TD ESTIMATION — I4-TTS

Remis par J.-F. BERCHER

Exercice n°1.

Soit $r = \theta + b$, avec $\theta \sim N(m, \sigma_\theta^2)$, $b \sim N(0, \sigma_b^2)$

Montrer que l'estimateur MAP est donné par

$$\hat{\theta}_{MAP} = \frac{m\sigma_b^2 + r\sigma_\theta^2}{\sigma_b^2 + \sigma_\theta^2}$$

Calculez l'estimateur MMSE (moyenne a posteriori)

Exercice n°2 :

- Soit $r = \theta + z$ où $z \sim N(0, \sigma_z^2)$

$\theta \,/\, p(\theta) = \frac{1}{2}(\delta(\theta-1) + \delta(\theta+1))$.

Donner les estimateurs MAP et MMSE correspondant

Exercice n°3 :

Soit $z = y + v$ — y et v sont des variables indépendantes

$p(v) = v/2$ pour $v \in [0, 2]$, $= 0$ sinon — $p(y) = 1$ pour $y \in [0, 1]$, $= 0$ sinon.

On mesure $z_1 = 2{,}5$. Quelle peut être la valeur de y, au sens MAP, MV, MMSE ?

Exercice n°4 : Estimation d'une vitesse.

Les positions d'un véhicule se déplaçant à vitesse constante sont recueillies suivant

$$y(t) = v.t + y_0 + b(t)$$

avec $b(t)$ un bruit gaussien de variance σ_b^2 et non corrélé.
Estimez $[v, y_0, \sigma_b^2]$ à partir de N mesures par maximum de vraisemblance puis, si possible, par MAP (a priori gaussien sur v, gamma sur σ_b^2 et uniforme sur y_0).

Exercice n°5 :

Dans un problème de réception radar/sonar, on recueille

$$y(n) = a\, s(n-\tau) + b(n),$$

où $b \sim N(0, \sigma^2)$, et $s(n)$ est une forme d'onde connue.
Donner la loi a posteriori du retard (a connu, $a = 1$ par exemple) et en déduire une méthode pour déterminer le retard τ.
Dans le cas où l'amplitude a est inconnue, déterminer $p(a, \tau | y)$ puis $p(\tau | y)$ en supposant a uniforme.

Exercice n°6 :

Soit
$$y(n) = A e^{j2\pi f_0 n + \phi} + b(n)$$

où $b \sim N(0, \sigma^2)$. On cherche à déterminer f_0.
Donner $p(f_0 | y, A, \phi)$, puis par marginalisation, déduisez en que $p(f_0 | y) \propto \exp\left\{ -\frac{|\sum y(n) e^{-j2\pi f_0 n}|^2}{2\sigma^2} \right\}$.

— o —

TD ESTIMATION — CORRIGÉ —

Remis par J.-F. BERCHER

Exercice n°1

$$r = \theta + b, \quad \theta \sim N(m, \sigma_\theta^2), \quad b \sim N(0, \sigma_b^2).$$

) Estimateur MAP :

$$P_{R|\theta}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_b} \exp -\frac{1}{2}\frac{(r-\theta)^2}{2\sigma_b^2}$$

$$P_\theta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\theta^2} \exp -\frac{1}{2}\frac{(\theta-m)^2}{2\sigma_\theta^2}$$

Règle de Bayes :

$$P_{\theta|R}(\theta) = \frac{P_{R|\theta}(r)\,P_\theta(\theta)}{P_R(r)}$$

d'où

$$P_{\theta|R}(\theta) \propto \exp -\frac{1}{2}\left[\frac{(r-\theta)^2}{2\sigma_b^2} + \frac{(\theta-m)^2}{2\sigma_\theta^2}\right]$$

maximisation $\longrightarrow$ $\dfrac{\partial \log P_{\theta|R}}{\partial\theta} = \dfrac{-(r-\theta)}{\sigma_b^2} + \dfrac{(\theta-m)}{\sigma_\theta^2} = 0$ pour $\theta = \hat\theta_{MAP}$

on en déduit $\hat\theta_{MAP} = \dfrac{m\sigma_b^2 + r\sigma_\theta^2}{\sigma_b^2 + \sigma_\theta^2}$.

b) MMSE.

En retravaillant l'expression de la loi a posteriori $P_{\theta|R}$, on obtient que celle-ci se met sous la forme

$$P_{\theta|R}(\theta) = K \exp -\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{m\sigma_b^2 + r\sigma_\theta^2}{\sigma_b^2+\sigma_\theta^2}\right] \Big/ \left(\frac{\sigma_\theta^2\sigma_b^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_b^2}\right)$$

où K est un facteur de proportionnalité tel que la loi soit normalisée $\int P_{\theta|R}(\theta)\,d\theta = 1$.

Il s'agit donc d'une densité gaussienne

$$N\left(\frac{m\sigma_b^2 + r\sigma_\theta^2}{\sigma_b^2+\sigma_\theta^2}, \frac{\sigma_\theta^2\sigma_b^2}{\sigma_\theta^2+\sigma_b^2}\right)$$

et on en déduit

$$E_{\theta|R}[\theta] = \hat\theta_{MMSE} = \frac{m\sigma_b^2 + r\sigma_\theta^2}{\sigma_b^2+\sigma_\theta^2}.$$

Exercice n°2

$$r = \theta + \zeta, \quad \text{où} \quad \zeta \sim N(0, \sigma_\zeta^2)$$

$$p(\theta) = \frac{1}{2}\left[\delta(\theta-1) + \delta(\theta+1)\right]$$

a) Estimateur MAP.

$$P_{\theta|R}(\theta) = \frac{P_\theta(\theta)\,P_{R|\theta}(r)}{P_R(r)}$$

$$P_{R|\theta}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\zeta} \exp -\frac{1}{2}\left[\frac{(r-\theta)^2}{\sigma_\zeta^2}\right]$$

et

$$P_{\theta|R}(\theta) = \frac{1}{P_R(r)}\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\zeta}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(r-1)^2}{\sigma_\zeta^2}\right)\delta(\theta-1) + \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(r+1)^2}{\sigma_\zeta^2}\right)\delta(\theta+1)\right)\right].$$

Pour trouver l'estimateur MAP, il faut donc décider lequel entre $|r-1|$ et $|r+1|$ est le + proche de 0, ce qui fournit le max de $P_{\theta|R}$.

En d'autres termes :

$$\hat\theta_{MAP} = +1 \text{ si } |r-1| < |r+1|$$
$$= -1 \text{ si } |r-1| > |r+1|.$$

b) Estimateur MMSE

$$\hat\theta_{MMSE} = E_{\theta|R}[\theta] = \frac{1}{2P_R(r)\sqrt{2\pi}\,\sigma_\zeta}\int \theta\left[\exp(\ )\delta(\theta-1) + \exp(\ )\delta(\theta+1)\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{2P_R(r)\sqrt{2\pi}\,\sigma_\zeta}\left[\exp\frac{-(r-1)^2}{2\sigma_\zeta^2} - \exp\frac{-(r+1)^2}{2\sigma_\zeta^2}\right]$$

Il reste à déterminer $P_R(r)$.

Par marginalisation, $P_R(r) = \int P_{R,\theta}(r,\theta)\,d\theta = \int P_\theta(\theta)\,P_{R|\theta}(r)\,d\theta$

et

$$P_R(r) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\zeta}\left[\exp -\frac{(r-1)^2}{2\sigma_\zeta^2} + \exp -\frac{(r+1)^2}{2\sigma_\zeta^2}\right]$$

Au final, on obtient donc

$$\hat{\theta}_{MMSE} = \frac{e^{-\frac{(r-1)^2}{2\sigma_z^2}} - e^{-\frac{(r+1)^2}{2\sigma_z^2}}}{e^{-\frac{(r-1)^2}{2\sigma_z^2}} + e^{-\frac{(r+1)^2}{2\sigma_z^2}}}$$

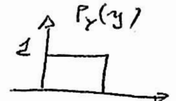
qui est un estimateur continu (en fonction de r), au contraire du MAP qui fait intervenir une décision.

Exercice n° 3

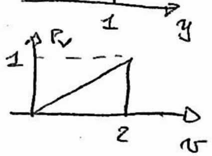
$z = y + v$

y et v indépendants,

$p_y(y) = 1$ pour $y \in [0,1]$



$p_v(v) = \frac{v}{2}$ pour $v \in [0,2]$



On mesure $z_1 = 2{,}5$

Comme $v \in [0,2]$, $y \leq z \leq y+2$

avec z_1, $y \leq 2{,}5 \leq y+2$ fournit $y \in [0{,}5, 1]$

$P_{Z|Y}(z) = P_V(z-y) = \frac{z-y}{2}$ pour $y \leq z \leq y+2$

$P_{Y|Z}(y) = P_{Z|Y}(z)\, P_Y(y) / P_Z(z) = \frac{(2{,}5-y)}{2} \times 1_{[\frac{1}{2},1]} / P_Z(z)$

$= k\,(5-2y) \times 1_{[\frac{1}{2},1]}$

où $1_{[\frac{1}{2},1]}$ est la fonction indicatrice sur $[\frac{1}{2},1]$.

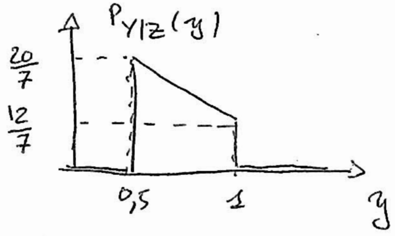
La constante de normalisation k est déterminée par

$$\int P_{Y|Z}(y)\,dy = 1 = k\int_{\frac{1}{2}}^{1}(5-2y)\,dy = k\left[5y - y^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

Soit $k = 1/(5 - 1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{4}) = 4/7$

et

$$P_{Y|Z}(y) = \frac{1}{7}(20-8y) \quad \text{pour } y \in [\tfrac{1}{2}, 1].$$



MAP $\rightarrow$ $\hat{y}_{MAP} = 0{,}5$

MV $\rightarrow$ $P_{Z|Y}(z) = \frac{z-y}{2}$ pour $z \in [y, y+2]$

maximum pour $z = y+2$, d'où $\hat{y}_{MV} = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$.

MMSE $\rightarrow$ $\hat{y}_{MMSE} = E_{Y|Z}[Y] = \int_{\frac{1}{2}}^{1} y \cdot \frac{1}{7}(20-8y)\,dy = \frac{31}{42} \simeq 0{,}73$

Médiane $\rightarrow$ Pour le coût en valeur absolue, il faut trouver $\hat{y}$ /

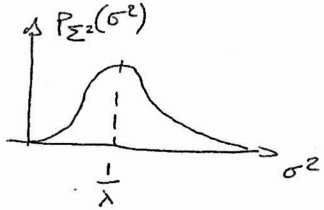
$$\int_{0,5}^{\hat{y}} P_{Y|Z}(y)\,dy = \int_{\hat{y}}^{1} P_{Y|Z}(y)\,dy$$

on obtient ici $\hat{y}_{||} \simeq 0{,}73$.

On dispose de N mesures $\underline{y} = [y(t_1) \dots y(t_N)]^T$ prises aux instants $t_1, \dots, t_N$. On pose $\underline{t} = [t_1 \dots t_N]^T$.
La matrice de corrélation du bruit est diagonale, $\underline{\underline{R}}_B = \sigma_b^2 \underline{\underline{1}}$.
On choisit comme lois a priori :

$$P_V(v) \propto \exp\left\{\frac{-(v-v_0)^2}{2\sigma_V^2}\right\}$$

$$P_{\Sigma^2}(\sigma^2) \propto \sigma^2 \exp\{-\lambda \sigma^2\}$$



Vraisemblance : La vraisemblance s'écrit :

$$P(\underline{y}|v,\sigma^2,y_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|\underline{\underline{R}}_B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{y}-v\underline{t}-y_0)^T \underline{\underline{R}}_B^{-1}(\underline{y}-v\underline{t}-y_0)\right\}$$

et la log-vraisemblance :

$$LV = \log P(\underline{y}|v,\sigma^2,y_0) = -\log|\underline{\underline{R}}_B|^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\underline{y}-v\underline{t}-y_0)^T \underline{\underline{R}}_B^{-1}(\underline{y}-v\underline{t}-y_0) - \log(2\pi)^{\frac{N}{2}}$$

Ici, comme $\underline{\underline{R}}_B = \sigma_b^2 \underline{\underline{1}}$, on a $|\underline{\underline{R}}_B| = (\sigma_b^2)^N$ $\quad \underline{\underline{R}}_B^{-1} = \frac{1}{\sigma_b^2}\underline{\underline{1}}$.

- $\frac{dLV}{dv} = +\frac{1}{2}\frac{2}{\sigma_b^2}(\underline{y}-v\underline{t}-y_0)^T\underline{t} \quad \rightarrow \quad \hat{v}_{MV} = \frac{(\underline{y}-y_0)^T\underline{t}}{\underline{t}^T\underline{t}}$
- $\frac{dLV}{d\sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma_b^2} + \frac{1}{2\sigma_b^4}(\underline{y}-v\underline{t}-y_0)^t(\underline{y}-v\underline{t}-y_0)$

$$\rightarrow \widehat{\sigma_b^2}_{MV} = \frac{1}{N}(\underline{y}-v\underline{t}-y_0)^t(\underline{y}-v\underline{t}-y_0)$$

- $\frac{dLV}{dy_0} = \frac{1}{2\sigma_b^2}\cdot 2(\underline{y}-v\underline{t}-y_0\underline{1})^T\underline{1} \quad$ avec $\underline{1}^T = [1 \dots 1]$

$$\rightarrow \hat{y}_{0\,MV} = \frac{(\underline{y}-v\underline{t})^T\underline{1}}{\underline{1}^T\underline{1}}$$

Il faut remarquer que (1) les 3 estimées sont liées : Pour calculer $\hat{v}$, il faut connaître y_0 qui lui même dépend de v... (2) $\hat{v}$ et $\hat{y}_0$ ne dépendent pas de la variance du bruit. Il est inutile de connaître σ^2 pour calculer $\hat{v}/\hat{y}_0$.

Il faut donc résoudre simultanément sur y_0 et v, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} (\underline{y}-v\underline{t}-y_0\underline{1})^T\underline{1} = 0 \\ (\underline{y}-v\underline{t}-y_0\underline{1})^T\underline{t} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \underline{t}^T\underline{t} & \underline{1}^T\underline{t} \\ \underline{t}^T\underline{1} & \underline{1}^T\underline{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}^T\underline{t} \\ \underline{y}^T\underline{1} \end{bmatrix}$$

$\underline{t}^T\underline{t} = \sum_{i=1}^{N} t_i^2 \quad \underline{1}^T\underline{1} = N \quad \underline{t}^T\underline{1} = \sum t_i \quad \underline{y}^T\underline{t} = \sum t_i y(t_i) \quad \underline{y}^T\underline{1} = \sum y(t_i)$

et

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_{MV} \\ \hat{y}_{0\,MV} \end{bmatrix} = \frac{1}{(\underline{t}^T\underline{t}\cdot\underline{1}^T\underline{1} - (\underline{t}^T\underline{1})^2)}\begin{bmatrix} \underline{1}^T\underline{1} & -\underline{t}^T\underline{1} \\ -\underline{t}^T\underline{1} & \underline{t}^T\underline{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{y}^T\underline{t} \\ \underline{y}^T\underline{1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_{MV} \\ \hat{y}_{0\,MV} \end{bmatrix} = \frac{1}{N\sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}\cdot\begin{bmatrix} N\sum t_i y(t_i) - \sum t_i \sum y(t_i) \\ -\sum t_i \sum t_i y(t_i) + \sum t_i^2 \sum y(t_i) \end{bmatrix}$$

Remarque : on pouvait mener celà directement depuis la LV :

$$LV \propto \left(\underline{y} - [\underline{t}\ \underline{1}]\begin{bmatrix} v \\ y_0 \end{bmatrix}\right)^T\left(\underline{y} - \underbrace{[\underline{t}\ \underline{1}]}_{\underline{A}}\underbrace{\begin{bmatrix} v \\ y_0 \end{bmatrix}}_{\underline{\theta}}\right)$$

Posons $\underline{A} = [\underline{t}\ \underline{1}]$.

Il vient $\frac{dLV}{d\underline{\theta}} = 2\underline{A}^T(\underline{y}-\underline{A}\underline{\theta})$

d'où $\hat{\underline{\theta}} = \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix} = (\underline{A}^T\underline{A})^{-1}\underline{A}^T\underline{y}$

Il reste que ce problème est simple puisque l'on peut résoudre en $\hat{v}, \hat{y}_0$ indépendemment de σ^2. Pour résoudre (dans un pb plus difficile) simultanément sur les 3 variables, il faudrait traiter un pb de optimisation non linéaire, ce qui ne peut [illegible]

Lorsque y_0 est connu, la solution $\hat{v}_{MV}$ est bien sûr

$$\boxed{\hat{v}_{MV} = (\underline{y} - y_0)^T \cdot \underline{t} \,/\, \underline{t}^T \cdot \underline{t}}$$

Maximum a posteriori

$$p(v, \sigma_b^2, y_0 | \underline{y}) = p(\underline{y} | v, \sigma_b^2, y_0) \cdot p(v, \sigma_b^2, y_0)$$

$$= \quad '' \quad p(v)\, p(\sigma_b^2)\, p(y_0)$$

Supposons que y_0 est uniforme a priori sur un intervalle $[-y_{max}, y_{max}]$.

Le log a posteriori s'écrit

$$Lap = LV + \underbrace{\log \sigma_b^2 - \lambda \sigma_b^2}_{\text{a priori sur } \sigma_b^2} - \underbrace{\frac{(v - v_0)^2}{2\sigma_v^2}}_{\text{a priori sur la vitesse}} + \log\left(\Pi_{y_{max}}(y_0)\right)$$

$$\frac{d\,Lap}{dv} = \frac{dLV}{dv} - \frac{2(v - v_0)}{2\sigma_v^2} = \frac{1}{\sigma_b^2}(\underline{y} - v\underline{t} - y_0)^T \underline{t} - \frac{(v - v_0)^2}{\sigma_v^2}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\hat{v}_{MAP} = \frac{(\underline{y}^T \underline{t} - y_0 \underline{1}^T \underline{t}) + v_0 \frac{\sigma_b^2}{\sigma_v^2}}{\underline{t}^T \underline{t} + \sigma_B^2 / \sigma_V^2}}$$

On observe que

- si $\sigma_V^2 \to \infty$, $\hat{v}_{MAP} \to \hat{v}_{MV}$ car l'apriori devient uniforme
- si $\underline{t}^T \underline{t}$ est faible (peu de mesures), $\hat{v}_{MAP} \simeq v_0$ la valeur a priori
- si σ_B^2 est grand (mesures très bruitées), $\hat{v}_{MAP} \to v_0$
- si $\underline{t}^T \underline{t}$ est grand (beaucoup de mesures), $\hat{v}_{MAP} \to \hat{v}_{MV}$

$\hat{v}_{MAP}$ dépend cette fois ci de σ_B^2. La recherche du max de l'a posteriori / à l'ensemble des paramètres est un problème d'optimisation non linéaire.

Exercice 5-

$$y(n) = a\, s(n - \tau) + b(n)$$

où $b \sim N(0, \sigma_b^2)$ supposé blanc

$s(n)$ est une forme d'onde connue

a est une amplitude, que l'on supposera dans la suite gaussienne $N(0, \sigma_a^2)$.

Supposons que l'on dispose de N points, et notons

$$\underline{y}(n) = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n-1) \\ \vdots \\ y(n-N+1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{s}(n-\tau) = \begin{bmatrix} s(n-\tau) \\ s(n-1-\tau) \\ \vdots \\ s(n-\tau+1-N) \end{bmatrix}$$

...

La vraisemblance est :

$$P(\underline{y} | a, \tau) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^N} \exp - \frac{\|\underline{y}(n) - a\,\underline{s}(n\|}{2\sigma_b^2}$$

Via la règle de Bayes, on obtient

$$P(a, \tau | \underline{y}) = \frac{P(\underline{y} | a, \tau)\, P(a, \tau)}{P(\underline{y})}.$$

$$\propto \exp - \frac{1}{2\sigma_b^2}(\underline{y}(n) - a\,\underline{s}(n-\tau))^t (\underline{y}(n) - a\,\underline{s}(n-\tau))$$

$$\cdots \times p(a, \tau | \underline{y}).$$

Développons le terme quadratique :

$$Q = (\underline{y}(n) - a\,\underline{s}(n-\tau))^t (\underline{y}(n) - a\,\underline{s}(n-\tau))$$

$$= \underline{y}(n)^t \underline{y}(n) - 2a\,\underline{y}(n)^t \underline{s}(n-\tau) + a^2 \underline{s}(n-\tau)^t \underline{s}(n-\tau)$$

Lorsque N est assez grand, $\underline{s}(n-\tau)^t \underline{s}(n-\tau)$ est simplement l'énergie du signal émis, et ne dépend pas du retard τ.

En notant E_y et E_s les énergies de y et s respectivement, on a alors

$$Q = E_y - 2a\,\underline{y}(n)^t \underline{s}(n-\tau) + a^2 E_s.$$

le produit scalaire $\underline{y}^T(n)\,\underline{s}(n-\tau)$ est simplement (une estimée de) la fonction d'intercorrélation R_{ys}.

$$\hat{R}_{ys}(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} y(n-i)\,s(n-i-\tau)$$

On obtient ainsi

$$p(a,\tau|\underline{y}) \propto e^{-\frac{E_y}{2\sigma_b^2}}\, e^{\frac{2aR_{ys}(\tau)}{2\sigma_b^2}}\, e^{\frac{a^2E_s}{2\sigma_b^2}}\, p(a,\tau).$$

Supposons pour le moment que a soit connu et fixé, $a=1$ par ex. et prenons pour la distribution a priori sur τ une loi uniforme sur l'intervalle des retards possibles.

Alors,

$$\boxed{p(\tau|\underline{y}) \propto e^{\frac{R_{ys}(\tau)}{\sigma_b^2}}}.$$

La distribution du retard, compte tenu des observations, est ainsi l'exponentielle de la fonction d'intercorrélation, pondérée par l'inverse de la variance du bruit. Cette distribution a posteriori sera donc maximale pour le maximum de $R_{ys}(\tau)$, et d'autant plus "piquée" que le bruit d'observation sera faible.

L'estimateur MAP consiste donc à <u>rechercher le maximum de la fonction d'intercorrélation</u>.

La situation est plus difficile lorsque l'amplitude de retour est inconnue (atténuations lors de la propagation et réflexions).

Reprenons à partir de

$$p(a,\tau|\underline{y}) \propto e^{-\frac{a^2E_s + 2aR_{ys}(\tau)}{2\sigma_b^2}}\, p(a,\tau)$$

On prend a et τ indépendants, ce qui n'est pas absurde, et

$$p_A(a) \propto \exp\left[-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right]$$

$$p(a,\tau|\underline{y}) \propto \exp\left[-a^2\left(\frac{E_s}{2\sigma_b^2}+\frac{1}{2\sigma_a^2}\right) + \frac{2aR_{ys}(\tau)}{2\sigma_b^2}\right] p(\tau)$$

Posons $\frac{1}{2\alpha^2} = \left(\frac{E_s}{2\sigma_b^2}+\frac{1}{2\sigma_a^2}\right)$. L'argument de l'exponentielle peut alors s'écrire :

$$-\frac{a^2}{2\alpha^2} + \frac{2a\alpha^2 R_{ys}(\tau)}{2\alpha^2\sigma_b^2} - \left(\frac{\alpha^2R_{ys}(\tau)}{2\alpha^2\sigma_b^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^2R_{ys}(\tau)}{2\alpha^2\sigma_b^2}\right)^2$$

$$= -\frac{(a-\alpha^2R_{ys}(\tau))^2}{2\alpha^2} + \left(\frac{R_{ys}(\tau)}{2\sigma_b^2}\right)^2$$

Ainsi,

$$p(a,\tau|\underline{y}) \propto \exp -\frac{1}{2\alpha^2}(a-\alpha^2R_{ys}(\tau))^2 \cdot \exp\left(\frac{R_{ys}(\tau)}{2\sigma_b^2}\right) \times p(\tau).$$

On peut obtenir la loi a posteriori par rapport à τ en marginalisant / à a :

$$p(\tau|y) = \int p(a,\tau|y)\,da$$

et comme nous avons mis la dépendance en a sous la forme d'un terme gaussien, il reste

$$p(\tau|y) \propto \exp\left[\frac{R_{ys}(\tau)}{2\sigma_b^2}\right]^2.$$

Ainsi, lorsque l'amplitude du retour est inconnue, la procédure consistera à rechercher le maximum <u>du carré de la fonction d'intercorrélation</u>. Ceci permet en particulier de s'affranchir du cas où l'amplitude serait négative...

Exercice n°6 -

Cet exercice peut être traité de la même manière que l'exercice précédent. On a ici

$$y(n) = \underbrace{A e^{j\phi}}_{a} \cdot \underbrace{e^{j2\pi f_0 n}}_{s(n)} + b(n). \qquad n = 0 \ldots N-1$$

Une différence est que cette fois-ci a est un complexe. Pour un gaussien complexe "circulaire" (parties réelles et imaginaires indépendantes, ou $||$ et ϕ indépendantes), la densité s'écrit

$$P(a) \propto \exp -\frac{|a|^2}{\sigma_a^2} \qquad (\text{plus de facteur } \tfrac{1}{2})$$

On obtient

$$P(a, f_0 | \underline{y}) \propto \exp -\frac{(\underline{y}(n) - a\,\underline{s}(n))^+ (y(n) - a\,s(n))}{\sigma_b^2}$$

$$\begin{aligned} Q &= (\underline{y}(n) - a.\underline{s}(n))^+ (\underline{y}(n) - a\,\underline{s}(n)) \\ &= \underline{y}^+\underline{y} - a^* \underline{s}(n)^+ \underline{y}(n) - a\,\underline{y}(n)^+ \underline{s}(n) + |a|^2 \underline{s}(n)^+ \underline{s}(n) \\ &= E_y - 2\,\mathrm{Re}\left\{ a\,\underline{y}(n)^+ \underline{s}(n) \right\} + |a|^2 E_s \end{aligned}$$

où $^+$ est le transposé-conjugué

à a fixé ($a = 1$ pour fixer les idées) et f_0 uniforme sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ie sur toute une période de fréquences réduites, on obtient

$$P(f_0 | \underline{y}) \propto \exp\left[2\mathrm{Re}\left\{ \underline{y}(n)^+ \underline{s}(n) \right\} \right]$$

$$\propto \exp\left[\frac{2\,\mathrm{Re}}{\sigma_b^2} \left\{ \sum_{\ell=0}^{N-1} y(\ell)\, e^{-j2\pi f_0 \ell} \right\} \right]$$

En d'autres termes, <u>la recherche de f_0 consiste à rechercher le max de la partie réelle de la TF des données...</u>

Lorsque l'amplitude a est inconnue, il faut marginaliser / à a pour obtenir $p(f_0|\underline{y})$. De la même manière que précédemment, avec a gaussien complexe, on arrive à :

$$P(a, f_0 | \underline{y}) \propto \exp\left[-\frac{1}{\alpha^2} \left\| a - \alpha^2 \mathrm{TF}\{\underline{y}\} \right\|^2 \right] \exp\left[\frac{\|\mathrm{TF}\{\underline{y}\}\|^2}{\sigma_b^2} \right] \times p(f_0)$$

et

$$\boxed{P(f_0 | \underline{y}) \propto \exp \frac{\|\mathrm{TF}\{\underline{y}\}\|^2}{\sigma_b^2}}$$

Ainsi, pour détecter une sinusoïde d'amplitude et phase inconnue noyée dans un bruit blanc gaussien, la procédure optimale au sens du MAP, consiste à rechercher le maximum du module carré de la TF des données..., c'est-à-dire le max du périodogramme.

—— o ——