) = R_x(r) \cdot \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 r)$.

$E[z(n)\,z(n-r)] = E[x(n)\,x(n-r)] \times E[\cos((2\pi f_0 + \lambda)n + \phi)\cos((2\pi f_0 + \lambda)(n-r) + \phi)]$

et $R_z(r) = \frac{1}{2}R_x(r)\cos(2\pi(f_0 + \lambda)r)$.

Les moments d'ordre 1 sont indépendants de n, les autocorrélations ne dépendent que du retard r : les signaux $y(n)$ et $z(n)$ sont faiblement stationnaires du second ordre.

signal $y(n)+z(n)$:

moyenne : $E[y(n)+z(n)] = E[y(n)] + E[z(n)] = 0$

autocorrélation :

$$R_{Y+Z}(n,k) = E\big[(y(n)+z(n))(y(n-k)+z(n-k))\big]$$
$$= R_Y(k) + R_{YZ}(n,k) + R_{ZY}(n,k) + R_Z(k)$$

Les autocorrélations $R_Y(k)$ et $R_Z(k)$ ont déjà été calculées et on a constaté qu'elles ne dépendent que de k (stationnarité).
Il reste à déterminer $R_{YZ}(n,k)$ et $R_{ZY}(n,k)$.

$$R_{YZ}(n,k) = E[y(n)\, z(n-k)]$$
$$= E\big[x(n)\cos(2\pi f_0 n+\phi)\, x(n-k)\cos(2\pi(f_0+\lambda)(n-k)+\phi)\big]$$
$$= E[x(n)x(n-k)]\, E[\cos(..)\cos(...)].$$

$$E[\cos(2\pi f_0 n+\phi)\cos(2\pi(f_0+\lambda)(n-k)+\phi)]$$
$$= \tfrac{1}{2} E\big[\cos(2\pi f_0(2n-k) + 2\pi\lambda(n-k) + 2\phi)\big]$$
$$+ \tfrac{1}{2} E\big[\cos(2\pi f_0 k - 2\pi\lambda(n-k))\big]$$
$$= 0 + \tfrac{1}{2}\cos(2\pi f_0 k - 2\pi\lambda(n-k))$$

soit $R_{YZ}(n,k) = \frac{1}{2} R_X(k)\cos(2\pi f_0 k - 2\pi\lambda(n-k))$.

De la même manière,

$$R_{ZY}(n,k) = \tfrac{1}{2} R_X(k)\cos(2\pi f_0 k + 2\pi\lambda n).$$

Enfin, $R_{YZ}(n,k) + R_{ZY}(n,k)$
$$= \tfrac{1}{2} R_X(k)\big[\cos(2\pi f_0 k - 2\pi\lambda(n-k)) + \cos(2\pi f_0 k + 2\pi\lambda n)\big]$$
$$= R_X(k)\cos(2\pi f_0 k + \pi\lambda k)\cos(2\pi\lambda n - \pi\lambda k)$$

L'autocorrélation $R_{Y+Z}(n,k)$ dépend <u>à la fois</u> de n et k : le signal <u>n'est pas</u> stationnaire à l'ordre 2.

EXERCICE 3 :

Prédiction linéaire ; On cherche la valeur de a qui minimise l'erreur quadratique moyenne :

$$\hat{a} = \operatorname*{Arg\,min}_a E\big[|\hat{x}(n) - x(n)|^2\big]$$
$$= \operatorname*{Arg\,min}_a E\big[|a x(n-1) - x(n)|^2\big]$$

où $\operatorname*{Arg\,min}_a$ signifie « argument du minimum de ... par rapport à a ». Il faut donc rechercher le min par rapport à a de $E[|x(n) - a x(n-1)|^2] = \gamma$

En développant :

$$\gamma = E[|x(n)|^2] - 2a\,E[x(n)x(n-1)] + a^2 E[|x(n-1)|^2]$$

(on a supposé que $x(.)$ et a sont réels)

$$\gamma = R_X(0) - 2a R_X(1) + a^2 R_X(0)$$

Le minimum est atteint pour $\hat{a}$ tel que

$$\left.\frac{d\gamma}{da}\right|_{a=\hat{a}} = 0 ,$$

(c'est bien un min puisque γ est convexe – quadratique – en a.)

soit

$$-2 R_X(1) = -2\hat{a} R_X(0) \longrightarrow \hat{a} = \frac{R_X(1)}{R_X(0)}.$$

Pour cette valeur, on a $\gamma = R_X(0) - \dfrac{R_X(1)^2}{R_X(0)}$.

Prédiction à partir de p valeurs :

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i\, x(n-i)$$

On écrit cette relation sous forme vectorielle

$$\hat{x}(n) = \underline{a}^T \underline{x}(n-1)$$

avec

$$\underline{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_p]$$
$$\underline{x}^T(n-1) = [x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-p)].$$

L'erreur quadratique est alors

$$\xi = E\left[|x(n) - \underline{a}^T . \underline{x}(n-1)|^2\right] = E\left[| x(n) - \underline{x}^T(n-1)\, \underline{a}|^2\right]$$

En dérivant la forme quadratique par rapport à $\underline{a}$, il vient :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \underline{a}} = E\left[-2\, \underline{x}(n-1)\left(x(n) - \underline{a}^T \underline{x}(n-1)\right)\right]$$

$$= E\left[-2\, \underline{x}(n-1)\left(x(n) - \underline{x}^T(n-1)\, \underline{a}\right)\right]$$

$$= -2\, \underline{R}_x + 2\, \underline{\underline{R}}_x\, \underline{a} \; ;$$

avec $\underline{R}_x^T = \left[E[x(n)x(n-1)], \dots, E[x(n)x(n-p)]\right]$

$$= \left[R_x(1), \dots, R_x(p)\right]$$

$$\underline{\underline{R}}_x = \begin{bmatrix} R_x(0) & \cdots & R_x(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ R_x(1-p) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix}$$

Il reste alors

$$\hat{\underline{a}} = \underline{\underline{R}}_x^{-1}\, \underline{R}_x$$

Rem : on retrouve bien le résultat précédent dans le cas scalaire. ($a = R_x(1)/R_x(0)$).

Erreur min : en développant ξ, on obtient

$$\xi = R_x(0) - 2\, \underline{R}_x^T \underline{a} + \underline{a}^T \underline{\underline{R}}_x\, \underline{a}$$

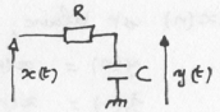
$$= R_x(0) - 2\, \underline{R}_x^T \underline{\underline{R}}_x^{-1} \underline{R}_x + \underline{R}_x^T \underline{\underline{R}}_x^{-T} \underline{R}_x\, \underline{\underline{R}}_x^{-1} \underline{R}_x$$

$$= R_x(0) - \underline{R}_x^T \underline{\underline{R}}_x\, \underline{R}_x$$

en tenant compte de $\underline{\underline{R}}_x^T = \underline{\underline{R}}_x$ (matrice symétrique).

EXERCICE 4 :

Un filtre passe bas RC possède la fonction de transfert



$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}$$

La moyenne en sortie est donnée par

$$E[y(t)] = E[x(t)] . H(0) = m_x . 1 = m_x$$

La densité spectrale de puissance en sortie est

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) . |H(f)|^2$$

$$S_{yy}(f) = \frac{N_0}{2} . \frac{1}{1 + 4\pi^2 (RC)^2 f^2}$$

On en déduit la puissance :

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(f)\, df .$$

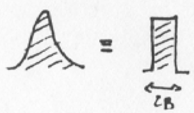
on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+a^2f^2}\, df = b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{b^2+f^2}\, df = \left[b^2\, \frac{1}{b} \operatorname{Arctg} \frac{f}{b}\right]_{-\infty}^{+\infty}$

$a = 2\pi RC$ $\qquad$ $b = 1/a$

$$= \frac{1}{a}\left[\operatorname{Arctg} af\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{a}$$

Soit finalement : $P_y = \dfrac{N_0}{2} \dfrac{1}{2RC} = \dfrac{N_0}{4RC}$.

bande équivalente :



$$P_y = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = N_0\, B\, H^2(0)$$

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \,/\, 2H(0)^2 = 1/4RC .$$

Exercice 5 :

$x(n)$ est blanc, centré, de puissance moyenne σ_x^2.

$$y(n) = x(n) + b\,x(n-1)$$
$$z(n) = x(n) + a\,z(n-1)$$

moyennes:

$$E[y(n)] = E[x(n)] + b\,E[x(n-1)]$$
$$= 0 + b.0 = 0$$
$$E[z(n)] = E[x(n)] + a\,E[z(n-1)]$$
$$m_z = 0 + a.m_z$$

or $a \neq 1$ ($a<1$ pour stabilité) $\rightarrow m_z = 0$

autocorrélations:

$$R_{yy}(k) = E[y(n)\,y(n-k)]$$
$$= E[(x(n)+b\,x(n-1))(x(n-k)+b\,x(n-k-1))]$$
$$= R_{xx}(k) + b\,R_{xx}(k+1) + b\,R_{xx}(k-1) + b^2 R_{xx}(k)$$
$$= (b^2+1)\,R_{xx}(k) + b[R_{xx}(k-1) + R_{xx}(k+1)]$$

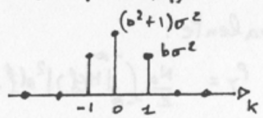
$x(n)$ est blanc $\rightarrow R_{xx}(\ell)$ n'existe que pour $\ell = 0$

$$R_{xx}(\ell) = \sigma_x^2\,\delta(\ell) = \sigma_x^2 \text{ si } \ell = 0$$
$$= 0 \text{ pour } \ell \neq 0$$

D'où $R_{yy}(0) = (b^2+1)\sigma_x^2$

$R_{yy}(1) = R_{yy}(-1) = b\,R_{xx}(0) = b\sigma_x^2$

$R_{yy}(k) = 0$ pour $|k| > 1$



$$R_{zz}(k) = E[z(n)\,z(n-k)] = E[(x(n) + a\,z(n-1))\,z(n-k)]$$
$$= R_{xz}(k) + a\,R_{zz}(k-1)$$

Évaluons $R_{xz}(k)$

$$R_{xz}(k) = E[x(n)\,z(n-k)]$$
$$= E[x(n+k)\,z(n)]$$

$z(n)$ ne dépend que des valeurs précédentes de $x(n)$,
donc pour $k>0$, $R_{xz}(k) = 0$,
donc

$$R_{zz}(k) = a\,R_{zz}(k-1) \quad k>0$$
$$R_{zz}(0) = R_{xz}(0) + a\,R_{zz}(-1)$$

or $R_{zz}(-1) = R_{zz}(1)$ par parité de l'autocorrélation,
$= a\,R_{zz}(0)$

$$R_{xz}(0) = E[x(n)(x(n) + a\,z(n-1))]$$
$$= \sigma_x^2 + \underbrace{a\,R_{xz}(1)}_{0} = \sigma_x^2$$

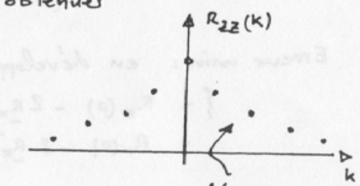
d'où $R_{zz}(0) = \sigma_x^2 + a^2 R_{zz}(0) \rightarrow R_{zz}(0) = \dfrac{\sigma_x^2}{1-a^2}$

Enfin, à partir de $R_{zz}(k) = a\,R_{zz}(k-1)$,

$$R_{zz}(k) = a^k \frac{\sigma_x^2}{1-a^2} \quad k>0$$

Les valeurs pour $k<0$ sont obtenues par symétrie

$$R_{zz}(k) = a^{|k|} \frac{\sigma_x^2}{1-a^2}$$



Exercice 6 :

variance de $x(t)$:

$$E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\,df = \int_{-\frac{B}{2}}^{B/2} 1\,df = B$$

$$\sigma_x^2 = \mathrm{Var}[x(t)] = E[x^2(t)] - m_x^2 = B - m_x^2$$

$y(t)$:

$$E[y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,x(t-\tau)\,dt\right]$$
$$= \cancel{E}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,E[x(t-\tau)]\,dt$$
$$= m_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = m_x \cdot H(0) = m_x$$

$$E[y^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{YY}(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\,|H(f)|^2\,df$$
$$= \int_{-\frac{B}{4}}^{B/4} 1\,df = \frac{B}{2}$$

$$\sigma_y^2 = \mathrm{var}[y(t)] = E[y^2(t)] - m_y^2 = \frac{B}{2} - m_x^2$$

Autocorrélation :

$R_{YY}(\tau)$ est obtenu par TF inverse de $S_{YY}(f)$ (Wiener-Kintchine), et

$$R_{YY}(\tau) = \frac{B}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\pi \frac{B}{2} \tau\right).$$

Le caractère gaussien se conservant par filtrage linéaire, le processus $y(t)$ est un processus gaussien.