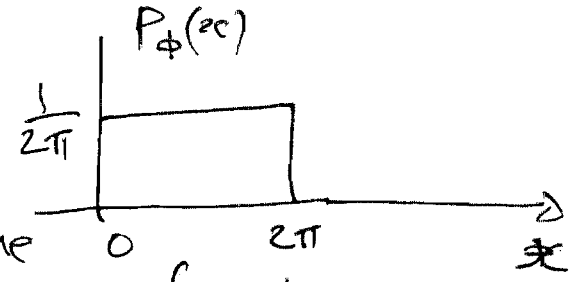
TD I3 - Signaux aléatoires
Éléments de corrigé

Exercice n° 1

On considère $X(t,\omega) = A\cos(2\pi f_0 t + \Phi(\omega))$,
où $\Phi(\omega)$ est une phase aléatoire de densité uniforme sur $[0, 2\pi]$.



- La densité est uniforme et représentée ci-contre amplitude de $1/2\pi$ pour que $\int P_\Phi \, d\Phi = 1$

- moyenne

$$E[X(t,\omega)] = \int P_\Phi(\Phi) \cdot A\cos(2\pi f_0 t + \Phi)\, d\Phi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A\cos(2\pi f_0 t + \Phi)\, d\Phi$$

l'intégrale <u>sur Φ</u> porte sur une période du cosinus et par conséquent

$$E[X(t,\omega)] = 0$$

- moment d'ordre 2 - Autocorrélation

$$E[X(t,\omega)\, X(t-\tau,\omega)] = A^2 E\Big[\cos(2\pi f_0 t + \Phi) \times \cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \Phi)\Big]$$
$$= A^2 E\Big[\tfrac{1}{2}\cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\Phi) + \tfrac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)\Big]$$

en développant le $\cos a \cos b$

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

et $R_X(t, t-\tau) = E\left[\frac{A^2}{2}\cos(\text{—} + 2\phi) + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)\right]$

$$= \underbrace{\frac{A^2}{2}E\left[\cos(\text{—} + 2\phi)\right]}_{\substack{= 0 \text{ car} \\ \text{moyenne d'un} \\ \text{cos sur 2 périodes}}} + \underbrace{\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)}_{\substack{\text{nombre} \\ \text{certain}}}$$

soit $R_X(t, t-\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$

ne dépend que de τ.

Comme la moyenne (nulle) est indépendante du temps et R_X ne dépend que du décalage τ, on en déduit que $X(t,\omega)$ est <u>stationnaire</u> à l'ordre 2.

<u>Ergodisme</u>

- On calcule $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T A\cos(2\pi f_0 t + \phi)\, dt$

$$= \lim \frac{1}{T}\left[\frac{\sin(2\pi f_0 t + \phi)}{2\pi f_0}\right]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\sin(2\pi f_0 T + \phi)}{2\pi f_0 T} - \frac{\sin(\phi)}{2\pi f_0 T}$$

$$= 0$$

- puis

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int X(t,\omega)X(t-\tau,\omega)\, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A^2}{2} \cos\left(2\pi f_0 (2t-\tau) + 2\phi\right) dt + \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{A^2}{2} \frac{\sin\left(2\pi f_0 (2T-\tau) + 2\phi\right) - \sin(2\phi)}{2\pi f_0 T} + \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$= \qquad 0 \qquad + \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

On vérifie donc que quand $T \to \infty$, alors les moyennes temporelles deviennent des nombres certains (ne dépendent pas de $\phi(\omega)$) et que dans ce cas, on a bien

$$E[\bullet] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bullet \, dt$$

EXERCICE 5 :

Prédiction linéaire ; On cherche la valeur de a qui minimise l'erreur quadratique moyenne :

$$\hat{a} = \operatorname{Arg}\min_a E\left[|\hat{x}(n) - x(n)|^2\right]$$

$$= \operatorname{Arg}\min_a E\left[|a\,x(n-1) - x(n)|^2\right]$$

où $\operatorname{Arg}\min_a$ signifie « argument du minimum de... par rapport à ». Il faut donc rechercher le min par rapport à a de $E\left[|x(n) - a\,x(n-1)|^2\right] = \xi$

En développant :

$$\xi = E\left[|x(n)|^2\right] - 2a\,E\left[x(n)\,x(n-1)\right] + a^2 E\left[|x(n-1)|^2\right]$$

(on a supposé que $x(\cdot)$ et a sont réels)

$$\xi = R_x(0) - 2a\,R_x(1) + a^2 R_x(0)$$

Le minimum est atteint pour $\hat{a}$ tel que

$$\left.\frac{d\xi}{da}\right|_{a=\hat{a}} = 0\,,$$

(c'est bien un min puisque ξ est convexe – quadratique – en a.)

soit

$$-2\hat{a}\,R_x(1) = -2\hat{a}\,R_x(0) \longrightarrow \hat{a} = \frac{R_x(1)}{R_x(0)}.$$

Pour cette valeur, on a $\xi = R_x(0) - \dfrac{R_x^2(1)}{R_x(0)}$.

Prédiction à partir de p valeurs :

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i\, x(n-i)$$

On écrit cette relation sous forme vectorielle

$$\hat{x}(n) = \underline{a}^T \underline{x}(n-1)$$

avec

$$\underline{a}^T = [a_1, a_2, \ldots, a_p]$$

$$\underline{x}^T(n-1) = [x(n-1), x(n-2), \ldots, x(n-p)].$$

L'erreur quadratique est alors

$$\xi = E\left[\left|x(n) - \underline{a}^T \cdot \underline{x}(n-1)\right|^2\right] = E\left[\left|x(n) - \underline{x}^T(n-1)\,\underline{a}\right|^2\right]$$

En dérivant la forme quadratique par rapport à $\underline{a}$, il vient :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \underline{a}} = E\left[-2\,\underline{x}(n-1)\left(x(n) - \underline{a}^T \underline{x}(n-1)\right)\right]$$

$$= E\left[-2\,\underline{x}(n-1)\left(x(n) - \underline{x}^T(n-1)\,\underline{a}\right)\right]$$

$$= -2\,\underline{R}_x + 2\,\underline{\underline{R}}_x\,\underline{a}\ ;$$

avec

$$\underline{R}_x^T = \left[E[x(n)x(n-1)], \dots, E[x(n)x(n-p)]\right]$$
$$= [R_x(1), \dots, R_x(p)]$$

$$\underline{\underline{R}}_x = \begin{bmatrix} R_x(0) & \cdots & R_x(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(1-p) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix}$$

Il reste alors

$$\hat{\underline{a}} = \underline{\underline{R}}_x^{-1}\,\underline{R}_x\ .$$

<u>Rem</u> : on retrouve bien le résultat précédent dans le cas scalaire. $(a = R_x(1)/R_x(0))$.

Erreur min : en développant ξ, on obtient

$$\xi = R_x(0) - 2\,\underline{R}_x^T\underline{a} + \underline{a}^T\underline{\underline{R}}_x\,\underline{a}$$

$$= R_x(0) - 2\,\underline{R}_x^T\underline{\underline{R}}_x^{-1}\underline{R}_x + \underline{R}_x^T\underline{\underline{R}}_x^{-T}\underline{\underline{R}}_x\,\underline{\underline{R}}_x^{-1}\underline{R}_x$$

$$= R_x(0) - \underline{R}_x^T\underline{\underline{R}}_x\,\underline{R}_x$$

en tenant compte de $\underline{\underline{R}}_x^T = \underline{\underline{R}}_x$ (matrice symétrique).

Exercice n°3

$$x(n) = A\, s(n-n_0) + b(n)$$

Le filtre adapté est le filtre de RI

$$h(k) = s(-k)$$

Dans ce cas, la sortie s'écrit

$$y(n) = (h * x)(n) = A(s_{-n_0} * s^{(-)})(n) + (s^{(-)} * b)(n)$$

où $s_{-n_0}(n) = s(n-n_0)$ et $s^{(-)}(n) = s(-n)$

La convolution s'écrit de manière générique

$$(x * y)(n) = \sum_k x(k)\, y(n-k)$$

$$\begin{aligned}(s_{-n_0} * s^{(-)})(n) &= \sum_k s_{-n_0}(k) \cdot s^{(-)}(n-k) \\ &= \sum_k s(k-n_0)\, s(-n+k) \\ &= L \cdot \hat{R}_{ss}(n-n_0)\end{aligned}$$

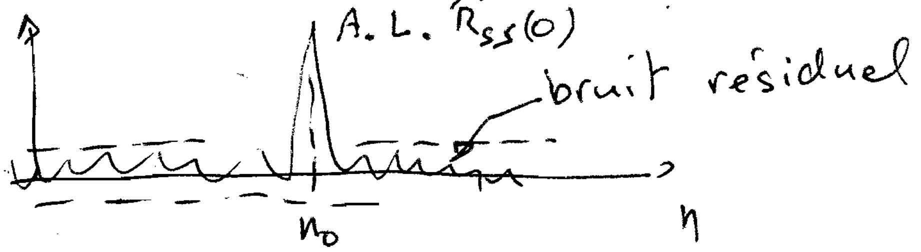
où L est le nombre de points sur lequel porte la somme, typiquement la longueur de $s(n)$, avec $\hat{R}_{ss}(k) = \frac{1}{L} \sum_n s(n)\, s(n-k)$.

De même,

$$(s^{(-)} * b)(n) = \sum_k b(k)\, s(k-n) = L\, \hat{R}_{BS}(n)$$

Ainsi, $y(n) = L A \hat{R}_{ss}(n-n_0) + L \hat{R}_{BS}(n)$.

Dès lors, on voit qu'en moyenne la sortie $y(n)$ est simplement la fonction de corrélation de $s(n)$, $R_{ss}(n)$, décalée en n_0. Comme la fonction de corrélation est maximale en 0, $R_{ss}(n-n_0)$ sera maximale en $n=n_0$ et on pourra ainsi, en recherchant le max, identifier n_0. On en déduit ensuite l'amplitude A.



Le bruit de sortie est

$$y_B(n) = (s^{(-)} * b)(n)$$
$$= \sum b(k)\, s^{(-)}(k-n) = \sum s^{(-)}(k)\, b(n-k)$$

$$|y_B(n)|^2 = \sum_k s^{(-)}(k)\, b(n-k) \sum_\ell s^{(-)}(\ell)\, b(n-\ell)$$

$$E\left[|y_B(n)|^2\right] = \sum_k \sum_\ell s^{(-)}(k)\, s^{(-)}(\ell)\, E\left[b(n-k)\, b(n-\ell)\right]$$
$$= \sum_k \sum_\ell s^{(-)}(k)\, s^{(-)}(\ell)\, R_{bb}(k-\ell)$$

Si $b(n)$ est blanc, ce qui est l'hypothèse ici, alors $R_{bb}(k-\ell) = \sigma_b^2\, \delta(k-\ell)$

se qui impose $k=\ell$ dans la somme

et $$E\left[|y_B|^2\right] = \sum_k s^{(-)}(k)^2 \cdot \sigma_b^2$$

$$E\left[|y_B|^2\right] = \sigma_B^2 \sum_k s^{(-)}(k)^2 = \sigma_B^2 \cdot P_s$$

P_s : puissance de $s = P_{s^{(-)}}$!

NB ceci est vrai de manière générale, si $h(k)$ est la RI d'un filtre, la sortie en réponse à un bruit blanc est de puissance

$$\mathbb{E}\left[|y_B|^2\right] = \sigma_b^2 \sum_k h(k)^2$$

NB

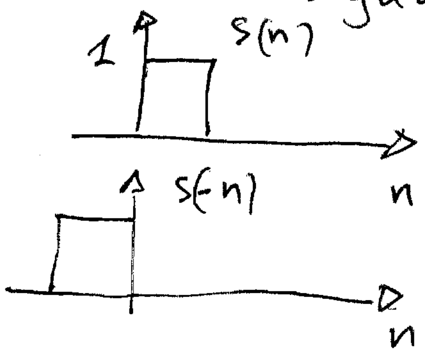
$$R_{Y_bY_b}(k) = E\left[|y_B|^2\right] = (h * h^{(-)} * R_{BB})(k)$$

si b est blanc $\rightarrow R_{BB}(k) = \sigma^2 \delta(k)$

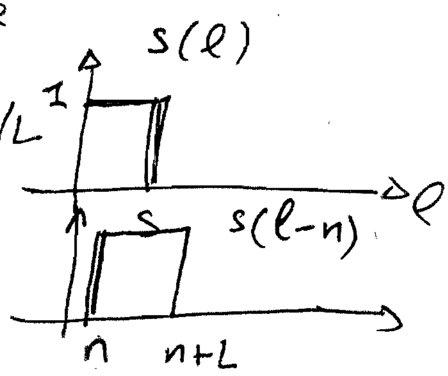
et $R_{Y_bY_b}(k) = \sigma^2 . (h * h^{(-)})(k)$

en 0 : $R_{Y_bY_b}(0) = \sigma^2 (h * h^{(-)})(0) = \sigma^2 \sum_\ell h(\ell)^2$

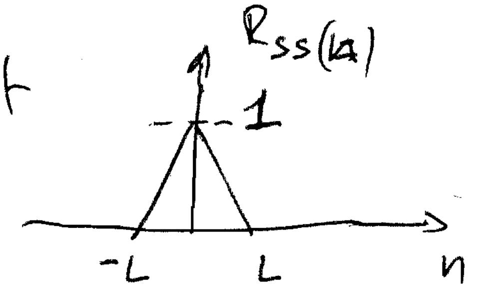
Cas d'un signal rectangulaire



$$\hat{R}_{ss} = (s * s^{(-)})/L$$



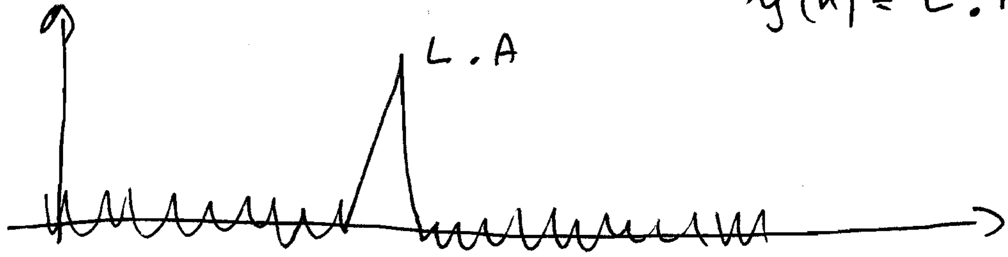
et



$$\hat{R}_{ss}(n) = \frac{1}{L} \sum_\ell s(\ell)\, s(\ell - n)$$

La sortie du filtre a donc l'allure

$$y(n) = L \cdot \hat{R}_{SS}(n-n_0) + L R_{BS}$$



ici $R_{Y_bY_b}(0) = \sigma_B^2 \sum_{\ell} s(\ell)^2 = \sigma_B^2 \cdot L = \sigma_{out}^2$

La proba de dépassement d'un seuil à 3σ est de $\sim 1\%$ (cas gaussien). Il faut donc ici que $AL > 3\sigma_{out} = 3\sqrt{L}\,\sigma_B$ soit

$$A > \frac{3\,\sigma_B}{\sqrt{L}}.$$

Applications pratiques : cf TP..

EXERCICE n° 4

$X_N(f,\omega)$ est la TF d'un SA défini sur N points (la TF d'un signal aléatoire stationnaire n'est a priori pas définie de $-\infty$ à $+\infty$).

$$\underbrace{X_N(f,\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} X(n,\omega)\, e^{-j2\pi f n}$$

dépend de la réalisation ω = aléatoire

- $$E[X(f,\omega)] = \sum_n E[X(n,\omega)]\, e^{-j2\pi f n}$$
$$= \sum_n m_x\, e^{-j2\pi f n} = m_x \left(\frac{\sin \pi f N}{\sin \pi f}\right) * \exp(-j\pi f(N-1))$$
$$= 0 \quad \text{si } \underline{m_x = 0}$$

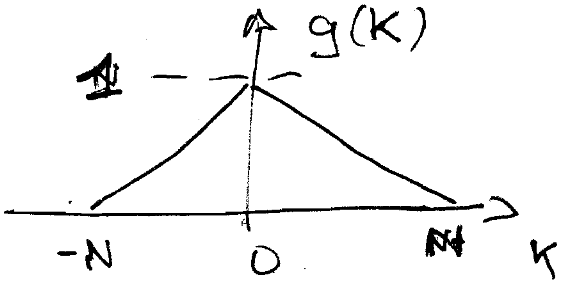
- $$E\left[|X(f,\omega)|^2\right] = E\left[\underbrace{\sum_n X(n,\omega)e^{-j2\pi f n}}_{X(f,\omega)} \cdot \underbrace{\left(\sum_\ell X(\ell,\omega)e^{-j2\pi f \ell}\right)^*}_{X(f,\omega)^*}\right]$$
$$= \sum_n \sum_\ell E\left[X(n,\omega)X(\ell,\omega)^*\right] e^{-j2\pi f(n-\ell)}$$
$$= \sum_n \sum_\ell R_{xx}(n-\ell)\, e^{-j2\pi f(n-\ell)}$$

On fait un changement de variable en $k = n - \ell$

n et ℓ variant de 0 à $N-1$, on obtient k : $-(N-1)$ à $(N-1)$

Dans le changement de variable, il faut également tenir compte de la multiplicité des termes : le terme $n-l=0$ peut être obtenu N fois ($n=l=0$, $n=l=1$, ... $n=l=N-1$) le terme $n-l=1$ est obtenu $(N-1)$ fois, etc.

On note $N.g(n)$ la fonction correspondante, qui est une fonction « triangle »



Ainsi,

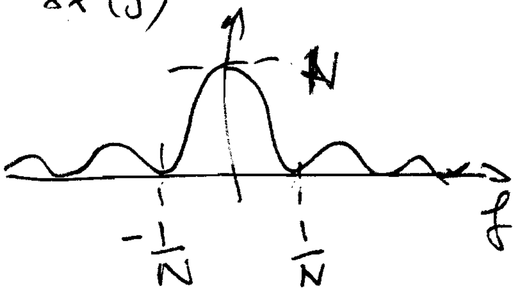
$$E\left[|X(f,\omega)|^2\right] = \sum_k N.\, g(k).\, R_{xx}(k)\, e^{-j2\pi f k}$$

où l'on reconnaît la TF d'un produit

$$= N.\mathrm{TF}\left\{ g(k).\, R_{xx}(k) \right\}$$

$$= N.\; G(f) * S_{xx}(f)$$

avec $G(f) = N\left(\dfrac{\sin \pi f N}{N \sin \pi f}\right)^2$



Lorsque N grandit, $G(f) \to \delta(f)$, et dans ce cas il reste

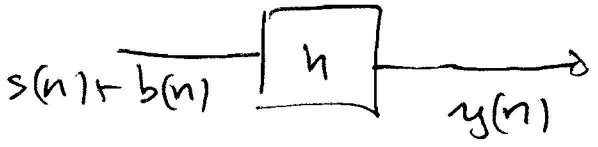
$$\lim_{N\to\infty} \frac{E\left[|X(f,\omega)|^2\right]}{N} = S_{xx}(f)$$

<u>Conclusion</u> : la moyenne du carré de la TF, à N près, est la dsp. Une valeur approchée $\hat{S}_{xx}(f)$ de la dsp est ainsi $\hat{S}_{xx}(f) = |X(f)|^2/N$.

[mais c'est une très mauvaise estimée]

EXERCICE 5

Trouver la RI $h(k)$ d'un filtre permettant de débruiter $x(n) = s(n) + b(n)$



Ce que l'on veut ici est obtenir $y(n) \sim s(n)$.
Écrivons-le ! Soit l'erreur $e(n) = y(n) - s(n)$, on cherche $h(n)$ tel que

$$E[e(n)^2] \quad \text{soit minimum}$$

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{p-1} h(\ell)\, x(n-\ell) = \underline{h}^t \cdot \underline{x}(n)$$

avec $\underline{h}^t = [h(0) \dots h(p-1)]$

$\underline{x}(n)^t = [x(n)\ x(n-1) \dots x(n-p+1)]$

On cherche la dérivée / à $\underline{h}$

$$\frac{d\,\bullet}{d\underline{h}} = \begin{bmatrix} \frac{d\,\bullet}{dh(0)} \\ \vdots \\ \frac{d\,\bullet}{dh(p-1)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\,E[e(n)^2]}{d\underline{h}} = E\left[2\,\frac{d e(n)}{d\underline{h}} \cdot e(n)\right]$$

$$e(n) = \underbrace{\underline{h}^T \cdot \underline{x}(n)}_{y(n)} - s(n) \longrightarrow \frac{d e(n)}{d\underline{h}} = \underline{x}(n)$$

Il reste alors

$$E\left[\underline{x}(n)\, e(n)\right] = \underline{0}$$

$$E\left[\underline{x}(n) \cdot \left(\underline{h}^T \underline{x}(n) - s(n)\right)\right]$$

$$= E\left[\underline{x}(n)\left(\underline{x}(n)^T \cdot \underline{h} - s(n)\right)\right] = E\left[\underline{x}(n)\underline{x}(n)^T\right]\underline{h} - E\left[\underline{x}(n) s(n)\right]$$

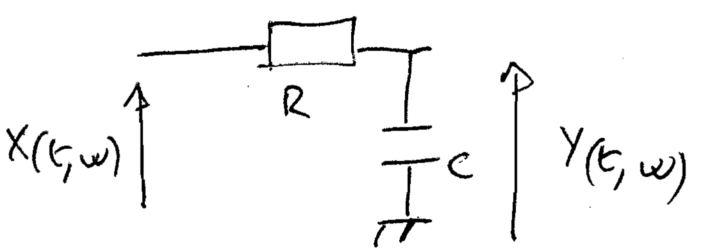
$$= \underline{\underline{R}}_{xx}\, \underline{h} - \underline{R}_{xs} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{R}}_{xx} = E\left[\underline{x}(n)\underline{x}(n)^T\right]$$

$$\underline{R}_{xs} = E\left[\underline{x}(n)\, s(n)\right]$$

et $\boxed{\underline{h} = \underline{\underline{R}}_{xx}^{-1}\, \underline{R}_{xs}}$

Filtre de Wiener discret

EXERCICE 6



Pour ce filtre, on sait que

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}$$

La moyenne de la sortie est donnée par

$$E\left[Y(t,\omega)\right] = H(0)\, E\left[X(t,\omega)\right]$$

$$= 1 \times m_X = m_X = 0$$

car l'entrée est blanche (donc de moyenne nulle).

La RI vaut $h(t) = \frac{1}{\Delta} e^{-t/\Delta}$ avec $\Delta = RC$ la constante de temps.

La fonction d'autocorrélation de la sortie est donnée par la formule des interférences :

$$R_{YY}(\tau) = (h * h^{(-)} * R_{XX})(\tau)$$

ce qui, avec X blanc se réduit à

$$R_{YY}(\tau) = \sigma_X^2 (h * h^{(-)})(\tau)$$

$$(h * h^{(-)})(\tau) = \frac{1}{\Delta^2}\int e^{-t/\Delta} e^{-(t-\tau)/\Delta} u(t) \cdot u(t-\tau)\, dt$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\Delta}} e^{\tau/\Delta}\, dt \quad \text{pour } \tau \cancel{>} 0$$

$$=$$

$\begin{cases} u(t) : 0 \dots +\infty \\ u(t-\tau) : \tau \dots +\infty \end{cases}$ → si $\tau < 0$, l'intersect° des 2 domaines est $0 \dots +\infty$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left[-\frac{\Delta}{2} e^{-\frac{2t}{\Delta}}\right]_0^{+\infty} e^{\tau/\Delta} = \frac{1}{2\Delta} e^{-|\tau|/\Delta}$$

Ainsi $$R_{YY}(\tau) = \frac{\sigma_X^2}{2\Delta} e^{-|\tau|/\Delta}$$ (ouf !)

Pour la dsp, c'est plus simple, puisqu'on a

$$S_{YY}(f) = S_{XX}(f) \cdot |H(f)|^2, \text{ avec } S_{XX}(f) = \frac{N_0}{2}$$

Soit $\quad S_{YY}(f) = \dfrac{N_0}{2} \dfrac{1}{1 + 4\pi^2 (RC)^2 f^2}$

La puissance est l'intégrale de la dsp

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{YY}(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty}$$

Ici $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + a^2 f^2} df = b^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b^2 + f^2} df = b^2 \left[\frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{f}{b} \right]_{-\infty}^{+\infty}$

$a = 2\pi RC \qquad b = 1/a$

$$= \frac{1}{a} \left[\operatorname{Arctg}(af) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{a}$$

D'où

$$P_Y = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2RC} = \frac{N_0}{4RC} \; !$$

Si le signal d'entrée est gaussien, la sortie est elle-même gaussienne, de moyenne nulle et de variance $\sigma_Y^2 = P_Y = N_0/4RC$.