

ÉLÉMENTS DE TRAITEMENT DU SIGNAL

G. BAUDOIN et J.-F. BERCHER

École Supérieure d'Ingénieurs en Électrotechnique et Électronique

Septembre 1998 – version 0.89

CHAPITRE I

Table des matières

I	Table des matières	3
I	Transformée de Fourier et <i>tutti quanti</i>	7
1	Premières définitions autour de la transformée de Fourier	7
2	Principales propriétés de la transformée de FOURIER	10
3	Impulsion de DIRAC	15
3.1	Applications et conséquences	16
3.1.1	Transformée de FOURIER d'une impulsion retardée	16
3.1.2	Transformée de FOURIER d'un signal continu	17
3.1.3	Transformée de FOURIER d'une exponentielle complexe	17
3.1.4	Transformée de FOURIER des fonctions trigonométriques	18
3.1.5	Transformée de FOURIER de la fonction Signe	18
3.1.6	Transformée de FOURIER de l'échelon unité	18
3.2	Relation entre série et transformée de FOURIER	18
3.3	Relations d'incertitude pour les signaux d'énergie finie	20
4	Convolution	21
4.1	Filtres et convolution	21
4.2	Causalité et stabilité	23
4.3	Interprétation graphique de la convolution	24
4.4	Réponse en fréquence	24
4.4.1	Conséquences	26
5	Fonctions de corrélation	27
5.1	Définitions et propriétés	27
5.1.1	Définitions	27
5.1.2	Propriétés	27
5.2	Densités spectrale d'énergie et de puissance	28
5.3	Relation corrélation-convolution	28
5.4	Filtrage	29
	Exercices et problèmes	30
II	Échantillonnage et quantification	33
1	Échantillonnage	34
1.1	Première démonstration du théorème de Shannon	34
1.2	Seconde démonstration du théorème de Shannon	35
1.3	Rappel sur le lemme de Poisson	38
2	Quantification	39
2.1	Définition de la quantification	39
2.2	Quantification Uniforme	40
2.3	Caractéristique de quantification	40
2.4	Caractéristique de l'erreur de quantification, cas de la quantification uniforme	40
2.5	Dynamique d'un quantificateur uniforme N bits	41

2.6	Quantification Non-Uniforme, quantification logarithmique	42
2.6.1	Loi de compression expansion	43
2.6.2	Approximations par segments des lois de compression A et μ	43
	Exercices et problèmes	45
III	Transformée de Fourier discrète : TFD et TFR	47
1	Transformée de Fourier Discrète : TFD	47
1.1	Définition de la TFD	47
1.2	Inversion de la TFD	48
1.3	Lien entre la transformée de Fourier et la TFD	48
1.4	Comparaison entre la transformée de Fourier et la TFD	50
1.5	Fenêtres de pondération	51
1.5.1	Fenêtres rectangulaires, triangulaires et paraboliques	52
1.5.2	Fenêtres Fenêtres détruisant par addition algébrique, les lobes secondaires de la fenêtre rectangulaire	53
1.5.3	Autres fenêtres : Gauss, Kaiser, Dolph-Chebychev	54
1.6	Problèmes de visualisation de la TFD	56
1.7	Propriétés de la TFD et convolution circulaire	56
1.7.1	Théorème de Parseval	56
1.7.2	Théorème de la convolution discrète	57
1.7.3	Théorème du retard circulaire	58
2	Transformée de Fourier Rapide TFR, Fast Fourier transform FFT	59
2.1	FFT avec entrelacement temporel	59
2.2	FFT avec entrelacement fréquentiel	62
2.3	Bit reversal	64
2.4	Formulation matricielle de l'algorithme de Cooley-Tukey	64
2.5	Autres algorithmes de FFT	68
2.6	Utilisation de la FFT pour la convolution rapide	68
2.7	Calcul de convolution par section d'une des suites	69
	Exercices et problèmes	70
IV	Signaux aléatoires	71
1	Description d'un signal aléatoire	71
1.1	Description complète	71
1.2	Description partielle	72
1.2.1	Description à un instant	72
1.2.2	Description à deux instants	72
2	Propriétés fondamentales	73
2.1	Stationnarité	73
2.2	Ergodisme	74
2.3	Le syndrome gaussien	75
2.4	Signaux aléatoires à temps discret	77
3	Propriétés énergétiques des signaux aléatoires stationnaires de puissance moyenne finie	77
3.1	Analyse dans le domaine temporel	77
3.1.1	Définitions et propriétés	77
3.1.2	Notion de bruit blanc	79
3.2	Transformation des fonctions aléatoires par filtrage	80
3.2.1	Rappel	80
3.2.2	Transformation de la moyenne	80
3.2.3	Théorème, ou formule des interférences	81
3.3	Analyse dans le domaine fréquentiel	84
3.4	La représentation de Cramér	86
3.5	Bruit blanc à temps discret	87
4	Un exemple d'application : le filtrage adapté	88

4.1	Contexte	88
4.2	Maximisation du rapport signal-à-bruit	88
4.3	Approche probabiliste	89
4.4	Notes sur le choix du signal test, signaux pseudo-aléatoires	91
	Exercices et problèmes	92
V	Introduction au filtrage numérique	97
1	Systèmes linéaires discrets invariants en temps	98
1.1	Définition	98
1.1.1	Linéarité	98
1.1.2	Invariance en temps	98
1.2	Réponse impulsionnelle	98
1.3	Relation entrée-sortie, convolution discrète	99
1.4	Réponse en fréquence	99
1.5	Réponse à une entrée fréquence pure	99
1.5.1	Relation entre les transformées de Fourier de l'entrée et de la sortie	100
1.6	Fonction de transfert en z	101
1.6.1	Définition	101
1.6.2	Relation entre les transformées en z de l'entrée et de la sortie d'un filtre	101
2	Quelques rappels sur la transformée en z	102
2.1	Domaine de convergence	102
2.2	Linéarité	103
2.3	Théorème du retard	103
2.4	Théorème de la convolution	103
2.5	Théorème de Parseval	103
2.6	Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale	103
2.7	Intégration et dérivation	104
2.8	Inversion de la transformée en z	104
3	Fonctions de transfert rationnelles en z , FIR, IIR	104
3.1	Calcul de la réponse impulsionnelle d'un filtre RII	106
3.1.1	Rappel sur le théorème des résidus	106
4	Causalité et stabilité	107
4.1	Causalité	107
4.2	Stabilité	107
4.2.1	1 ^{ère} condition nécessaire et suffisante de stabilité	107
4.2.2	2 ^{ème} condition nécessaire et suffisante de stabilité	107
4.2.3	Stabilité des FIR	108
5	Etude des filtres numériques élémentaires	108
5.1	Introduction	108
5.2	Etude des zéros de transmission	108
5.2.1	Cas d'une cellule d'ordre 1	108
5.2.2	Cas d'une cellule d'ordre deux	109
5.3	Cellule FIR d'ordre un	110
5.3.1	Généralités	110
5.3.2	Exemple	111
5.3.3	Cellules spéciales	111
5.4	Cellule FIR d'ordre 2	111
5.4.1	Généralités	111
5.4.2	Etude des extréma du module de la fonction de transfert en fréquence	112
5.4.3	inversion du module des zéros, polynôme réciproque de $H(z)$	114
5.4.4	Exemple	114
5.4.5	Changement du signe du coefficient b_1 , changement de z en $-z$	114
5.5	Cellule IIR d'ordre 1	115
5.5.1	Généralités	115

	5.5.2	Exemple	116
5.6		Cellule IIR d'ordre 2	117
	5.6.1	Généralités	117
	5.6.2	Etude des extréma du module de la fonction de transfert en fréquence	118
	5.6.3	Inversion du module des zéros, polynôme réciproque de $H(z)$	119
	5.6.4	Exemple	119
	5.6.5	Changement du signe du coefficient a_1 , changement de z en $-z$	120
6		Structures des filtres numériques	120
	6.1	Structures directes	120
	6.2	Structures directes non canoniques	120
	6.3	structures directes canoniques DN et ND	121
	6.4	Structures décomposées	122
	6.4.1	Structures cascade	122
	6.4.2	Structures parallèles	123
		Exercices et problèmes	124
		Index	127

CHAPITRE I

TRANSFORMÉE DE FOURIER ET *TUTTI QUANTI*

LA TRANSFORMÉE DE FOURIER¹ est l'un des outils, sinon l'outil fondamental du traicteur de signaux. Elle permet d'associer à la « forme d'onde » habituelle, la représentation d'un signal en fonction de sa variable d'évolution, une autre représentation, complémentaire, dans le domaine fréquentiel.

L'utilisation de cette description fréquentielle permet en outre de caractériser simplement les filtres linéaires, et faciliter leur étude. Après avoir présenté la transformée de FOURIER et ses principales propriétés, nous nous intéresserons au filtrage des signaux et introduirons les notions de convolution et de fonction de transfert, qui permettent la caractérisation des filtres, puis nous examinerons les notions de corrélation, pour des signaux déterministes, qui permettent quant-à-elles l'étude des propriétés énergétiques des signaux. Les principaux éléments seront alors en place pour aborder, dans la suite du cours, le problème de l'échantillonnage, la caractérisation des signaux aléatoires, puis quelques éléments d'introduction au traitement numérique des signaux.

1 Premières définitions autour de la transformée de Fourier

On s'intéresse à une fonction x de la variable t , $x(t)$. Cette fonction peut être à valeurs complexes, et dépend d'une variable t , qui, éventuellement, pourrait être une variable vectorielle. Dans le cadre de ce cours, on s'intéressera essentiellement au cas d'une variable t scalaire, et il sera souvent commode de considérer t comme le temps, la fonction $x(t)$ représentant alors l'évolution temporelle d'un signal. Notons cependant que t ne représente pas nécessairement le temps, et que l'on peut étudier le comportement de signaux suivant une variable d'espace, suivant une concentration, *etc.*..

Une fonction $x(t)$ quelconque, non périodique, peut se décomposer sous la forme d'une intégrale de FOURIER, selon

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df,$$

où

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

On dit que $x(t)$ et $X(f)$ forment une paire de transformées de FOURIER, ce qui est noté par

$$x(t) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\rightleftharpoons}} X(f).$$

La transformée de FOURIER existe si les trois conditions de DIRICHLET sont vérifiées (il s'agit de conditions suffisantes mais pas nécessaires) :

1. $x(t)$ possède un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle fini,
2. $x(t)$ possède un nombre fini de maxima et de minima sur tout intervalle fini,

1. Joseph Jean FOURIER, mathématicien, physicien et préfet français (1768-1830), établit entre 1807 et 1811 la loi de FOURIER sur la conduction thermique. En 1822, ses études sur la conduction thermique, le conduisent à développer la technique de l'analyse harmonique, et en particulier un développement de fonctions en série harmonique, développement qui porte aujourd'hui son nom.

3. $x(t)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty.$$

En effet, si $x(t)$ est absolument intégrable, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-j2\pi ft}| dt < \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

(car $|x(t) e^{j2\pi ft}| = |x(t)| |e^{j2\pi ft}| < |x(t)|$).

Il est important de noter que tous les signaux d'énergie finie, c'est-à-dire tous les signaux de L_2 ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{j2\pi ft}|^2 dt < +\infty$$

admettent une transformée de FOURIER.

La transformée de FOURIER est une fonction complexe, qui pourra être exprimée sous la forme

$$X(f) = |X(f)| e^{j\theta(f)} = A(f) + jB(f),$$

où $|X(f)|$ et $\theta(f)$ sont respectivement les module et phase de $X(f)$, avec

$$\begin{aligned} |X(f)| &= \sqrt{A(f)^2 + B(f)^2}, \\ \theta(f) &= \operatorname{arctg} \frac{B(f)}{A(f)}. \end{aligned}$$

Exemple 1 Impulsion rectangulaire.

On note $\operatorname{rect}_T(t)$ l'impulsion rectangulaire définie par

$$\operatorname{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-T/2, T/2], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On cherche alors à calculer la transformée de FOURIER de $x(t) = A \operatorname{rect}_T(t)$. Il suffit d'écrire la définition de la transformée de FOURIER :

$$X(f) = \operatorname{TF} \{A \operatorname{rect}_T(t)\} = A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt,$$

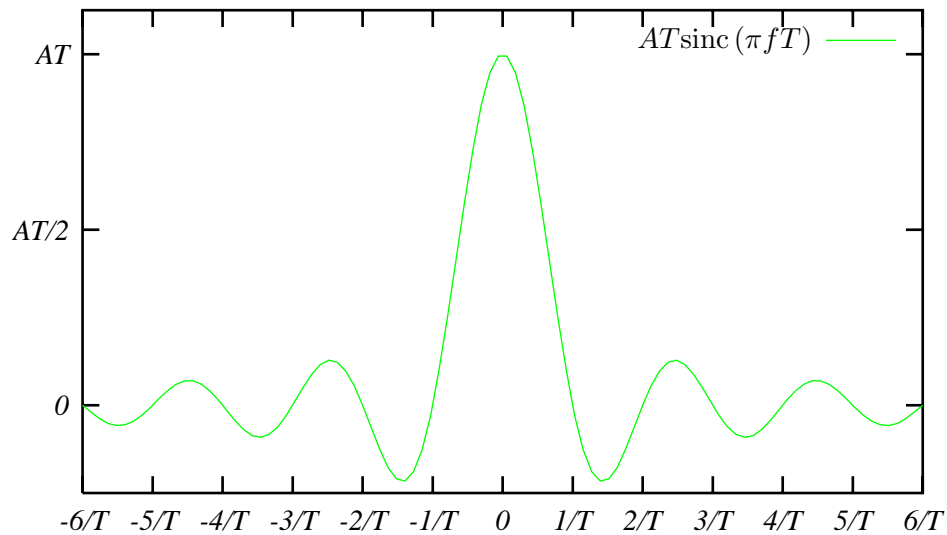
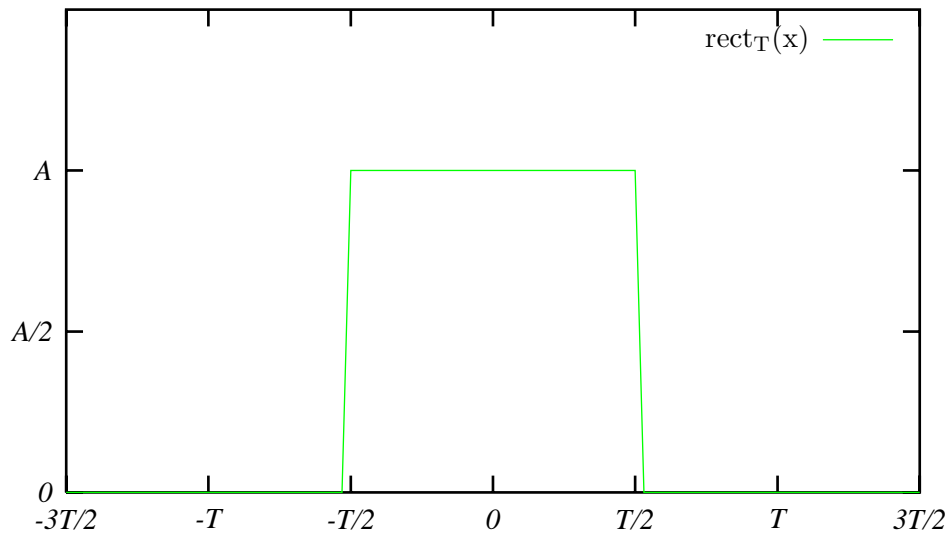
soit

$$X(f) = A \left[\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = A \frac{1}{j2\pi f} [e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}]$$

et enfin

$$X(f) = AT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \triangleq AT \operatorname{sinc}(\pi fT).$$

où $\operatorname{sinc}(\cdot)$ est la fonction sinus cardinal. On notera que la transformée de FOURIER obtenue est purement réelle, et paire (nous verrons plus loin, §9 que ceci est vérifié pour tous les signaux réels et pairs). Par ailleurs, cette transformée s'annule pour $\pi fT = k\pi$, soit tous les $f = k/T$; sauf pour $k = 0$, puisque $\operatorname{sinc}(x) = 1$ pour $x \rightarrow 0$.

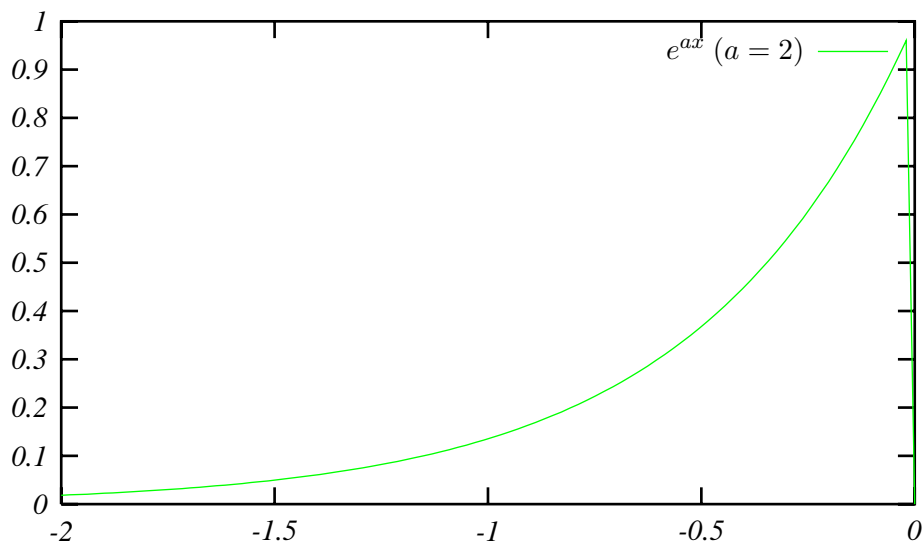
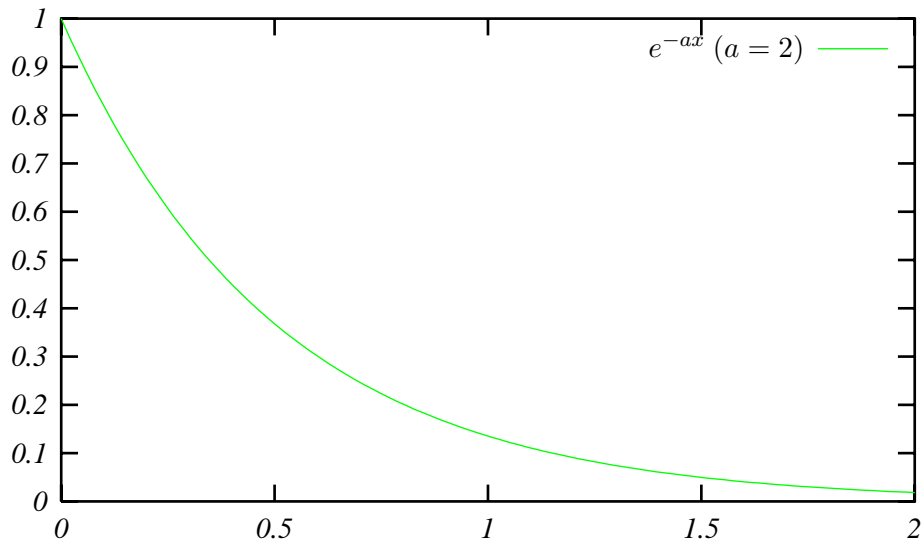
**Exemple 2** *Exponentielles.*

Soit les fonctions $x_1(t) = \exp(-at)u(t)$ et $x_2(t) = \exp(at)u(-t)$, avec a un réel positif, et $u(t)$ l'échelon. Alors

$$X_1(f) = \text{TF} \{x_1(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a + j2\pi f}.$$

De la même façon, on obtient

$$X_2(f) = \text{TF} \{x_2(t)\} = \frac{1}{a - j2\pi f}.$$



2 Principales propriétés de la transformée de FOURIER

Propriété 1 La transformée de FOURIER est une transformation linéaire : si

$$x_1(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X_1(f)$$

$$x_2(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X_2(f)$$

alors, $\forall c_1, c_2 \in \mathbf{C}$,

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} c_1 X_1(f) + c_2 X_2(f)$$

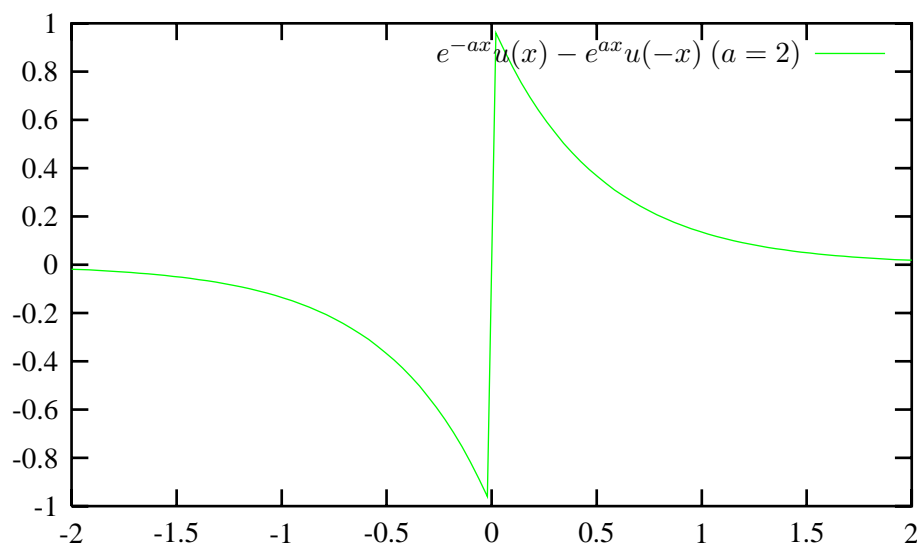
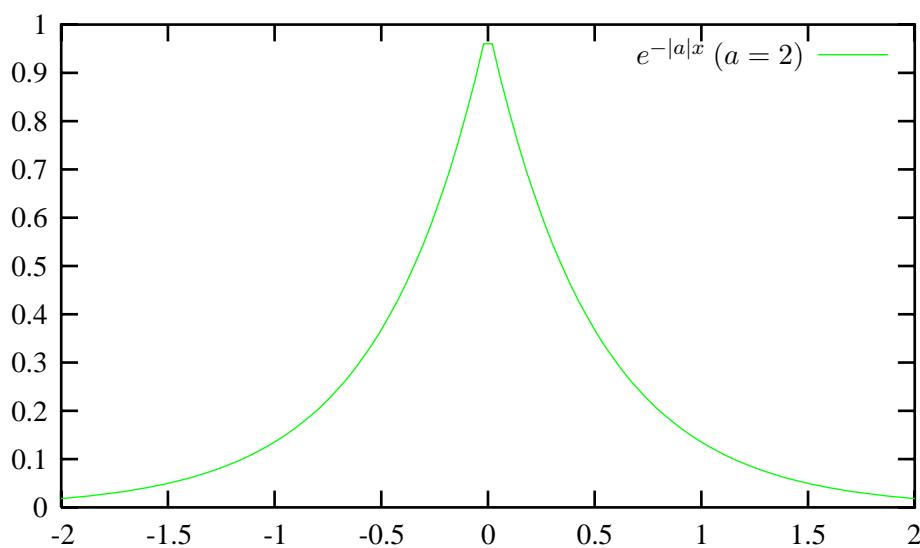
Exercice 1 : En vous servant des résultats donnés dans l'exemple 2 et de la propriété de linéarité, montrez que les transformées de FOURIER de

$$\begin{cases} g_1(t) = \exp(-a|t|) = \exp(-at)u(t) + \exp(at)u(-t) \\ g_2(t) = \exp(-a|t|)\text{sign}(t) = \exp(-at)u(t) - \exp(at)u(-t) \end{cases}$$

valent respectivement

$$\begin{aligned} G_1(f) &= \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \\ G_2(f) &= \frac{-j4\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2} \end{aligned}$$

Représentez les module et phase de $G_1(f)$ et $G_2(f)$, et examinez ce que deviennent ces paires de transformées de FOURIER lorsque $a \rightarrow 0$.



Propriété 2 Propriété d'échelle.

Lorsque l'on effectue une contraction ou une dilatation temporelle, on a

$$x(at) \underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right).$$

Cette propriété se montre directement à partir de la définition de la transformée de FOURIER.

Propriété 3 Retard temporel.

Cette propriété permet de donner la transformée de FOURIER d'une fonction retardée en fonction de la transformée de FOURIER du signal initial et d'un terme de retard :

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)e^{-j2\pi ft_0}.$$

À nouveau, cette propriété s'obtient directement en utilisant la définition de la transformée :

$$\text{TF} \{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt;$$

En notant que $e^{-j2\pi ft} = e^{-j2\pi f(t-t_0)}e^{-j2\pi ft_0}$, il vient alors

$$\text{TF} \{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f(t-t_0)} e^{-j2\pi ft_0} dt,$$

soit

$$\text{TF} \{x(t - t_0)\} = e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f(t-t_0)} dt = e^{-j2\pi ft_0} X(f).$$

Propriété 4 Déplacement fréquentiel.

Cette propriété est analogue à (ou plutôt duale de) la propriété du retard temporel : on effectue une « modulation » du signal temporel, à la fréquence f_0 , cette modulation entraînant alors un déplacement (retard) dans le domaine fréquentiel :

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f - f_0).$$

Application : modulation d'amplitude

On considère le signal modulé en amplitude $x(t)$,

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) m(t),$$

où $m(t)$ est le message.

En décomposant le cosinus en la somme de deux exponentielles complexes de fréquences f_0 et $-f_0$, i.e., on a

$$x(t) = \frac{A}{2} \left[e^{j2\pi f_0 t} m(t) + e^{-j2\pi f_0 t} m(t) \right],$$

et en utilisant la propriété de déplacement fréquentiel, il vient immédiatement

$$X(f) = \frac{A}{2} [M(f - f_0) + M(f + f_0)],$$

où $M(f)$ est la transformée de FOURIER du message $m(t)$.

Propriété 5 «Moyennes».

On appelle ici «moyennes» les intégrales des fonctions sur tout leur domaine d'existence. On a alors les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} X(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt, \\ x(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df. \end{aligned}$$

Pour se convaincre de ces deux relations, il suffit d'écrire les définitions des transformées de FOURIER directe et inverse, dans lesquelles on prendra, respectivement, $f = 0$ et $t = 0$. À partir de l'expression de la TF, on a ainsi très simplement l'intégrale de la fonction considérée. Notons que $X(0)$ a une signification précise : c'est la composante fréquentielle à la fréquence nulle, c'est-à-dire la composante continue du signal.

Propriété 6 Différentiation dans le domaine temporel.

Il est intéressant de pouvoir relier la transformée de FOURIER de la dérivée d'un signal à la transformée de FOURIER du signal initial : ceci permet en effet d'obtenir élégamment certains résultats. Si $x(t)$ admet $X(f)$ pour transformée de FOURIER, et en supposant que $dx(t)/dt$ existe et admet une transformée de FOURIER, alors

$$\frac{dx(t)}{dt} \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} j2\pi f X(f).$$

Pour s'en convaincre, il suffit, comme souvent, de revenir à la définition :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi f X(f) e^{j2\pi ft} df, \\ &= \text{TF}^{-1}\{j2\pi f X(f)\}. \end{aligned}$$

Plus généralement, et sous réserve d'existence de la dérivée considérée et de sa TF,

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} (j2\pi f)^n X(f).$$

Propriété 7 Intégration dans le domaine temporel.

En supposant que $X(0) = 0$, on montre (exercice) que

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} \frac{1}{j2\pi f} X(f).$$

Propriété 8 Propriété de dualité.

La propriété de dualité permet d'obtenir facilement de nouvelles paires de transformées de FOURIER à partir des paires déjà connues. Cette propriété s'exprime comme suit : si

$$x(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f),$$

alors

$$X(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} x(-f).$$

Ceci se montre en débutant avec l'expression de $x(-t)$ en fonction de sa TF $X(f)$:

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi ft} df,$$

en échangeant maintenant les variables t et f , on obtient

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt \triangleq \text{TF} \{X(t)\}.$$

Exemple :

On a vu que

$$\text{Arect}_T(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} AT \text{ sinc}(\pi fT).$$

Si l'on a maintenant à calculer la transformée de FOURIER inverse d'une fonction porte en fréquence, $\text{Arect}_B(f)$, il suffit d'invoquer cette propriété de dualité pour écrire

$$AB \text{ sinc}(-\pi tB) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} \text{Arect}_B(f),$$

et la fonction sinus cardinal étant paire, on en déduit

$$AB \text{ sinc}(\pi tB) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} \text{Arect}_B(f).$$

Ceci montre que la transformée de FOURIER d'un sinus cardinal, en temps, est une fonction porte en fréquence.

Propriété 9 Propriétés de conjugaison et symétries.

Comme précédemment, on considère une paire de transformées de FOURIER :

$$x(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f).$$

Lorsque $x(t)$ est une fonction à valeurs complexes, on a

$$\boxed{x^*(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X^*(-f)}.$$

Ceci se vérifie en partant de la définition de la transformée de FOURIER :

$$\begin{aligned} \text{TF} \{x^*(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j2\pi ft} dt, \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt \right)^*, \\ &= X^*(-f). \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout signal $x(t)$, on a

$$\boxed{x(-t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(-f)}.$$

Cette dernière relation se vérifie directement en écrivant la transformée de FOURIER de $x(-t)$:

$$\text{TF} \{x(-t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

et en effectuant le changement de variable $-t \rightarrow t$, on obtient

$$\begin{aligned} \text{TF} \{x(-t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt, \\ &= X(-f). \end{aligned}$$

En utilisant les deux dernières relations encadrées, on obtient enfin

$$\boxed{x^*(-t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X^*(f)}.$$

En résumé,

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f) \\ x(-t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(-f) \\ x^*(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X^*(-f) \\ x^*(-t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X^*(f) \end{array}}$$

Ces différentes relations permettent de donner toutes les relations de symétrie de la transformée de FOURIER. Pour commencer, on notera la propriété de symétrie hermitienne vérifiée par la transformée de FOURIER des **signaux réels** :

$$\boxed{X(f) = X^*(-f)}$$

on en déduit que, si $x(t)$ est réel, alors

- la partie réelle de $X(f)$ est paire,
- la partie imaginaire de $X(f)$ est impaire,
- le module de $X(f)$, $|X(f)|$ est pair,
- la phase de $X(f)$, $\theta(f)$ est impaire.

D'autre part, si $x(t)$ est pair ou impair ($x(t)$ n'est pas ici nécessairement réel), on peut écrire

$[pair]$	$x(t) = x(-t)$	$\xrightarrow{\quad}$	$X(f) = X(-f)$	$[pair]$
$[impair]$	$x(t) = -x(-t)$	$\xrightarrow{\quad}$	$X(f) = -X(-f)$	$[impair]$

Le tableau suivant résume enfin les différentes propriétés de symétrie :

$x(t)$	symétrie	temps	fréquence	conséquence sur $X(f)$
réel	quelconque	$x(t) = x^*(t)$	$X(f) = X^*(-f)$	Re. paire, Im. impaire
réel	pair	$x(t) = x^*(t) = x(-t)$	$X(f) = X^*(-f) = X(-f)$	réelle et paire
réel	impair	$x(t) = x^*(t) = -x(-t)$	$X(f) = X^*(-f) = -X(-f)$	imaginaire pur et impair
imaginaire	quelconque	$x(t) = -x^*(t)$	$X(f) = -X^*(-f)$	Re. impaire, Im. paire
imaginaire	pair	$x(t) = -x^*(t) = x(-t)$	$X(f) = -X^*(-f) = X(-f)$	imaginaire et pair
imaginaire	impair	$x(t) = -x^*(t) = -x(-t)$	$X(f) = -X^*(-f) = -X(-f)$	réel et impair

Enfin, on a

Réel pair + imaginaire impair	$\xrightarrow{\quad}$	Réel
Réel impair + imaginaire pair	$\xrightarrow{\quad}$	Imaginaire

3 Impulsion de DIRAC

La transformation de FOURIER ne s'applique strictement qu'aux signaux qui vérifient les conditions de DIRICHLET. Il serait agréable d'étendre le formalisme afin de pouvoir définir une transformée de FOURIER pour les signaux de puissance moyenne finie², et de retrouver la série de FOURIER comme cas particulier de la transformée de FOURIER.

Cette extension est possible en utilisant la théorie des distributions, et en particulier la distribution de DIRAC. La distribution de DIRAC est une distribution, et nous devrions faire alors appel aux résultats de la théorie des distributions. Ceci sort du cadre de ce cours, et peut-être du cadre d'un cours de *traitement* du signal, et nous nous contenterons ici d'une approche heuristique. Pour une approche rigoureuse, on pourra se reporter à l'ouvrage de L. SCHWARTZ³

On appelle impulsion de DIRAC la fonction $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0, \\ +\infty & \text{pour } t = 0, \end{cases}$$

et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

L'impulsion de DIRAC est ainsi «une impulsion infiniment fine, d'amplitude infinie, et d'aire unité».

Conséquence :

L'impulsion de DIRAC joue le rôle d'une fonction indicatrice lorsqu'elle intervient dans une intégration. En

2. Les signaux d'énergie finie sont les signaux tels que

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty,$$

où E_x désigne l'énergie du signal. L'ensemble des signaux d'énergie finie est l'espace L_2 .

Les signaux de puissance moyenne finie sont les signaux qui vérifient

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty,$$

où P_x désigne la puissance moyenne. On notera que ces signaux ne sont pas nécessairement absolument intégrables. L'ensemble des signaux de puissance moyenne finie est souvent noté $L_2(T)$.

3. L. SCHARTZ, «THÉORIE DES DISTRIBUTIONS»

effet, l'impulsion de DIRAC est nulle sauf lorsque son argument est nul, auquel cas, son amplitude est infinie, mais son «aire» unité. Ainsi, on peut écrire que $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$. Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0).$$

On en déduit alors que l'on a, d'une façon générale,

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau, \\ \text{avec } x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - \tau)dt. \end{cases}$$

L'ensemble des fonctions $\{\delta_\tau : \delta(t - \tau)\}$, paramétré par τ forme une base orthonormale (infinie et non dénombrable), et l'on peut comprendre $x(\tau)$ comme une composante du signal \mathcal{X} sur cette base. En effet,

$$x(\tau) = \langle \mathcal{X}, \delta_\tau \rangle,$$

et $x(t)$ s'obtient comme la somme infinie des vecteurs de base pondérés par les composantes de \mathcal{X} :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

À l'aide des résultats précédents, il est facile d'exprimer la transformée de FOURIER de l'impulsion de DIRAC, qui vaut simplement :

$$\begin{aligned} \text{TF} \{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt, \\ &= e^{j2\pi 0} = 1. \end{aligned}$$

La transformée de FOURIER de l'impulsion de DIRAC est donc une fonction constante, quelque soit la fréquence :

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{TF}} 1 \quad \forall f.$$

On peut voir (interpréter) l'impulsion de DIRAC comme la limite d'une fonction porte. À cet effet, considérons la fonction porte de largeur ϵ et d'amplitude $1/\epsilon$ (afin que son aire soit unité), $(1/\epsilon)\text{rect}_\epsilon(t)$. nous avons vu que la transformée de FOURIER de cette fonction vaut

$$\frac{1}{\epsilon} \epsilon \text{sinc}(\pi f \epsilon) = \text{sinc}(\pi f \epsilon).$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $(1/\epsilon) \text{rect}_\epsilon(t) \rightarrow \delta(t)$, et $\text{sinc}(\pi f \epsilon) \rightarrow 1$.

3.1 Applications et conséquences

Munis de ces quelques résultats, on peut rechercher les transformées de FOURIER de quelques fonctions qui n'admettraient pas de TF au sens habituel. Ce faisant, on pourra donner un nouvel éclairage à la transformée de FOURIER.

3.1.1 Transformée de FOURIER d'une impulsion retardée

Par simple application de la propriété 3 (retard temporel), on peut écrire que

$$\delta(t - \tau) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-j2\pi f\tau}.$$

La transformée de FOURIER d'une impulsion de DIRAC placée en $t = \tau$ est une exponentielle complexe.

3.1.2 Transformée de FOURIER d'un signal continu

On recherche la transformée de FOURIER d'un signal constant, c'est-à-dire d'un signal continu (au sens « électronique », pas au sens mathématique). Nous avons vu que $\text{TF} \{\delta(t)\} = 1$. En utilisant la propriété de dualité — propriété 8, on en déduit que

$$\text{TF} \{1\} = \delta(-f) = \delta(f).$$

La transformée de FOURIER d'un signal constant est donc une raie, ou une masse, à la fréquence nulle.

3.1.3 Transformée de FOURIER d'une exponentielle complexe

La propriété de modulation, propriété 4,

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f - f_0).$$

implique alors, en prenant $x(t) = 1$, que

$$e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0),$$

c'est-à-dire une impulsion de DIRAC dans le domaine fréquentiel, à la fréquence $f = f_0$ ⁴. Cette relation, que nous réécrivons en terme de TF

$$\text{TF} \{e^{j2\pi f_0 t}\} = \delta(f - f_0),$$

est très importante : elle indique en effet que les exponentielles complexes sont orthogonales deux à deux

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \delta(f - f_0),$$

c'est-à-dire que les exponentielles complexes forment une base orthogonale⁵, au sens du produit scalaire habituel

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt.$$

Rappelons qu'alors, si les $e_f(t) = e^{j2\pi f t}$ sont les vecteurs de base, on peut exprimer tout signal $x(t)$ par la décomposition

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x, e_f(t) \rangle e_f(t) dt,$$

où $\langle x, e_f(t) \rangle$ est la *composante* de $x(t)$ pour le vecteur $e_f(t)$ dans le développement, soit la *projection* de $x(t)$ sur $e_f(t)$. La transformée de FOURIER consiste donc simplement à calculer les composantes du développement de $x(t)$ sur cette base :

$$X(f) = \langle x, e_f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt,$$

et la décomposition du signal sur la base des exponentielles complexes est la transformée de FOURIER inverse

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df.$$

On dispose ainsi de deux bases de représentation pour les signaux : la base des impulsions de DIRAC de retard croissant, et la base des exponentielles complexes de fréquence croissante. On vérifie aisément que les vecteurs de base sont liés par une transformée de FOURIER! Plus exactement, la transformée de FOURIER est la transformation qui permet de passer d'une base à l'autre. Par ailleurs, comme nous le vérifierons plus loin,

4. Notons que l'on peut aussi établir simplement ce résultat en utilisant la propriété de dualité à partir de

$$\delta(t - \tau) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-j2\pi f \tau}.$$

5. Une autre base : on a déjà noté que l'ensemble des impulsions de DIRAC décalées forme une base orthogonale de l'espace des signaux.

le produit scalaire se conserve dans ces deux représentations, c'est-à-dire que l'on a, en désignant par \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux signaux, indépendamment de leur base de représentation,

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df.$$

Cette dernière relation est la relation de PARSEVAL-PLANCHEREL.

3.1.4 Transformée de FOURIER des fonctions trigonométriques

Pour déterminer la TF des fonctions sinusoïdales, il suffit d'appliquer les formules d'EULER :

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_0 t) &= \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}, \\ \sin(2\pi f_0 t) &= \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}, \end{aligned}$$

et il vient alors

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_0 t) &\stackrel{\leftarrow}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)], \\ \sin(2\pi f_0 t) &\stackrel{\leftarrow}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]. \end{aligned}$$

3.1.5 Transformée de FOURIER de la fonction Signe

On montre (cf Exercices) que

$$\text{TF} \{ \text{Signe}(t) \} = \frac{1}{j\pi f}$$

3.1.6 Transformée de FOURIER de l'échelon unité

L'échelon unité peut être exprimé comme la somme $u(t) = 1/2[\text{Signe}(t) + 1]$, où l'on a supposé que $u(0) = 1/2$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \text{TF} \{ u(t) \} &= \frac{1}{2} \text{TF} \{ \text{Signe}(t) \} + \frac{1}{2} \text{TF} \{ 1 \}, \\ &= \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f). \end{aligned}$$

Cette transformée est utile pour définir la notion de signal analytique et la transformée de HILBERT.

3.2 Relation entre série et transformée de FOURIER

Soit $x(t)$ une fonction périodique de période T_0 . On a alors

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_{T_0}(t - mT_0),$$

où $x_{T_0}(t)$ est le « motif de base », de durée T_0 . Le signal $x(t)$ étant périodique, de période T_0 , il admet une décomposition en série de FOURIER, sous la forme :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t},$$

où $f_0 = 1/T_0$ et

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} x_{T_0}(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt.$$

On déduit immédiatement de cette relation que

$$c_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0}(nf_0),$$

où $X_{T_0}(f)$ est la transformée de FOURIER de $x_{T_0}(t)$. On a alors

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_{T_0}(t - mT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{T_0}(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t}.$$

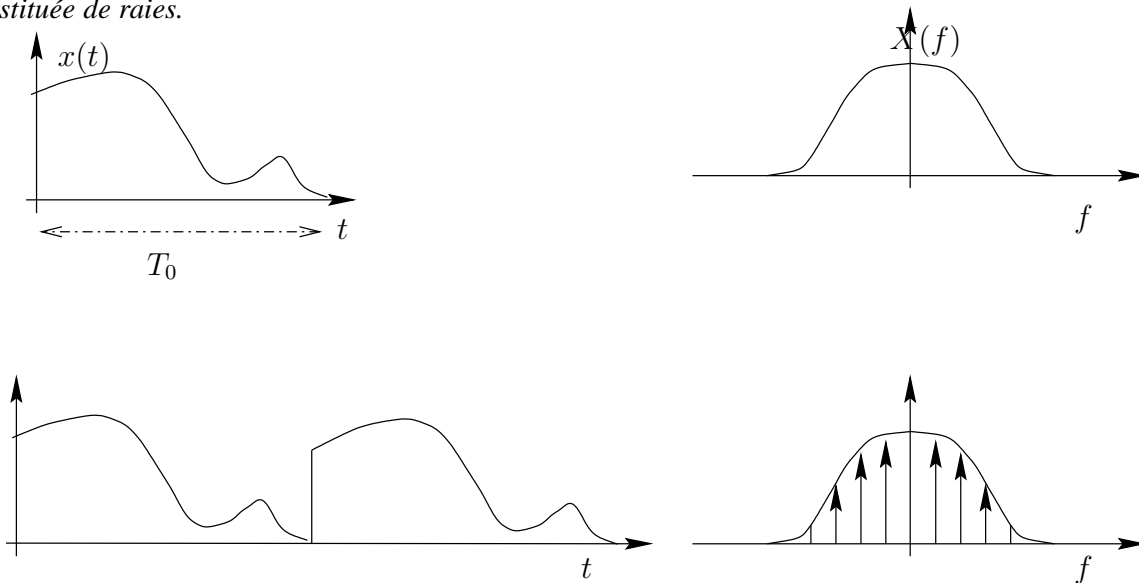
On en déduit donc que la transformée de FOURIER de $x(t)$ s'écrit alors

$$\text{TF} \{x(t)\} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{T_0}(nf_0) \text{TF} \{e^{j2\pi n f_0 t}\},$$

soit

$$X(f) = \text{TF} \{x(t)\} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{T_0}(nf_0) \delta(f - f_0).$$

La transformée de FOURIER d'un signal périodique de période T_0 est donc constituée d'impulsions de DIRAC, situées tous les multiples de f_0 , et dont le poids est la transformée de FOURIER du motif de base, à la fréquence considérée. *La périodicité dans le domaine temporel conduit à une transformée de FOURIER constituée de raies.*



En prenant enfin $x_{T_0}(t) = \delta(t)$, on obtient les **formules de POISSON** :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 t};$$

puis, en écrivant et en égalant les transformées de FOURIER de chacun des deux membres :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f m T_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0);$$

soit enfin

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0) \stackrel{\leftarrow}{=} \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0).$$

Cette relation montre que la transformée de FOURIER d'un peigne de DIRAC est également un peigne de DIRAC, ces deux peignes étant de pas inversement proportionnel.

3.3 Relations d'incertitude pour les signaux d'énergie finie

Nous avons vu que la TF d'une porte est d'autant plus large que la porte est étroite. En fait, on voit ainsi qu'à un signal de durée limitée correspond une TF à support infini, et réciproquement (exemple des fonctions sinusoïdales). On ne peut pas trouver de fonction qui soit à support limité simultanément dans les deux domaines. Mieux encore, plus une fonction est « concentrée » dans un domaine, plus elle est « étalée » dans le domaine dual. Ces constatations sont quantifiées par les relations d'incertitude, appelées ainsi en référence aux relations d'incertitude de GABOR-HEISENBERG.

L'énergie d'un signal est définie par

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt,$$

et l'on montrera plus loin dans le cours, que l'on a (relation de PARSEVAL)

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df.$$

On peut alors considérer

$$\frac{|x(t)|^2}{E_x} \quad \text{et} \quad \frac{|X(f)|^2}{E_x}$$

comme des densités de probabilité et définir les moments de ces densités :

$$\begin{cases} \bar{t} = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{+\infty} t |x(t)|^2 dt & \text{« temps moyen »,} \\ \bar{f} = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{+\infty} f |X(f)|^2 df & \text{« fréquence moyenne »,} \end{cases}$$

et on définit alors les « variances » par

$$\begin{cases} (\Delta t)^2 = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \bar{t})^2 |x(t)|^2 dt & \text{« temps moyen »,} \\ (\Delta f)^2 = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{+\infty} (f - \bar{f})^2 |X(f)|^2 df & \text{« fréquence moyenne »,} \end{cases}$$

Sans perte de généralité, on choisit une origine des temps et des fréquences telles que $\bar{t} = 0$ et $\bar{f} = 0$.

On considère maintenant la fonction de λ positive suivante :

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \lambda \frac{dx(t)}{dt} + tx(t) \right|^2 dt \geq 0,$$

soit, après développement,

$$I(\lambda) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt + 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} tx(t) \frac{dx(t)}{dt} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |tx(t)|^2 dt,$$

ou

$$I(\lambda) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{d|x(t)|^2}{dt} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |tx(t)|^2 dt.$$

Les relations sur la transformée de FOURIER d'une dérivée et la relation de PARSEVAL fournissent :

1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |j2\pi f X(f)|^2 df = 4\pi^2 (\Delta f)^2 E_x,$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{d|x(t)|^2}{dt} dt = [t|x(t)|^2]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x,$$

en supposant que $t|x(t)|^2 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$;

3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt = (\Delta t)^2 E_x.$$

Il reste donc

$$I(\lambda) = \left[\lambda^2 4\pi^2 (\Delta f)^2 + \lambda + (\Delta t)^2 \right] E_x \geq 0.$$

La fonction considérée étant toujours de même signe, le discriminant doit donc être négatif, ce qui conduit à

$$\boxed{\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}.}$$

Le produit durée moyenne bande moyenne est ainsi borné inférieurement, ce qui induit une relation d'incertitude, du type GABOR-HEISENBERG entre les deux domaines. Il n'est pas possible de trouver de signal qui soit à support limité simultanément dans les deux domaines. Qui plus est, la relation précédente permet de quantifier cette remarque et d'exhiber les signaux « limites ».

En effet, les signaux qui sont conjointement les plus « compacts » sont ceux qui permettent d'atteindre la borne, c'est-à-dire les signaux tels que $\Delta t \Delta f = 1/4\pi$. ce sont les signaux tels que

$$I(\lambda_0) = \left[\lambda_0^2 4\pi^2 (\Delta f)^2 + \lambda_0 + (\Delta t)^2 \right] E_x = 0,$$

soit

$$\lambda_0 \frac{dx(t)}{dt} + tx(t) = 0.$$

Ce sont les signaux gaussiens :

$$x(t) = Ae^{-\frac{t^2}{2\lambda_0}},$$

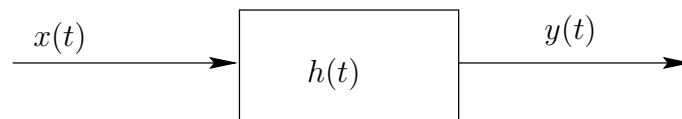
dont la transformée de FOURIER est également gaussienne :

$$X(f) = Ae^{-\lambda_0 f^2}.$$

4 Convolution

4.1 Filtres et convolution

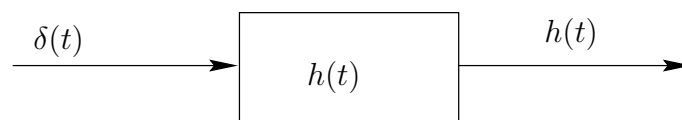
À l'aide des éléments précédemment introduits, nous pouvons maintenant commencer à nous intéresser à l'étude des systèmes linéaires invariants dans le temps, ou *filtres*. Un filtre est un instrument, ou un modèle physique, associant (linéairement) une excitation, ou signal d'entrée, à un signal de sortie.



Un système est *linéaire* s'il justifie du *principe de superposition* : la réponse à une somme pondérée d'excitations est égale à la somme pondérée des réponses aux excitations individuelles :

$$\sum_i \alpha_i x_i(t) \rightarrow \sum_i \alpha_i y_i(t).$$

Le système est invariant dans le temps si la réponse ne dépend pas de l'instant d'application : si $y(t)$ est la sortie correspondant à une entrée $x(t)$, la réponse associée à $x(t-t_0)$ est $y(t-t_0)$. On appelle *réponse impulsionnelle* (RI), souvent notée $h(t)$, la réponse du système à l'application d'une impulsion de DIRAC $\delta(t)$:



Le système étant linéaire et invariant, alors la réponse associée à $x(\tau)\delta(t - \tau)$ est $x(\tau)h(t - \tau)$.

$$x(\tau)\delta(t - \tau) \rightarrow x(\tau)h(t - \tau).$$

Or, nous avons vu que l'on peut écrire tout signal $x(t)$ comme une somme infinie de «composantes» $x(\tau)$ sur une base d'impulsions de DIRAC :

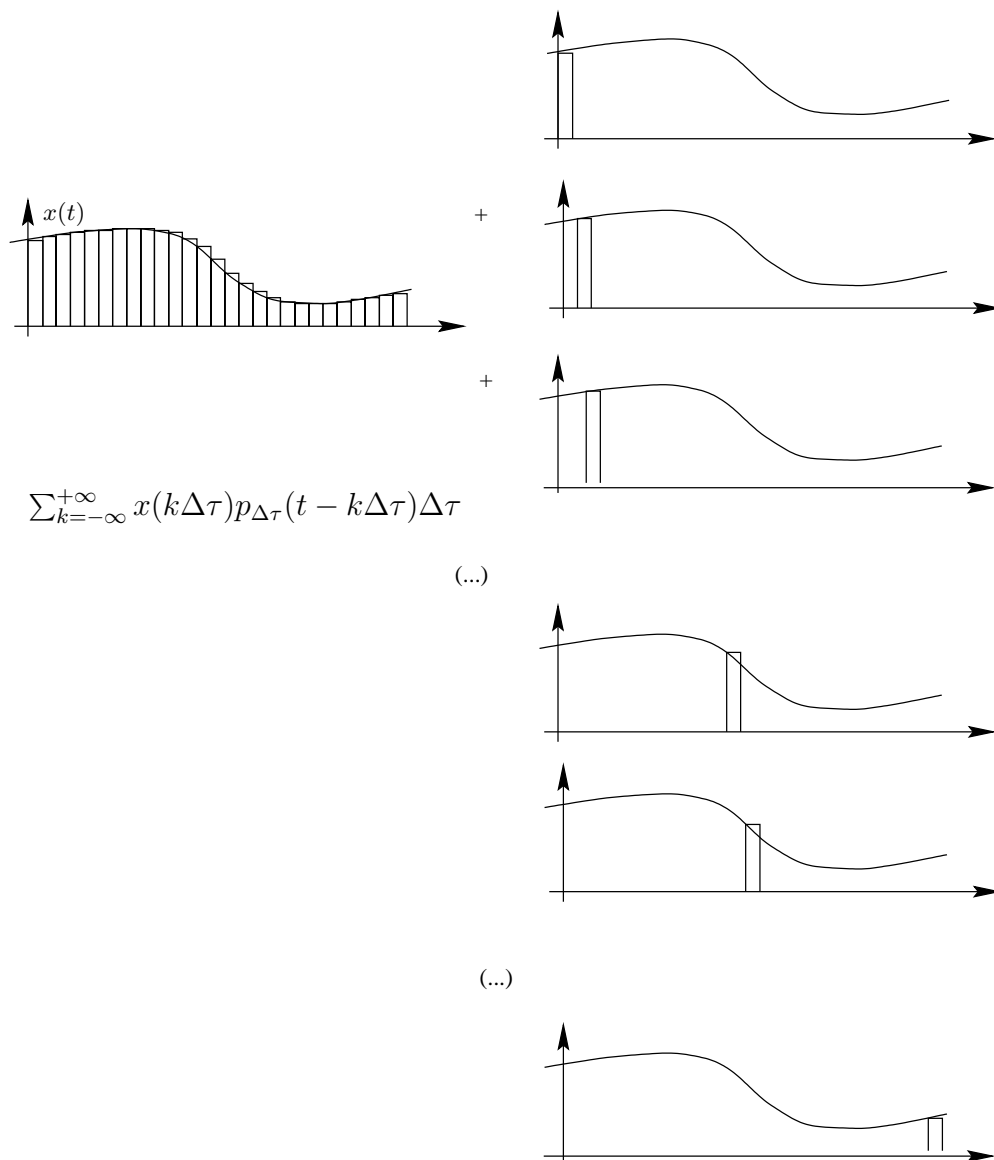
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

On en déduit alors que la réponse globale du système s'écrit, par linéarité :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = [x * h](t).$$

Cette relation est appelée *convolution* entre x et h , et l'opération est notée $[x * h](t)$, pour montrer que le *résultat* de la convolution est évalué à l'instant t et que la variable τ est simplement une variable muette qui disparaît lors de l'intégration. L'intégrale précédente est appelée *intégrale de convolution* ; elle permet d'associer à toute entrée $x(t)$ la sortie du système $y(t)$, celui-ci étant caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$.

On peut encore illustrer l'opérateur convolution de la façon suivante : on décompose l'entrée $x(t)$ en une somme d'impulsions rectangulaires d'amplitude $x(\tau)$ et de largeur $\Delta\tau$:



On note $p_{\Delta\tau}$ l'impulsion de largeur $\Delta\tau$ et d'amplitude $1/\Delta\tau$. L'entrée peut ainsi être approchée par

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta\tau)p_{\Delta\tau}(t - k\Delta\tau)\Delta\tau.$$

Notons maintenant $h_{\Delta\tau}$ la réponse du système à l'impulsion $p_{\Delta\tau}$. Alors, la sortie, à l'instant t , s'écrit comme la superposition de toutes les réponses :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta\tau)h_{\Delta\tau}(t - k\Delta\tau)\Delta\tau.$$

En faisant enfin tendre $\Delta\tau$ vers 0, on a

$$p_{\Delta\tau}(t) \rightarrow \delta(t), \quad h_{\Delta\tau}(t) \rightarrow h(t).$$

On retrouve alors la relation de convolution précédente :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau.$$

On notera que l'opération de convolution est *commutative* :

$$\boxed{[h * x](t) = [x * h](t)}.$$

En effet, si on pose $\tau' = t - \tau$, alors

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau')h(\tau')d\tau'.$$

4.2 Causalité et stabilité

Un filtre est dit *causal*, si la sortie ne dépend que des valeurs de l'entrée précédentes la sortie. En d'autres termes, «l'effet ne précède pas la cause». Dans ces conditions, il est clair que $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Alors,

$$\begin{aligned} y(t) = [x * h](t) &= \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau. \end{aligned}$$

pour un système causal.

Il est clair qu'un système opérant en temps réel doit être causal. Lorsqu'un système peut travailler en temps différé, à l'aide d'une entrée stockée, il n'est pas nécessaire que le système soit causal.

Un filtre est dit stable si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée. On parle alors de stabilité BIBO (pour «*Borned Input Borned Output*»). Si $x(t)$ est borné, $|x(\tau)| \leq M, \forall \tau$, et

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \right|, \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)x(t - \tau)| d\tau, \\ &\leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

et la sortie est bornée si le filtre est stable, c'est-à-dire

$$\boxed{\int_0^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \leq +\infty}.$$

On notera que cette condition nous permettra de définir la transformée de FOURIER de $h(t)$, notée $H(f)$, que nous identifierons à la *fonction de transfert* du filtre.

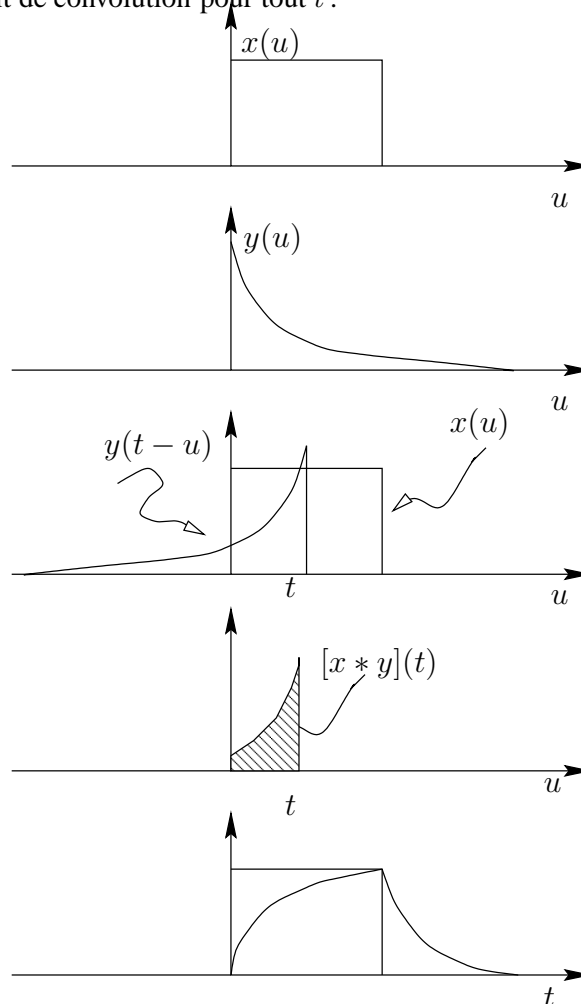
4.3 Interprétation graphique de la convolution

La convolution entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ s'écrit

$$[x * y](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du.$$

Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la surface du produit $x(u)y(t-u)$. Le signal $y(t-u)$ est simplement le signal initial $y(u)$, retourné dans le temps pour donner $y(-u)$, puis translaté de t .

En calculant alors l'ensemble des surfaces obtenues en faisant « glisser » y , c'est-à-dire pour tous les décalages de t , on obtient le produit de convolution pour tout t :



4.4 Réponse en fréquence

La convolution permet de décrire la sortie d'un filtre caractérisé par sa réponse impulsionnelle. Un filtre peut également être caractérisé dans le domaine fréquentiel, ce qui nous amènera à retrouver la notion de fonction de transfert et à donner les relations liant les descriptions temporelles et fréquentielles d'un système linéaire.

Considérons un système de réponse impulsionnelle $h(t)$ et d'entrée

$$x(t) = X_0 e^{j2\pi f_0 t}.$$

La sortie est donnée par

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X_0 e^{j2\pi f_0 (t-\tau)} d\tau, \\ &= X_0 e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau. \end{aligned}$$

On reconnaît là l'expression de la transformée de FOURIER de $h(\tau)$: le *gain complexe* ou la *fonction de transfert* $H(f)$ du système

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau.$$

La sortie s'écrit alors simplement

$$y(t) = X_0 e^{j2\pi f_0 t} H(f_0).$$

Pour un système linéaire excité par une exponentielle complexe de fréquence f_0 , on obtient en sortie le *même* signal, au facteur $H(f)$ complexe près. Ceci donne l'intérêt de la transformée de FOURIER : les exponentielles complexes sont les *fonctions propres* des systèmes linéaires invariants, et $H(f_0)$ joue le rôle de la *valeur propre* associée.

Considérons maintenant un signal $x(t)$ quelconque. On peut exprimer $x(t)$ comme une somme infinie d'exponentielles complexes (il s'agit simplement de la transformée de FOURIER inverse) :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df.$$

À chacune des composantes $X(f) e^{j2\pi ft}$ correspond alors une sortie $X(f)H(f) e^{j2\pi ft}$, et, par superposition,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)H(f) e^{j2\pi ft} df.$$

On en déduit que la transformée de FOURIER de la sortie, $Y(f)$, vaut simplement :

$$\boxed{Y(f) = X(f)H(f)}.$$

La description temporelle, en terme de produit de convolution, se transforme donc en un produit simple dans le domaine de FOURIER. Encore une des richesses de la description fréquentielle ;

$$\boxed{[x * y](t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f)Y(f)}.$$

On vérifie facilement que réciproquement,

$$\boxed{x(t)y(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} [X * Y](f)}.$$

En effet, si on exprime la transformée de FOURIER inverse du produit de convolution $[X * Y](f)$,

$$\text{TF} \{[X * Y](f)\}^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u) e^{j2\pi ft} df du.$$

En décomposant $e^{j2\pi ft}$ en $e^{j2\pi(f-u)t} e^{j2\pi ut}$, l'intégrale double devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{j2\pi ut} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-u) e^{j2\pi(f-u)t} df du,$$

et en reconnaissant que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f-u) e^{j2\pi(f-u)t} df,$$

il vient

$$\text{TF} \{[X * Y](f)\}^{-1} = x(t)y(t).$$

La transformation du produit de convolution en produit simple par transformée de FOURIER, et réciproquement constituent le théorème de PLANCHEREL

$$\boxed{\begin{array}{l} [x * y](t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f)Y(f), \\ x(t)y(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} [X * Y](f). \end{array}}$$

Ce théorème a plusieurs conséquences importantes.

4.4.1 Conséquences

La transformée de FOURIER de $x(t)y^*(t)$ vaut

$$x(t)y^*(t) \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y^*(u-f) du,$$

car TF $\{y^*(t)\} = Y^*(-f)$. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y^*(u-f) du,$$

soit, pour $f = 0$,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y^*(u) du}.$$

Cette relation indique que *le produit scalaire se conserve* dans les différentes bases de représentation des signaux. Cette propriété est appelée théorème de PLANCHEREL-PARSEVAL. En utilisant cette relation avec $y(t) = x(t)$, on obtient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df},$$

qui est quant-à-elle une relation de *conservation de l'énergie*. Il s'agit de la relation de PARSEVAL.

En posant enfin $y(t) = x(t - \tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)X^*(u) e^{j2\pi u\tau} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df. \end{aligned}$$

La fonction

$$R_{xx}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau) dt$$

est appelée *fonction d'autocorrélation*. On a vu ci-dessus que

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df,$$

c'est-à-dire que la transformée de FOURIER de $R_{xx}(\tau)$ est simplement le module carré de la TF de $x(t)$. On peut vérifier aisément que si

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

est la fonction d'*intercorrélacion* entre $x(t)$ et $y(t)$, alors,

$$\text{TF} \{R_{xy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = X(f)Y^*(f).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau) dt \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} X(f)Y^*(f), \\ R_{xx}(\tau) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau) dt \underset{\leftarrow}{\rightrightarrows} |X(f)|^2. \end{aligned}$$

Les fonctions de corrélation sont utilisées dans nombre d'applications de traitement du signal. Les deux définitions que nous avons données ci-dessus sont les définitions des fonctions de corrélation pour les signaux *déterministes* et *d'énergie finie*. Nous verrons plus loin dans ce cours l'utilité des fonctions de corrélation pour l'analyse des signaux aléatoires. Pour le moment nous allons analyser les principales propriétés des fonctions de corrélation et leurs conséquences, pour des signaux déterministes.

5 Fonctions de corrélation

Les fonctions de corrélation, ou d'intercorrélation, permettent de comparer des signaux distincts en fonction du « retard » entre les signaux. La transformée de FOURIER des fonctions de corrélation est le spectre (l'inter-spectre) de l'énergie ou puissance du ou des signaux considérés. Les fonctions de corrélation sont donc utiles pour étudier la « ressemblance » de différents signaux (dans le domaine temporel), et la répartition de l'énergie ou de la puissance en fonction de la fréquence. Les principales applications des fonctions de corrélation prennent place dans le cadre des signaux aléatoires.

5.1 Définitions et propriétés

5.1.1 Définitions

Pour des signaux d'énergie finie, on définit

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau) dt,$$

$$R_{xx}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau) dt.$$

Pour des signaux de puissance moyenne finie, on définit, de manière analogue,

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t)y^*(t-\tau) dt,$$

$$R_{xx}(\tau) \triangleq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t)x^*(t-\tau) d\tau.$$

5.1.2 Propriétés

Propriétés de symétrie

Par simple application des définitions, on pourra (exercice) vérifier les *propriétés de symétrie* suivantes :

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}^*(\tau), \quad \text{Symétrie hermitienne}$$

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}^*(\tau).$$

Pour des signaux réels, on aura alors

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau),$$

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau).$$

Distributivité

La propriété de distributivité permet de simplifier notablement certains calculs : si

$$x(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i(t)$$

$$y(t) = \sum_{j=1}^n \beta_j y_j(t)$$

alors

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j R_{x_i y_j}(\tau).$$

Par linéarité de la transformée de FOURIER, on aura également

$$\text{TF} \{R_{xy}(\tau)\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \text{TF} \{R_{x_i y_j}(\tau)\}.$$

Maximum

L'inégalité de SCHWARTZ

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

entraîne que

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0)R_{yy}(0).$$

On en déduit que

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0).$$

La valeur $R_{xx}(0)$ constitue donc un maximum *maximorum* de la fonction d'autocorrélation.

Signification de $R_{xx}(0)$

Pour le retard nul,

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

représente l'énergie du signal (pour des signaux à énergie finie);

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} |x(t)|^2 dt$$

représente la puissance du signal (pour des signaux de puissance moyenne finie).

5.2 Densités spectrale d'énergie et de puissance

On appelle densité spectrale de puissance (pour les signaux de puissance moyenne finie) ou densité spectrale d'énergie (pour les signaux d'énergie finie) la transformée de FOURIER des fonctions de corrélation

$$S_{xy}(f) \triangleq \text{TF} \{R_{xy}(\tau)\}, \quad \text{interspectre}$$

$$S_{xx}(f) \triangleq \text{TF} \{R_{xx}(\tau)\}, \quad \text{spectre, ou autospectre.}$$

Dans le cas des signaux déterministes étudiés jusqu'à présent, nous avons vu que

$$S_{xy}(f) = \text{TF} \{R_{xy}(\tau)\} = X(f)Y^*(f),$$

si les signaux considérés sont des signaux d'énergie finie. Dans le cas des signaux de puissance moyenne finie, on montre que (exercice)

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} X_T(f)Y_T^*(f),$$

où $X_T(f)$ représente la transformée de FOURIER définie sur une durée T . Ces deux relations ne sont valables **que** pour des signaux certains. Pour des signaux aléatoires, les densités spectrales, seront des quantités positives différentes. Il s'agit là de densités spectrales de puissance, puisque

$$P_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(f) df,$$

$$P_{XX} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df.$$

5.3 Relation corrélation-convolution

L'intercorrélation s'écrit

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau) dt.$$

Pour ne pas jeter trop de trouble, remplaçons la variable muette t par u et exprimons l'intercorrélation pour un retard t :

$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y^*(u-t) du.$$

La convolution entre x et y s'écrit quant-à-elle

$$[x * y](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u) du.$$

On voit donc que la corrélation n'est autre qu'une convolution dans laquelle $y(t)$ a été «retourné dans le temps» et conjugué. Si on pose alors

$$y^{(-)}(t) \triangleq y(-t),$$

on a alors simplement

$$R_{xy}(\tau) = [x * y^{(-)*}](\tau).$$

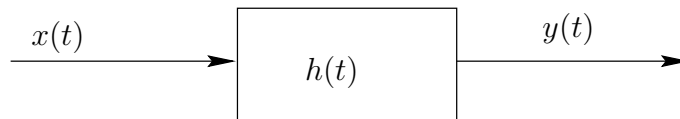
Pour la fonction de corrélation, on parle alors de *carré de convolution*. À l'aide de cette constatation, on peut retrouver la plupart des propriétés des corrélations à partir des celles de la convolution. Par exemple, le théorème de PLANCHEREL fournit

$$S_{xy}(f) = \text{TF} \left\{ [x * y^{(-)*}](\tau) \right\} = X(f)Y^*(f).$$

Remarquons encore que si $y(t)$ est une fonction réelle et paire, i.e. $y^{(-)*}(t) = y(t)$, alors *convolution et corrélation sont confondues*.

5.4 Filtrage

Soit $y(t)$ la sortie d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, excité par une entrée $x(t)$



On a alors

$$y(t) = [x * h](t).$$

Il est clair que l'on a alors

$$y^{(-)}(t) = y(-t) = [x * h](-t),$$

et on vérifie que

$$y^{(-)}(t) = [x^{(-)} * h^{(-)}](t).$$

L'autocorrélation de la sortie vaut alors

$$R_{yy}(\tau) = [x * h * x^{(-)*} * h^{(-)*}](\tau),$$

$$R_{yy}(\tau) = [h * x * x^{(-)*} * h^{(-)*}](\tau),$$

$$R_{yy}(\tau) = [h * R_{xx} * h^{(-)*}](\tau),$$

en utilisant la commutativité de la convolution. On retiendra la dernière relation, qui lie l'autocorrélation de la sortie d'un filtre à l'autocorrélation de son entrée

$$R_{yy}(\tau) = [h * R_{xx} * h^{(-)*}](\tau).$$

Par transformée de FOURIER, on en déduit que

$$S_{yy}(f) = H(f)S_{xx}(f)H^*(f),$$

soit

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{xx}(f).$$

La densité spectrale de la sortie est donc égale à la densité spectrale de l'entrée, mise en forme par le module carré de la fonction de transfert. De la même manière, on peut vérifier que

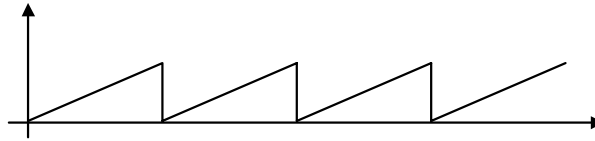
$$R_{yx}(\tau) = [h * R_{xx}](\tau),$$

soit

$$S_{yx}(f) = H(f)S_{xx}(f).$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

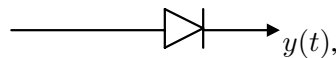
Exercice 1 : On considère le signal $x(t)$ périodique de période T suivant :



- Développer $x(t)$ en série de FOURIER.
- Tracer le module du spectre de $x(t)$ ($T = 0.1$ sec)
- Soit $y(t) = x(t - T/2) - x(t)$. Dessiner $y(t)$. Quel est le développement en série de FOURIER de $y(t)$?

Exercice 2 : On considère le système

avec $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 100$ Hz.

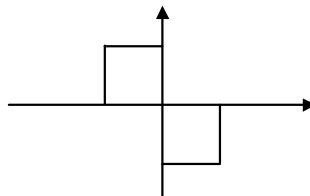


- Quel est le développement en série de FOURIER de $x(t)$?
- Quel est le développement en série de FOURIER de $y(t)$?
- Tracer les spectres de $x(t)$ et $y(t)$.
- Quel pourcentage de la puissance de $y(t)$ est compris dans la bande $[-100, +100]$ (Hz)?

Exercice 3 : Soit $x(t) = \exp(-at)\text{ech}(t)$ ($\text{ech}(t)$ est l'échelon unité (fonction de Heaviside) et $a > 0$)

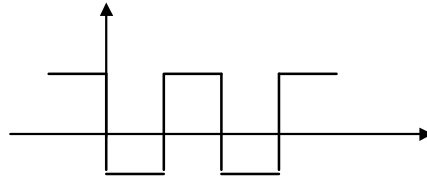
- Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$. Tracer son spectre.
- $y(t) = x(t) + x(-t)$. Dessiner $y(t)$, calculer la TF de $y(t)$, tracer le spectre correspondant. Étudier $\lim(y(t))$ et $\lim(Y(f))$ lorsque $a \rightarrow 0$
- $z(t) = x(t) - x(-t)$. Dessiner $z(t)$, calculer la TF de $z(t)$, tracer le spectre correspondant. Étudier $\lim(z(t))$ et $\lim(Z(f))$ lorsque $a \rightarrow 0$.

Exercice 4 : On considère $x(t)$ suivant :



- Calculer la TF de $x(t)$
- soit $y(t) = \int_0^t x(u) du$. Tracer $y(t)$. Calculer $Y(f) = \text{TF}(y(t))$ en utilisant la propriété sur l'intégration.
- Donner l'expression du signal $x_T(t)$ obtenu par périodisation de $x(t)$. Quelle est la TF de $x_T(t)$? Comparer le résultat à celui obtenu pour l'exercice 1 c).

Exercice 5 : On considère le filtre passe bas de réponse impulsionnelle $h(t) = \exp(-at)\text{ech}(t)$. On met à l'entrée de ce filtre le signal $x(t)$ suivant (étudié précédemment)



- Comment s'écrit $y(t)$, le signal obtenu par filtrage de $x(t)$ par $h(t)$.
- Quelle est la TF du signal $y(t)$.
- Tracer le module du spectre de $y(t)$ ($T=1, a=10$).

Exercice 6 : (modulation d'amplitude)

Soit $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 2 \cos(2\pi f_2 t)$, avec $f_1 = 100$ Hz et $f_2 = 200$ Hz

- Quelle est la TF de $x(t)$?
- On module la porteuse $f_0 = 1000$ Hz en amplitude par $x(t)$: $y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t)$. (modulation AM sans porteuse). Que vaut $Y(f)$? Tracer les spectres de $x(t)$ et $y(t)$.
- On démodule $y(t)$ en le multipliant par la porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$ et en filtrant le signal résultant $z(t)$ par un filtre passe bas. Quel est le spectre du signal $z(t)$? Quelle doit être la fréquence de coupure de ce filtre pour récupérer le spectre du signal modulant $x(t)$? Interpréter les opérations de modulation et démodulation par des convolutions dans le domaine fréquentiel.

Exercice 7 : (signal analytique)

On considère le signal $x(t)$ réel et sa transformée de FOURIER $X(f)$. On cherche à construire le signal $z(t)$ sous la forme $z(t) = x(t) + jy(t)$ dont le spectre soit nul pour les fréquences négatives et égal à $2X(f)$ pour les fréquences positives, *i.e.* $Z(f) = 2X(f)\text{ech}(f)$ (avec $\text{ech}(f)$ l'échelon de Heaviside en fréquence).

- Trouver l'expression de $Y(f)$ en fonction de $X(f)$ (on écrira $\text{ech}(f)$ en fonction de $\text{signe}(f)$ la fonction signe).
- Trouver l'expression de $y(t)$ en fonction de $x(t)$. Cette relation (liant $y(t)$ à $x(t)$) s'appelle la Transformée de Hilbert, on la note Hi : $y(t) = Hi(x(t))$.
- Calculer la Transformée de Hilbert de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ et le signal analytique correspondant.

Exercice 8 : (autocorrélation)

Soit $x(t)$ réel, de fonction d'autocorrélation $R_{XX}(\tau)$ et de densité spectrale $S_{XX}(f)$. Soit $y(t) = x(t + t_0) - x(t - t_0)$.

- Calculer la fonction d'autocorrélation de $y(t)$.
- Calculer sa densité spectrale.

c) Traiter l'exemple $x(t) = \text{rect}_T(t)$ et $t_0 = T/2$.

Exercice 9 : (autocorrélation) :

Montrer que l'autocorrélation de $x(t) = \exp(j\pi at^2)$, $R_{XX}(\tau)$ est nulle pour τ différent de 0.

Le signal $\text{Re}(x(t)) = \cos(\pi at^2)$ est appelé *chirp* et est utilisé comme signal radar en raison de la propriété vue ci-dessus.

Exercice 10 : (intercorrélation)

Soient deux signaux réels $x(t)$ et $y(t)$ identiques à un retard et un affaiblissement près : $y(t) = ax(t - t_0)$.

On connaît l'énergie de $x(t)$; $E_x = R_{XX}(0)$. Comment déterminer l'affaiblissement a et le retard t_0 ?

Problème I : (Transformée de Hilbert)

On rappelle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Echelon}(t) \quad \underset{\leftarrow}{\rightsquigarrow} \quad \frac{1}{2} \left[\delta(f) - \frac{j}{\pi f} \right] \\ \text{Signe}(t) \quad \underset{\leftarrow}{\rightsquigarrow} \quad \frac{-j}{\pi f} \\ \frac{1}{2} \left[\delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right] \quad \underset{\leftarrow}{\rightsquigarrow} \quad \text{Echelon}(f) \\ \frac{j}{\pi t} \quad \underset{\leftarrow}{\rightsquigarrow} \quad \text{Signe}(f) \end{array} \right. ,$$

où $\underset{\leftarrow}{\rightsquigarrow}$ désigne le fait que les deux fonctions mises en relation forment une paire de transformées de Fourier.

On note

$$X_H(f) = -j \text{Signe}(f) X(f).$$

1 – Montrez graphiquement que

$$Z(f) = \frac{1}{2} [X(f) + jX_H(f)]$$

est un signal qui ne possède pas de fréquences négatives.

2 – Montrez que

$$x_H(t) = \text{TF}^{-1}\{X_H(f)\},$$

peut être vu comme la sortie d'un filtre, dont vous donnerez la réponse impulsionnelle $h(t)$.

On appelle *transformée de Hilbert* la transformation reliant $x_H(t)$ et $x(t)$:

$$x_H(t) = \text{TH}\{x(t)\}.$$

3 – Donnez l'expression de $z(t)$ en fonction de $x(t)$ et de $\text{TH}\{x(t)\}$. En raisonnant à partir des transformées de Fourier, montrer que

$$\text{TH}\{\text{TH}\{x(t)\}\} = -x(t).$$

Donnez alors l'expression de la transformée de Hilbert de $z(t)$. Déduisez en l'expression de $x(t)$ en fonction de $z(t)$ et de $\text{TH}\{z(t)\}$.

On considère maintenant un système de réponse impulsionnelle $g(t)$. Si ce système est causal, alors

$$g(t) = g(t) \text{Echelon}(t) = \frac{1}{2} [1 + \text{Signe}(t)] g(t).$$

4 – Montrez que dans ces conditions,

$$G(f) = -j \text{TH}\{G(f)\}.$$

En décomposant $G(f)$ en ses parties réelle et imaginaire, notées respectivement $G_R(f)$ et $G_I(f)$, montrez que

$$\left\{ \begin{array}{l} G_R(f) = \text{TH}\{G_I(f)\}, \\ G_I(f) = -\text{TH}\{G_R(f)\}. \end{array} \right.$$

Ces relations sont les *relations de Bayard et Bode*. Elles indiquent que la TF d'un système causal n'est pas quelconque, et qu'il suffit de connaître la partie réelle ou la partie imaginaire pour caractériser complètement le système.

CHAPITRE II

ÉCHANTILLONNAGE ET QUANTIFICATION

AUJOURD'HUI de plus en plus souvent, le traitement des signaux se fait sous forme numérique. Le numérique présente en effet un grand nombre d'avantages tels que :

- la reproductibilité des systèmes,
- l'absence de dérive en temps ou en température,
- l'absence de réglages compliqués,
- la possibilité de traitements adaptatifs . . .

D'autre part, les performances des processeurs numériques s'améliorent très rapidement :

- augmentation de leur vitesse
- diminution de leur consommation
- diminution de leur coût

À la frontière entre le traitement numérique et le traitement analogique, les circuits à capacités commutées opèrent sur des signaux échantillonnés, mais non numérisés. L'intérêt de ces systèmes, en plus de leur faible consommation est leur grande densité d'intégration.

L'ingénieur a donc à choisir entre 3 types de réalisations techniques :

- analogique
- échantillonné
- numérique

et son choix se fera sur des critères de :

- coût de développement
- consommation
- coût des composants
- performances souhaitées : en particulier rapport signal à bruit exigé

Dans le cas d'une solution échantillonnée ou numérique, il faut répondre aux questions suivantes :

- à quelle fréquence échantillonner les signaux ?
- quel type de quantification choisir ?
- sur combien de bits numériser ?

Répondre à ces questions est le but de ce chapitre.

1 Échantillonnage

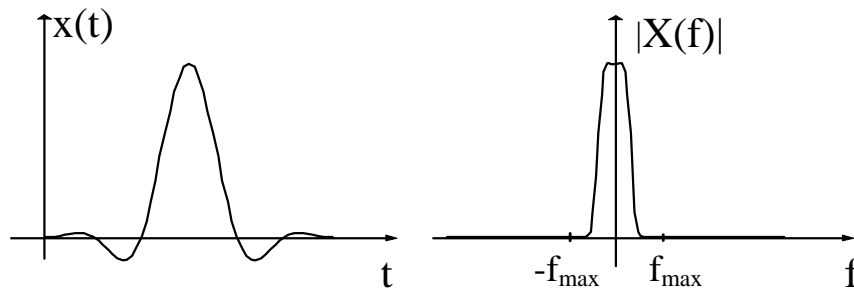
Théorème 1 Théorème de Shannon

Lorsqu'un signal $x(t)$ a un spectre à support borné [$X(f) = 0$ pour $|f| > f_{max}$], il est possible d'échantillonner ce signal sans perdre d'information : il suffit pour cela de choisir une fréquence d'échantillonnage $f_e > 2f_{max}$. On pourra alors reconstruire $x(t)$ parfaitement à partir des échantillons $x(nT_e)$, avec $T_e = 1/f_e$.

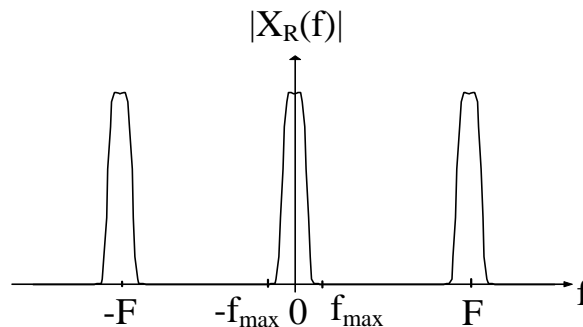
1.1 Première démonstration du théorème de Shannon

Cette première démonstration ne nécessite pas l'utilisation de la notion de distribution mais elle est assez lourde.

Soit un signal $x(t)$ dont le spectre est à support borné, c'est-à-dire que sa transformée de Fourier $X(f)$ est telle que $X(f) = 0$ pour $|f| > f_{max}$.



On fabrique le signal $X_R(f)$ à partir de $X(f)$ en répétant $X(f)$ avec la période $F \geq 2f_{max}$.



$X_R(f)$ étant périodique de période F , on peut calculer sa série de Fourier.

$$X_R(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-j2\pi n \frac{f}{F}}, \quad (\text{II.1})$$

$$\text{avec } C_n = \frac{1}{F} \int_{-\frac{F}{2}}^{\frac{F}{2}} X_R(f) e^{j2\pi n \frac{f}{F}} df$$

$$\text{pour } f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right] \quad X_R(f) = X(f)$$

$$\text{D'où } C_n = \frac{1}{F} \int_{-\frac{F}{2}}^{\frac{F}{2}} X(f) e^{j2\pi n \frac{f}{F}} df = \frac{1}{F} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi n \frac{f}{F}} df$$

On reconnaît ici la transformée de Fourier inverse de $X(f)$, c'est-à-dire $x(t)$, calculée au point $t = \frac{n}{F}$:

$$C_n = \frac{1}{F} x\left(\frac{n}{F}\right)$$

et en remplaçant C_n par sa valeur dans l'expression (II.1) :

$$X_R(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{F} x\left(\frac{n}{F}\right) e^{-j2\pi n \frac{f}{F}}$$

$$\text{Ainsi } X(f) = \begin{cases} X_R(f) & \text{si } f \in \left[-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$X(f)$ est donc parfaitement défini par la connaissance des valeurs de $x(t)$ aux instants $t = \frac{n}{F}$. Il en est de même de $x(t)$. Le théorème de Shannon est ici démontré.

Explicitons la relation liant $x(t)$ et les valeurs $x(\frac{n}{F})$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\frac{F}{2}}^{+\frac{F}{2}} X_R(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{F} \int_{-\frac{F}{2}}^{+\frac{F}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{F}\right) e^{-j2\pi n \frac{f}{F}} \right) e^{j2\pi ft} df$$

$$\text{Soit : } x(t) = \frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{F}\right) \int_{-\frac{F}{2}}^{+\frac{F}{2}} e^{j2\pi f(t - \frac{n}{F})} df$$

$$x(t) = \frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{F}\right) \text{sinc}\left(F\left(t - \frac{n}{F}\right)\right)$$

Où l'on note :

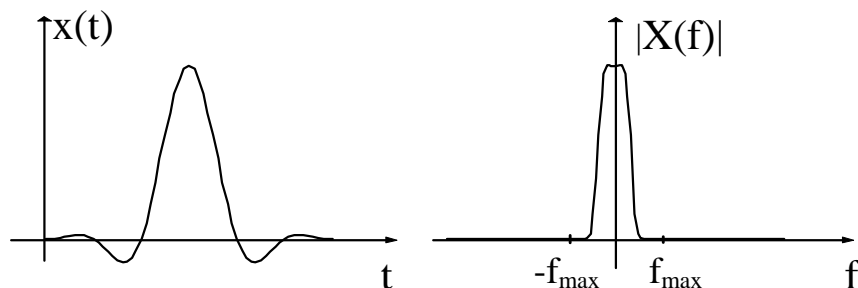
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

En résumé, si $F > 2f_{max}$, la connaissance de la suite $x(n/F)$ est suffisante pour déterminer parfaitement $x(t)$ ou $X(f)$ et :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{F}\right) \text{sinc}\left(F\left(t - \frac{n}{F}\right)\right) \\ X(f) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{F} x\left(\frac{n}{F}\right) e^{-j2\pi n \frac{f}{F}} & \text{si } |f| \leq f_{max} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{cases}$$

1.2 Seconde démonstration du théorème de Shannon

Cette démonstration utilise la notion de distribution.



Le signal $x(t)$ échantillonné à la fréquence $f_e = 1/T_e$ peut être représenté par la distribution $x_e(t)$:

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

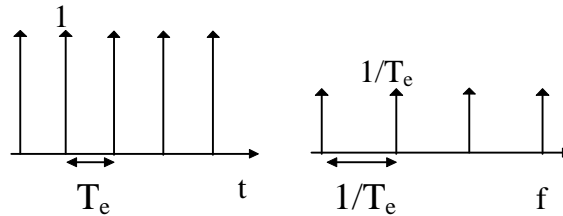
La transformée de Fourier de cette distribution est $X_e(f)$:

$$X_e(f) = X(f) * TF \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \right)$$

La théorie des distributions (lemme de Poisson) permet de montrer que :

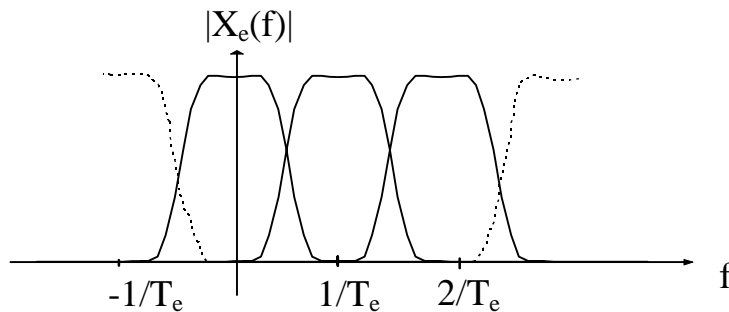
$$TF \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \right) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_e} \right)$$

(voir démonstration au paragraphe suivant) ce que l'on formule généralement par : la transformée de Fourier d'un peigne d'impulsions de Dirac est un peigne d'impulsions de Dirac.



$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta \left(f - \frac{n}{T_e} \right) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X \left(f - \frac{n}{T_e} \right).$$

La transformée de Fourier de la distribution $X_e(t)$ est donc une distribution $X_e(f)$ périodique, de période $1/T_e$.

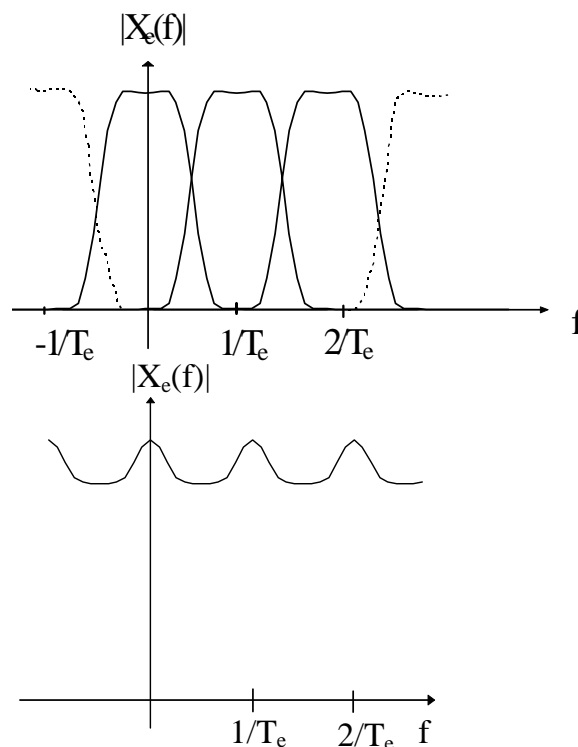


Deux cas peuvent se présenter suivant la valeur de T_e :

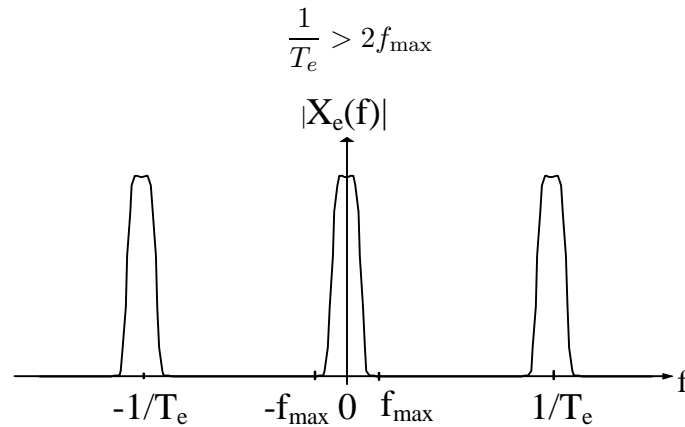
- 1^{er} cas :

$$\frac{1}{T_e} \leq 2f_{\max}$$

On a alors recouvrement de spectre, "aliasing" dans la littérature anglo-saxonne, et il est généralement impossible de reconstruire le signal de départ sans erreur :



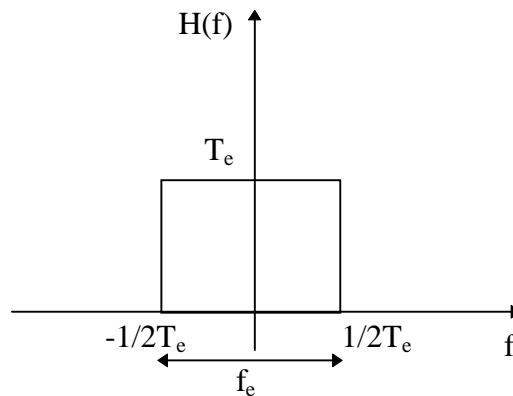
• 2^{me} cas :



Il n'y a pas de recouvrement de spectre, $T_e X_e(f)$ et $X(f)$ coïncident entre $-1/2T_e$ et $1/2T_e$.

Pour reconstruire $x(t)$ à partir de $x_e(t)$, il suffit alors de faire passer $x_e(t)$ dans un filtre passe-bas idéal de fonction de transfert $H(f)$:

$$H(f) = T_e \text{rect} \left(\frac{f}{f_e} \right)$$



La sortie $y(t)$ de ce filtre passe-bas vérifie :

$$Y(f) = H(f)X_e(f) = X(f),$$

c'est-à-dire :

$$y(t) = x(t)$$

Le théorème de Shannon est ici démontré, on peut reconstruire parfaitement $x(t)$ à partir du signal échantillonné $x_e(t)$.

Explicitons la relation liant $x(t)$ et les échantillons $x(nT_e)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \\ y(t) &= x_e(t) \star h(t) \\ h(t) &= TFI(H(f)) = f_e T_e \text{sinc}(f_e t) = \text{sinc}(f_e t) \\ y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) \star \text{sinc}(f_e t) \\ y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \text{sinc}(f_e(t - nT_e)) \\ x(t) &= y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \text{sinc}(f_e(t - nT_e)) \end{aligned}$$

Exercice 1 : Soit $x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$ échantillonné à $f_e = 4f_0$. Calculer la transformée de Fourier du signal échantillonné $x_e(t)$.

Corrigé :

$$X(f) = \frac{2}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

$$X_e(f) = 4f_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\delta(f - f_0(1 + 4k)) + \delta(f + f_0(1 + 4k)))$$

Exercice 2 : Calculer la transformée de Fourier du même signal échantillonné à $f_e = \frac{f_0}{2}$.

Corrigé :

$$X_e(f) = 2 \frac{f_0}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e)$$

Exercice 3 : Soit $x(t)$ à support spectral borné et f_{max} la fréquence maximale. On échantillonne $x(t)$ à $f_e = 2f_{max}$ et on bloque chaque échantillon pendant une durée $T_e = \frac{1}{f_e}$. Écrire le signal $y(t)$ échantillonné bloqué et calculer sa transformée de Fourier.

Corrigé :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \text{rect}_{T_e}(t - kT_e)$$

$$y(t) = \text{rect}_{T_e}(t) \star \left(x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e) \right)$$

$$Y(f) = \text{sinc}(fT_e) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e)$$

1.3 Rappel sur le lemme de Poisson

La série de Fourier de la distribution peigne de Dirac

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

est un peigne de Dirac :

$$P(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

$P(t)$ est une distribution périodique, de période T_e . Sa série de Fourier est formée des coefficients c_n tels que :

$$c_n = \frac{1}{T_e} \langle \delta_{t=0}, e^{j2\pi n \frac{t}{T_e}} \rangle = \frac{1}{T_e}$$

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_e} e^{j2\pi n \frac{t}{T_e}}$$

La transformée de Fourier de $P(t)$ est donc :

$$P(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_e} \right)$$

En conclusion :

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_e} e^{j2\pi n \frac{t}{T_e}}$$

$$TF \downarrow$$

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n T_e f} = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_e} \right)$$

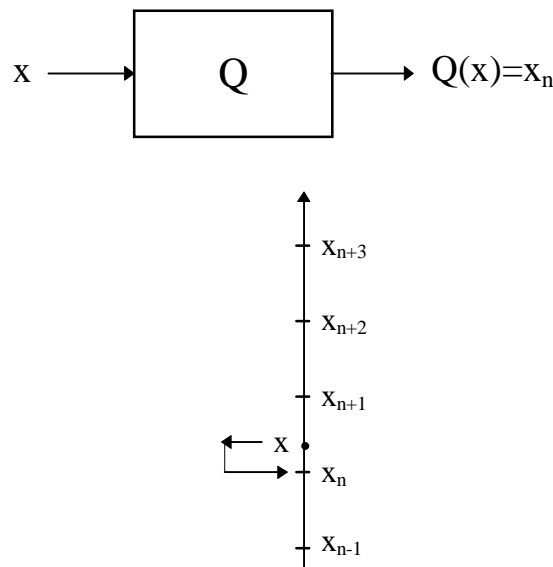
2 Quantification

On se limite ici à la quantification scalaire, c'est à dire à la quantification d'un échantillon isolé. On distingue plusieurs types de quantification scalaire, en particulier

- la quantification uniforme,
- la quantification non uniforme, comme la conversion de type logarithmique.

2.1 Définition de la quantification

Quantifier une valeur x réelle appartenant à un intervalle $[-x_{max}, x_{max}]$, consiste à remplacer cette valeur x par la valeur $Q(x) = x_n$ la plus proche de x choisie dans un ensemble fini (ou dénombrable) de N valeurs réelles notées x_n , (avec n entre 0 et $N - 1$).



La valeur quantifiée de x : $Q(x)$ est donnée par :

$$\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$$

$$\text{Si } |x - x_n| < |x - x_{n+1}| \quad Q(x) = x_n$$

$$\text{Si } |x - x_n| > |x - x_{n+1}| \quad Q(x) = x_{n+1}$$

$$\text{Si } x = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \quad Q(x) = x_n \text{ ou } x_{n+1} \quad \text{selon les systèmes.}$$

2.2 Quantification Uniforme

Si tous les intervalles $[x_n, x_{n+1}[$ ont même longueur, la quantification est dite uniforme et la constante q définie par $q = |x_n - x_{n+1}|$ est appelée *pas de quantification* ou *quantum*.

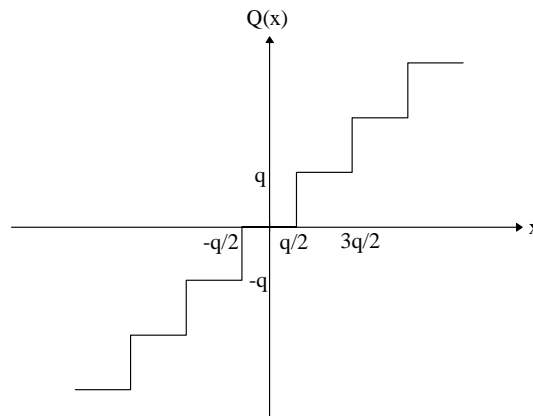
Le pas de quantification q peut s'exprimer en fonction des valeurs extrêmes $\pm x_{max}$ par :

$$q = \frac{2x_{max}}{2^N}$$

où N est le nombre de valeurs de quantification.

2.3 Caractéristique de quantification

C'est la courbe donnant $Q(x)$ en fonction de x . Dans le cas d'une quantification uniforme, cette courbe a l'allure suivante :



La quantification uniforme est, de ce fait, parfois appelée quantification linéaire.

2.4 Caractéristique de l'erreur de quantification, cas de la quantification uniforme

On s'intéresse dans ce paragraphe uniquement au cas de la quantification uniforme.

On appelle erreur de quantification e la différence entre x et $Q(x)$.

$$e = x - Q(x)$$

Lors de la quantification, deux sortes d'erreur peuvent être commises : l'erreur de granulation et l'erreur de saturation.

Une erreur de saturation se produit lorsque l'amplitude de l'échantillon à convertir est supérieure en valeur absolue à x_{max} . Cette erreur est d'autant plus gênante qu'elle n'est pas bornée, on cherche donc à minimiser la probabilité de saturation. On définit le facteur de surcharge, noté Γ , comme le rapport entre la valeur maximale du convertisseur x_{max} et l'écart type des échantillons à convertir, noté σ_x :

$$\Gamma = \frac{x_{max}}{\sigma_x}$$

La probabilité de saturation p_D dépend de la valeur de Γ .

Pour des échantillons x gaussiens :

$$\Gamma = 2 \Rightarrow p_D = 0.045$$

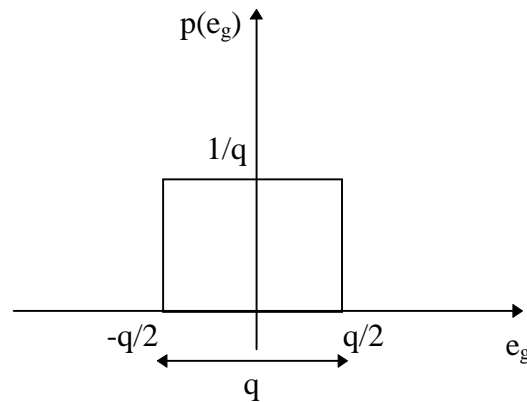
$$\Gamma = 4 \Rightarrow p_D = 0.00006$$

Lorsque les échantillons sont d'amplitude inférieure à x_{max} en valeur absolue, l'erreur de quantification est appelée erreur de granulation. Cette erreur est bornée. Si la quantification s'effectue par arrondi au plus proche voisin, l'erreur de granulation e_g en valeur absolue est inférieure à $q/2$.

$$e_g = x - Q(x)$$

$$|e_g| \leq \frac{q}{2}$$

Sous l'hypothèse, relativement générale, que e_g est uniformément répartie entre $-q/2$ et $q/2$ ¹, on peut calculer la valeur moyenne et l'écart type de cette erreur. La densité de probabilité de e_g (notée $p(e_g)$) est dessinée ci-dessous :



Sous cette hypothèse :

$$E(e_g) = \int_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} e_g p(e_g) de_g = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} e_g de_g = 0$$

$$E(e_g^2) = \sigma_g^2 = \int_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} e_g^2 p(e_g) de_g = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} e_g^2 de_g = \frac{q^2}{12}$$

$$\text{Et enfin } \sigma_g^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{1}{3} \frac{x_{max}^2}{2^{2N}}$$

Avec les mêmes hypothèses, Le rapport (noté RSB_{dB}) entre la puissance du signal σ_x^2 et la puissance de l'erreur de granulation σ_g^2 , peut s'exprimer en décibels par la relation suivante où N représente le nombre de bits du convertisseur :

$$RSB_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_g^2} \right) \quad \text{et en remplaçant } \sigma_g^2 \text{ par sa valeur en fonction de } x_{max} \text{ et } N$$

$$RSB_{dB} \approx 10 \log_{10} (\sigma_x^2) + 6N - 10 \log_{10} (x_{max}^2) + 10 \log_{10} (3)$$

$$RSB_{dB} \approx 6N + 10 \log_{10} (3) - 20 \log_{10} (\Gamma)$$

Le rapport signal sur bruit en dB dépend donc de façon linéaire de la puissance du signal en dB. Il est d'autant plus grand que la puissance du signal est grande.

2.5 Dynamique d'un quantificateur uniforme N bits

Appelons codeur un système effectuant une quantification uniforme (arrondi au plus proche voisin) puis une numérisation sur N bits. La dynamique D du codeur est définie par :

$$D_{\text{en dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{B} \right)$$

- S est la puissance de crête du codeur, c'est-à-dire puissance de la sinusoïde d'amplitude maximale codable sans écrêtage,

1. Cette hypothèse est réaliste si le pas de quantification est faible devant la dynamique du signal et si le signal occupe relativement uniformément cette dynamique

– B est la puissance du bruit de quantification : $B = \frac{q^2}{12}$

Calcul de S la puissance crête du codeur :

Un codeur N bits peut convertir sans saturation des valeurs x comprises entre $-x_{max}$ et x_{max} avec $2x_{max} = (2^N - 1)q$. De ce fait :

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{2^N - 1}{2} q \right)^2 \approx 2^{2N-3} q^2$$

$$D_{dB} \approx 10 \log_{10} \left(\frac{S}{B} \right) \approx 10 \log_{10} \left(\frac{2^{2N-3} q^2}{\frac{q^2}{12}} \right)$$

$$D_{dB} \approx 10 \log_{10}(2^{2N}) + 10 \log_{10} \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$RSB_{dB} \approx (6N + 1.76) dB$$

Rajouter 1 bit au convertisseur revient à rajouter 6 dB à la dynamique. Il s'agit là d'une formule bien connue des concepteurs de systèmes d'acquisition.

Conclusion : choix du pas de quantification et du nombre de bits de codage

On choisira le pas de quantification q en fonction de la précision désirée lors de la conversion et le nombre de bits N en fonction de la dynamique du signal à coder.

Exercice 4 : Quel est la fréquence d'échantillonnage et le nombre de bits nécessaires pour numériser un signal audio avec un convertisseur uniforme, sachant que l'oreille humaine perçoit les sons jusqu'à 20 KHz, et que l'on souhaite une précision de 0,5% sur les amplitudes comprises entre $0,5\%V_{FS}$ et V_{FS} où V_{FS} représente l'amplitude pleine échelle du convertisseur^a? On supposera qu'il n'y a jamais écrêtage. On note N le nombre de bits du convertisseur uniforme.

^aFS = Full Scale

Corrigé :

$$f_{max} = 20 \text{ KHz} \Rightarrow f_e \geq 40 \text{ KHz}$$

$$\frac{q}{2} \leq 2,510^{-2} 10^{-3} V_{FS} \quad \text{et} \quad V_{FS} = 2^{N-1} q$$

$$\Rightarrow$$

$$2^N \geq 0,410^5$$

$$\Rightarrow$$

$$N = 16$$

Il faut donc numériser le signal à une fréquence d'échantillonnage de 40 KHz sur 16 bits, ce qui donne un débit de 640 Kbps (Kilo bits par seconde).

2.6 Quantification Non-Uniforme, quantification logarithmique

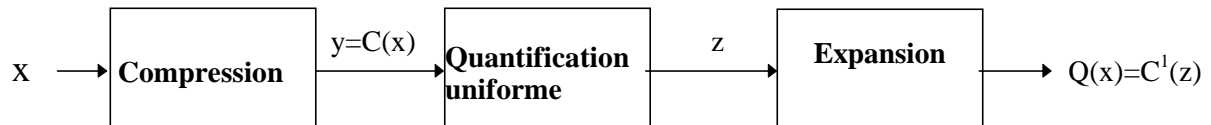
Avec une quantification uniforme, la précision absolue est la même pour les petites et les grandes valeurs. Il est parfois plus intéressant de travailler avec une précision relative à peu près constante. C'est le cas pour les signaux de parole, l'oreille ayant une sensibilité logarithmique.

Quantification logarithmique La quantification de type logarithmique permet d'obtenir un rapport signal sur bruit de quantification à peu près constant quelque soit la puissance du signal.

L'écart entre les valeurs de quantification n'est pas constant. Il croît logarithmiquement en fonction de l'amplitude du signal à quantifier.

Une quantification logarithmique peut se réaliser par une compression des amplitudes suivie d'une quantification uniforme, puis d'une expansion des amplitudes.

2.6.1 Loi de compression expansion

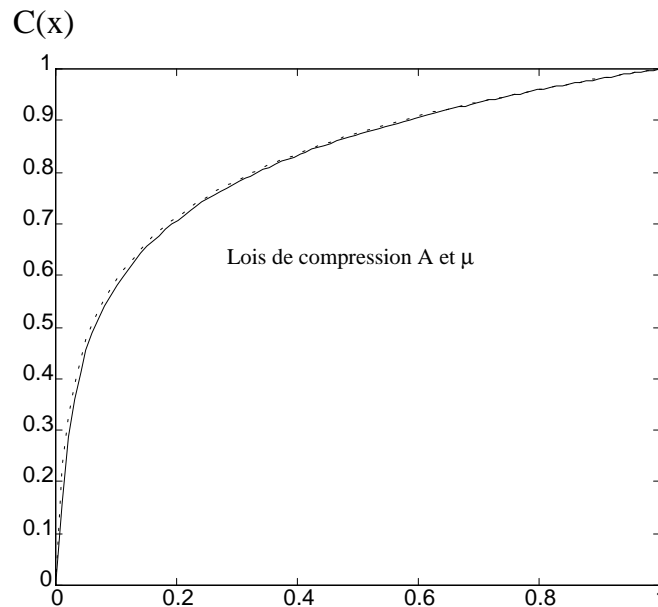


La loi de compression est notée $C(x)$. La loi d'expansion est l'opération inverse.

$$-x_{\max} \leq x \leq x_{\max} \quad y = C(x) \quad x = C^{-1}(y)$$

La loi de compression doit approcher une fonction logarithme. Deux lois sont utilisées en pratique: la loi A et la loi μ . Ces deux lois sont appliquées dans les codecs : circuits de conversion analogique numérique pour la téléphonie. La loi A est appliquée en Europe, la loi μ aux USA et au Japon.

La figure suivante représente les deux fonctions de compression ainsi obtenues. On s'aperçoit qu'elles sont pratiquement superposées. Sur la figure, on a normalisé x_{\max} à 1.



La loi A est définie par la relation suivante :

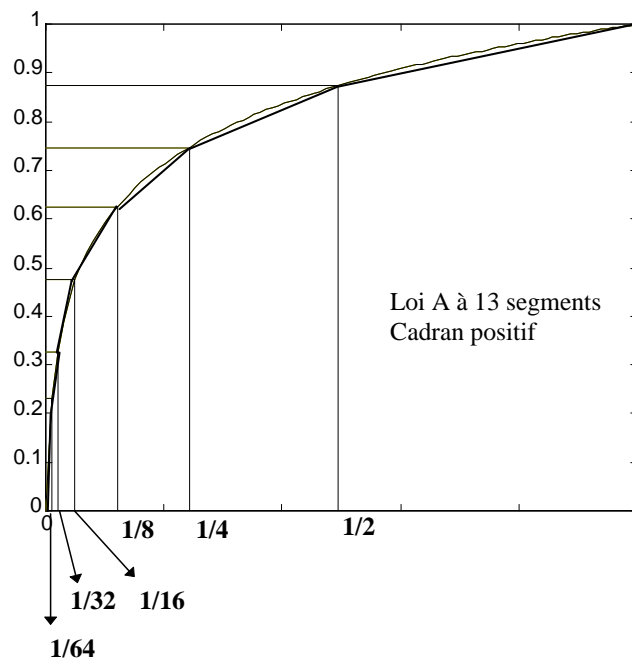
$$\begin{array}{ll} \text{Pour } |x| < \frac{1}{A} & C(x) = \frac{Ax}{1 + \log(A)} \\ \text{Pour } |x| \geq \frac{1}{A} & C(x) = \frac{1 + \log(Ax)}{1 + \log(A)} \\ \text{Avec } & A = 87.6 \end{array}$$

2.6.2 Approximations par segments des lois de compression A et μ

Pour leur réalisation matérielle les lois A et μ sont approchées par des segments de droite. La loi A est approchée par une courbe à 13 segments, et la loi μ par une courbe à 15 segments. Elles sont appliquées dans ce cas là avec une numérisation sur 8 bits.

En ce qui concerne la loi A, la pente du premier segment passant par l'origine, est de 16. Puis les pentes des segments successifs sont obtenues par divisions successives par deux. La pente du dernier segment vaut donc $1/4$.

La courbe suivante représente la loi A à 13 segments. Là encore x_{max} est normalisé à 1.



La numérisation est faite sur 8 bits :

S	A	B	C	1	2	3	4
1 bit de signe	3 bits donnant le numéro du segment			4 bits donnant la position sur le segment			

Le rapport signal sur bruit de quantification obtenu avec la loi A est constant sur une large plage de signal. Dans le cas de la conversion sur 8 bits, on peut remarquer que les petits signaux sont amplifiés par un facteur 16 avant d'être convertis, ce qui revient à diviser par 16 le pas de quantification, c'est-à-dire à utiliser 12 bits de quantification (gain de 4 bits). Par contre pour les grands signaux, le pas de quantification est multiplié par 4 par rapport à un convertisseur 8 bits uniforme, on perd donc 2 bits.

Cette méthode donne des résultats qualitatifs (notion subjective) comparables à une quantification linéaire sur 12 bits.

Le signal téléphonique étant échelonné à 8 KHz, une conversation téléphonique correspond à un débit binaire de : $8000 \times 8 = 64 \text{ Kbs}^{-1}$ (Kilo bits par seconde).

EXERCICES ET PROBLÈMES

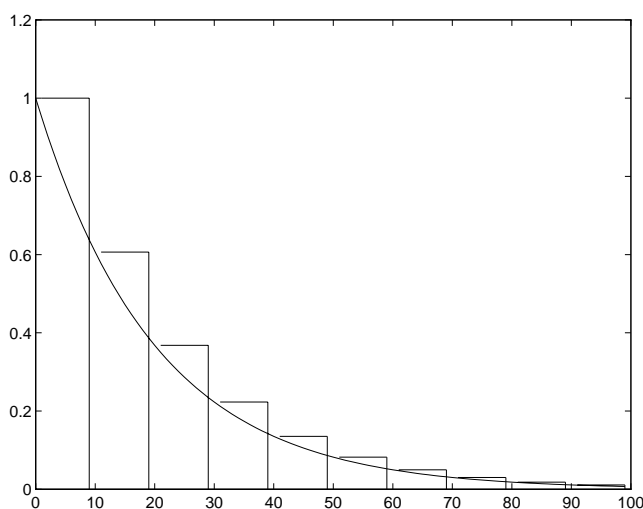
Exercice 1 : Quelle est la capacité mémoire nécessaire pour stocker une trame d'images vidéo, sachant que la largeur de bande du signal est de 6 Mhz, que l'on transmet 50 trames par seconde et que l'on souhaite une image noir et blanc à 256 niveaux de gris ?

Exercice 2 : Quelle est la capacité mémoire nécessaire pour stocker une minute de signal téléphonique, sachant que ce signal a une fréquence maximale de 4KHz et qu'on le mémorise en respectant le théorème de Shannon et en utilisant la loi A à 8 bits par échantillon ?

Exercice 3 : On considère un signal $x(t)$ de transformée de Fourier $X(f)$.

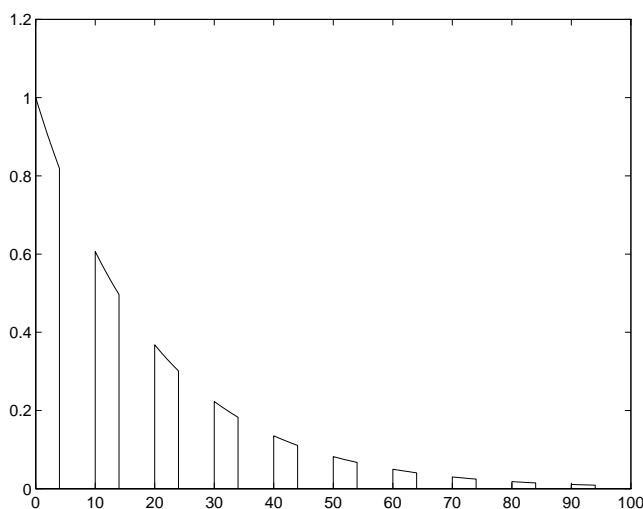
1ère question :

Calculer la transformée de Fourier du signal obtenu en échantillonnant $x(t)$ à la fréquence f_e et en bloquant chaque échantillon pendant T_e . ($T_e = \frac{1}{f_e}$ période d'échantillonnage) (sortie d'un Convertisseur Numérique Analogique par exemple).



2ème question :

Calculer la transformée de Fourier du signal $z(t)$ obtenu à partir de $x(t)$ de la manière suivante : toutes les T_e secondes pendant $\frac{T_e}{2}$ secondes on laisse passer le signal et pendant les $\frac{T_e}{2}$ secondes suivantes on force à zéro la sortie :



3ème question :

Quelle est la fonction de transfert du filtre de lissage idéal dans le premier cas ?

Exercice 4 : Calculer la puissance du bruit de quantification (appelé e) dans le cas d'une quantification uniforme sur N bits. On appellera q le pas de quantification, V_{FS} : la tension pleine échelle du quantificateur. Le

signal à quantifier x étant un signal de valeur maximale V_{max} ($|x| \leq V_{max}$) de densité de probabilité uniforme. N.B. Ne pas faire d'hypothèse simplificatrice.

Exercice 5 : On échantillonne le signal $x(t) = \cos(2\pi f_o t)$ (avec $f_o = 1$ KHz) à la fréquence $f_e = 500$ Hz. Puis on filtre le signal échantillonné par un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure égale à 700 Hz, de fonction de transfert $H(f) = \text{rect}_{700}(f)$. On appelle $y(t)$ le signal de sortie du filtre. Calculer $y(t)$.

Problème I :

- 1) Énoncez la condition de Shannon sur l'échantillonnage d'un signal à bande limitée.
- 2) On considère le signal réel $x(t)$ de type passe-bande : $X(f)$ existe pour $|f| \in]F_o - B, F_o + B[$.
 - a) À quelle fréquence peut-on échantillonner ce signal en respectant la condition de Shannon ?
 - b) Si on échantillonne à la fréquence limite de Shannon et si les échantillons sont codés sur 8 bits, quel est le débit (en bits/s) nécessaire pour la transmission de ce signal ?
 - 3) On échantillonne finalement à la fréquence $F_E = F_o/2$.
 - a) Donnez l'expression du signal échantillonné $x_E(t)$.
 - b) Donnez l'expression de la transformée de Fourier $X_E(f)$
 - c) Quelle condition doit respecter B pour qu'il n'y ait pas de recouvrement ?
 - d) En supposant cette condition vérifiée, représentez le module de $X_E(f)$.
 - e) Quel est maintenant le débit nécessaire (toujours en codant sur 8 bits) ?
 - 4) On pose $F_o = KB$, où K est un nombre entier >1 . À quelle fréquence minimale peut-on alors échantillonner ? Combien obtient-on alors de « motifs » entre 0 et F_o ? Représentez $X_E(f)$ pour $K = 6$.
 - 5) On suppose que $x(t)$ a une transformée de Fourier passe-bande, centrée sur F_o et de largeur $2B$, avec $(K + 1)B > F_o \geq KB$. Énoncez un théorème de Shannon généralisé pour ces signaux.
 - 6) On isole le motif passe-bas, $f \in [-F_E/2, F_E/2]$, à l'aide du filtre passe-bas idéal de réponse en fréquence $\text{rect}_{F_E}(f)$. Représentez le module de la transformée de Fourier $X_B(f)$ du signal ainsi obtenu $x_B(t)$. Calculez la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre.
 - 7) Montrez que l'on retrouve le signal initial en filtrant $x_E(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h'(t) = 2 \cos(2\pi F_o t)h(t)$. Représentez le module de la transformée de Fourier de cette réponse impulsionnelle.

CHAPITRE III

TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE : TFD ET TFR

LORSQU'ON désire calculer la transformée de Fourier d'une fonction $x(t)$ à l'aide d'un ordinateur, ce dernier n'ayant qu'un nombre fini de mots de taille finie, on est amené à :

- discrétiser la fonction temporelle,
- tronquer la fonction temporelle,
- discrétiser la fonction fréquentielle.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

En approchant l'intégrale par une somme d'aires de rectangles de durée T_e et en limitant la durée d'intégration à l'intervalle $[0, (N-1)T_e]$, on obtient :

$$X(f) \approx T_e \sum_{n=0}^{(N-1)} x(nT_e)e^{-j2\pi fnT_e}$$

Ce qui donne pour les valeurs de fréquences $f_k = kf_e/N$:

$$X(f_k) \approx T_e \sum_{n=0}^{(N-1)} x(nT_e)e^{-j2\pi \frac{nk}{N} f_e T_e} \approx T_e \sum_{n=0}^{(N-1)} x(nT_e)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Ce n'est pas une approximation sophistiquée de $X(f)$, mais elle est très utilisée en pratique sous le nom de TFD car il existe un algorithme de calcul efficace appelé FFT (Fast Fourier Transform) ou TFR (Transformée de Fourier rapide).

La TFD est par ailleurs utilisée, lorsque l'on travaille avec des suites numériques sans lien avec un signal physique, pour définir une représentation de la suite sur une base de fonctions fréquentielles.

1 Transformée de Fourier Discrète : TFD

1.1 Définition de la TFD

On appelle transformée de Fourier discrète d'une suite de N termes $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, la suite de N termes $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$, définis par

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

En pratique, les N termes $x(n)$ peuvent être N échantillons d'un signal analogique échantillonné : $x_n = x(nT_e)$, et les N termes $X(k)$ correspondre à une approximation (à un facteur multiplicatif T_e près) de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence $f_k = kf_e/N$, avec k entre 0 et $N-1$, c'est à dire f entre 0 et f_e .

1.2 Inversion de la TFD

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

En effet, calculons :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N}} \right) e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \\ A &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(n-i)k}{N}} \right) \\ \text{si } i &\neq n \quad \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(n-i)k}{N}} = \frac{1 - e^{i2\pi (n-i)}}{1 - e^{i2\pi \frac{n-i}{N}}} = 0 \\ \text{si } i &= n \quad \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(n-i)k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N \\ A &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(n-i)k}{N}} \right) = \frac{1}{N} x(n) N \\ A &= x(n) \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

1.3 Lien entre la transformée de Fourier et la TFD

Soit $x(t)$ un signal analogique continu.

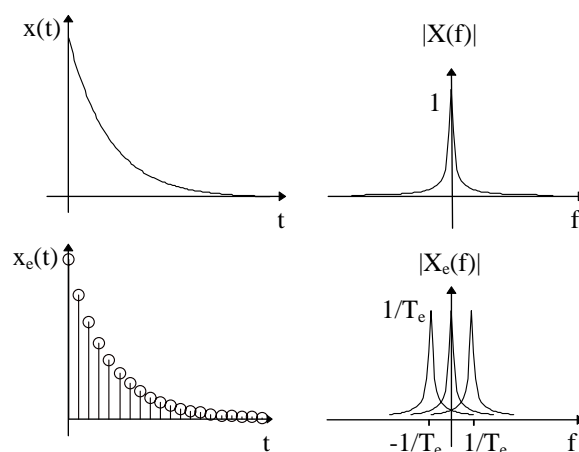
1. On échantillonne $x(t)$ à $f_e = 1/T_e$.

$$x(t) \rightarrow x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) = x(t)P(t)$$

où $P(t)$ est la « fonction peigne » :

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} P(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

L'échantillonnage rend le spectre périodique et peut entraîner un phénomène de « recouvrement de spectre » ou *aliasing*.



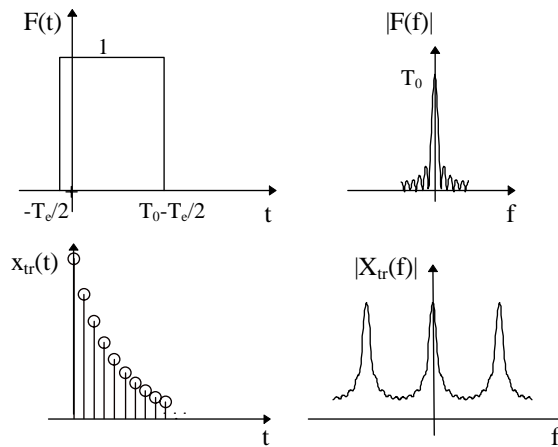
2. On tronque la suite $x_e(nT_e)$ en ne conservant qu'un nombre fini N de termes pour obtenir le signal $x_{tr}(t)$ formé des échantillons : $x(0) \dots x((N-1)T_e)$:

$$\begin{aligned} x_{tr}(t) &= x_e(t)F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) \delta(t - nT_e) \\ x_{tr}(t) &= x(t)P(t)F(t) \end{aligned}$$

où $F(t)$ est une fonction fenêtre de durée NT_e

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{T_e}{2}, T_0 - \frac{T_e}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $T_0 = NT_e$.



La convolution avec un sinus cardinal introduit des ondulations sur le spectre. Elles sont appelés « ripples » en anglais.

$$X_{tr}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-j2\pi f n T_e}$$

3. On échantillonne $X_{tr}(f)$ à $1/T_0$

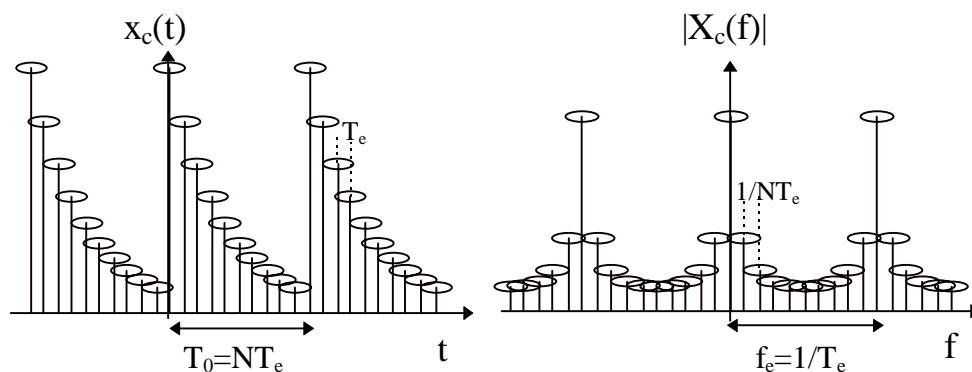
On obtient alors N valeurs différentes espacées de $1/T_0$ entre 0 et $1/T_e$, car $T_0 = NT_e$. Cette dernière opération rend périodique la « fonction » dans le temps. Appelons $x_c(t)$ la fonction résultante.

$$X_c(f) = X_{tr}(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{tr}\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

$$X_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

$$x_c(t) = T_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{tr}(t - nT_0)$$

$x_c(t)$ et $X_c(f)$ sont deux distributions échantillonnées reliées par la transformation de Fourier.



On obtient donc une correspondance entre N points dans le domaine temporel $x_c(nT_e)$ et N points dans le domaine fréquentiel $X_c(n/T_0)$, pour n entre 0 et $N - 1$. De plus :

$$x_c(nT_e) = T_0 x(nT_e) \quad \text{pour } n \in [0, N - 1]$$

$$X_c\left(\frac{k}{T_0}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

c'est-à-dire que la suite $X_c(k) = X_c(k/T_0)$ est précisément la TFD de la suite $x(n) = x(nT_e)$.

1.4 Comparaison entre la transformée de Fourier et la TFD

Soit un signal $x(t)$ et sa transformée de Fourier $X(f)$.

à la suite $x(nT_e)$ pour $n \in [0, (N-1)]$ correspond la suite TFD $X(k)$ pour $k \in [0, (N-1)]$ avec :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Quel est le lien entre $X(f)$ et $X(k)$ pour $k \in [0, (N-1)]$?

On pose $T_0 = NT_e$.

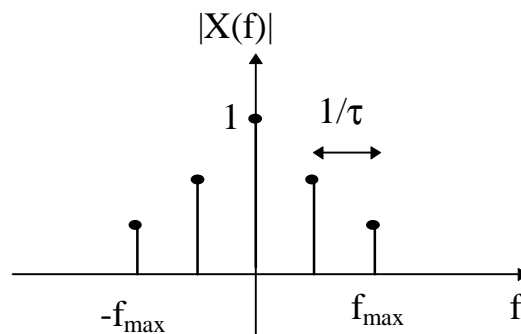
Dans le cas où :

- $x(t)$ est périodique de période τ ,
- $x(t)$ est à bande limitée $[-f_{max}, f_{max}]$,
- la largeur de la fenêtre $F(t)$ est égale à un multiple de τ , $T_0 = k\tau$,
- et la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ est supérieure à $2 f_{max}$.

Il y a coïncidence à un facteur multiplicatif près entre $X(k)$ et $X(f = k/T_0)$:

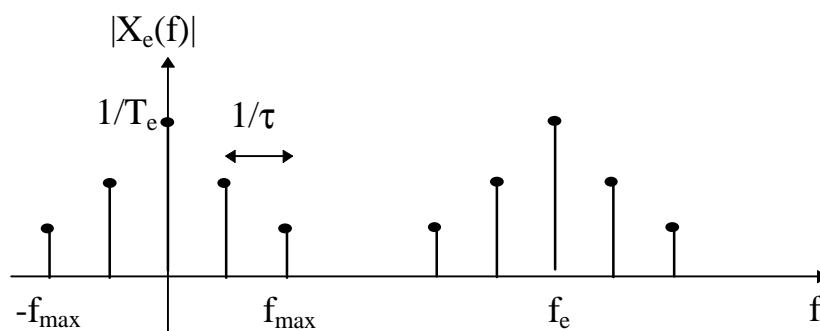
$$X(k) = \frac{T_0}{T_e} X\left(\frac{k}{T_0}\right) = N X\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

En effet, $x(t)$ étant périodique de période τ a un spectre formé de raies distantes de $1/\tau$. De plus, ce spectre est limité à f_{max} .

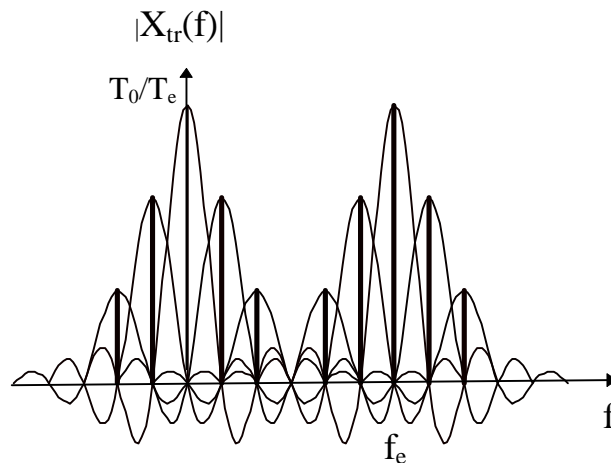


Les trois opérations qui conduisent à la suite $X(k)$ auront les conséquences suivantes :

1. L'échantillonnage de $x(t)$ à f_e rend périodique le spectre et le multiplie par $1/T_e$.



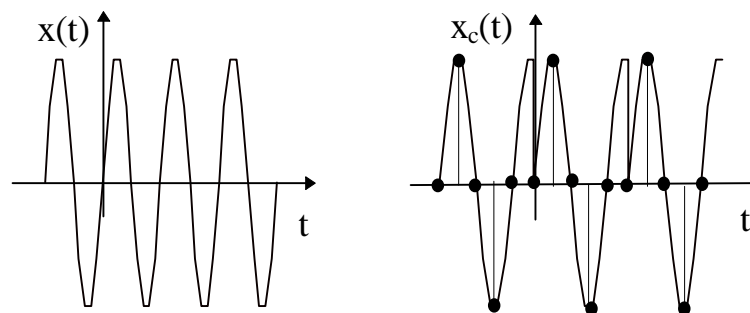
2. La troncation de $x_e(t)$ par une fenêtre de largeur T_0 a pour effet de convoluer le spectre avec un sinus cardinal qui s'annule tous les $1/T_0$ avec $T_0 = k\tau$.



3. L'échantillonnage du spectre à la fréquence $1/T_0$ a pour effet de ne conserver que des valeurs où X_{tr} et X coïncident au facteur $T_0/T_e = N$ près. C'est le seul cas où il y a identité entre la TFD et la TF au facteur N près, aux N points de calcul k/T_0 avec $k \in [0, (N - 1)]$.

Dans tous les autres cas, la TFD diffère de la TF aux points k/T_0 . L'erreur est introduite :

- par recouvrement de spectre si $X(f)$ n'est pas à support limité, erreur que l'on minimise en augmentant f_e .
- par les ondulations dues à la troncature par la fonction fenêtre si $x(t)$ n'est pas périodique ou à durée limitée : erreur que l'on peut chercher à atténuer en choisissant une fenêtre autre que la fenêtre rectangulaire (fenêtre de Hanning par exemple) et en augmentant autant que possible la largeur de la fenêtre.
- pour les deux premières raisons à la fois si $x(t)$ n'est ni à durée limitée ni à bande limitée
- même si $x(t)$ est périodique et à bande limitée, on introduit une erreur si la fenêtre de troncature n'a une durée égale à un multiple de la période car la troncature introduit alors de fortes discontinuités (voir la figure suivante).



1.5 Fenêtres de pondération

De nombreuses fenêtres de pondération ont été proposées pour l'analyse spectrale. Ces fenêtres sont utilisées pour limiter (tronquer) la durée temporelle du signal $x(t)$ à analyser. En notant $x(t)$ le signal, $F(t)$ la fenêtre, et $x_{tr}(t)$ le signal tronqué, on obtient la relation suivante :

$$x_{tr}(t) = x(t)F(t)$$

et dans le domaine fréquentiel :

$$X_{tr}(f) = X(f) \star F(f)$$

Pour une même durée temporelle NT_e , on compare les différentes fenêtres essentiellement par leurs propriétés fréquentielles. Idéalement, on aimerait que la troncation du signal en temps ne modifie pas son contenu fréquentiel, c'est-à-dire que $X(f) = X_{tr}(f)$, ce qui suppose que $F(f) = \delta(f = 0)$. En pratique, ce n'est pas possible et les fenêtres $F(f)$ présentent un lobe principal de largeur non nulle centré autour de la fréquence nulle et en général des lobes secondaires de hauteur non nulle. On peut caractériser une fenêtre par des paramètres tels que:

- La largeur du lobe principal, mesurée à 3 dB d'atténuation par rapport à l'amplitude en $f = 0$, ou bien à mi-hauteur.
- La hauteur maximale des lobes secondaires (quand ils existent).

Ces paramètres influencent respectivement la résolution et la dynamique de l'analyse spectrale.

La résolution est la capacité à distinguer 2 fréquences proches. La dynamique est la capacité à mesurer des composantes fréquentielles d'amplitudes très différentes sans que la plus forte ne masque la plus faible.

De manière générale, la largeur du lobe principal est inversement proportionnelle à la durée temporelle de la fenêtre.

1.5.1 Fenêtres rectangulaires, triangulaires et paraboliques

- Fenêtre rectangulaire $F_r(t)$

Une fenêtre rectangulaire $F_r(t)$ centrée de durée NT_e s'écrit en temps et en fréquence :

$$\begin{aligned} F_r(t) &= \text{rect}_{NT_e}(t) \\ F_r(f) &= \frac{\sin 2\pi f N T_e / 2}{2\pi f N \frac{T_e}{2}} \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire, présente des lobes secondaires importants qui ne décroissent qu'en $\frac{1}{f}$. Le lobe secondaire le plus haut n'est qu'à -13 dB en dessous de l'amplitude en $f = 0$.

- Fenêtre triangulaire $F_t(t)$ et fenêtre parabolique $F_p(t)$

La fenêtre triangulaire $F_t(t)$ (appelée aussi fenêtre de Bartlett) et la fenêtre parabolique $F_p(t)$ se déduisent simplement de la fenêtre rectangulaire par élévation au carré ou au cube de $F_r(f)$. Les transformées de Fourier ainsi obtenues décroissent donc en $\frac{1}{f^2}$ et en $\frac{1}{f^3}$. elles sont respectivement égales à :

$$F_t(\omega) = \left(\frac{\sin N\omega \frac{T_e}{4}}{N\omega \frac{T_e}{4}} \right)^2 \quad \text{ou à} \quad F_p(\omega) = \left(\frac{\sin E\omega \frac{T_e}{6}}{N\omega \frac{T_e}{6}} \right)^3$$

De plus, l'amplitude maximum des lobes secondaires est à -26 db en dessous du lobe principal dans le cas de $F_t(\omega)$, et à -39 db dans le cas de $F_p(\omega)$. Par contre, le lobe principal est, dans les 2 cas, plus large que pour la fenêtre rectangulaire.

Déterminons les expressions temporelles de $F_t(\omega)$ et de $F_p(\omega)$:

$$F_t(\omega) = F_r(\omega) \times F_r(\omega)$$

donc

$$F_t(t) = F_r(t) * F_r(t) = 1 - \left(\frac{2 |t|}{NT_e} \right)$$

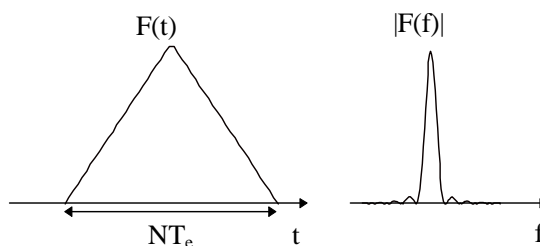
et

$$F_p(\omega) = F_t(\omega) \times F_r(\omega)$$

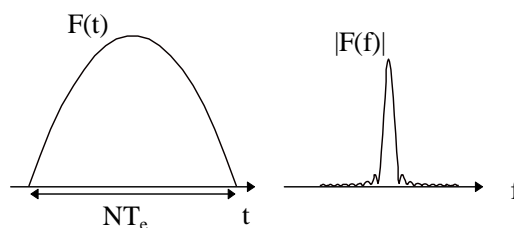
donc

$$F_p(t) = F_t(t) * F_r(t) = 1 - \left(\frac{t}{NT_e} \right)^2$$

La figure suivante représente la fenêtre triangulaire.



La figure suivante représente la fenêtre parabolique.



1.5.2 Fenêtres détruisant par addition algébrique, les lobes secondaires de la fenêtre rectangulaire

D'autres fenêtres intéressantes s'obtiennent en détruisant les lobes secondaires de la fenêtre rectangulaire, par addition algébrique. On peut citer dans cette catégorie la fenêtre cosinusoidale, les fenêtres de Hanning, de Hamming, de Blackman.

- Fenêtre cosinusoidale $F_c(t)$

L'expression algébrique de la fenêtre cosinusoidale est :

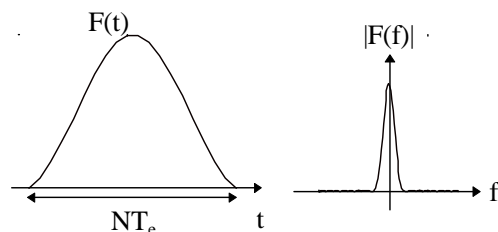
$$F_c(f) = \frac{1}{2} \left(F_R \left(f - \frac{1}{2NT_e} \right) + F_R \left(f + \frac{1}{NT_e} \right) \right)$$

$$F_c(t) = F_r(t) \cos \left(\pi \frac{t}{NT_e} \right)$$

Les lobes secondaires de $F_c(f)$ sont plus faibles que ceux de $F_r(f)$; ainsi l'amplitude maximum de ces lobes est 34 db en dessous de l'amplitude en $f = 0$ et leur décroissance est en $1/f^2$. Par contre, le lobe principal est plus large.

- Fenêtre de Hanning F_H

Nous avons vu précédemment comment, par une combinaison algébrique de deux fonctions déduites de $F_r(f)$ par des décalages en fréquence, on pouvait diminuer l'amplitude des lobes secondaires mais en augmentant la bande de transition. On peut encore diminuer l'amplitude des lobes secondaires en augmentant le nombre de fonctions combinées algébriquement. C'est le cas pour la fenêtre de Hanning (voir la figure suivante).



L'expression algébrique de la fenêtre de Hanning est (en notant $T_0 = NT_e$) :

$$\begin{aligned} F_H(f) &= \frac{1}{2}F_R(f) + \frac{1}{4}F_R\left(f - \frac{1}{T_0}\right) + \frac{1}{4}F_R\left(f + \frac{1}{T_0}\right) \\ F_H(t) &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)\right) \quad \text{pour } t \in [-T_0/2, T_0/2] \\ F_H(t) &= 0 \quad \text{ailleurs.} \end{aligned}$$

L'amplitude maximum des lobes secondaires est alors égale à -44 db (en dessous du lobe principal); ils décroissent en $\frac{1}{f^3}$. Le lobe principal est presque 2 fois plus large que pour la fenêtre rectangulaire.

– Fenêtre de Hamming F_{hm}

On peut améliorer les résultats obtenus par la fenêtre précédente en modifiant les pondérations de $F_r(f)$, $F_r(f - 1/NT_e)$ et $F_r(f + 1/NT_e)$:

$$F_{hm}(f) = 0.56 F_r(f) + 0.22 [F_r(f - 1/NT_e) + F_r(f + 1/NT_e)]$$

Dans ce cas, la décroissance des lobes secondaires est toujours en $1/f^3$ mais l'amplitude maximum de ces lobes est à -60 db sous le lobe principal.

L'expression temporelle $F_{hm}(t)$ de la fenêtre de Hamming s'écrit :

$$\begin{aligned} F_{hm}(t) &= 0,56 + 0,44 \times \cos(2\pi t/NT_e) \quad -\frac{NT_e}{2} < t < \frac{NT_e}{2} \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

– Fenêtre de Blackman $F_B(t)$

Pour diminuer encore l'amplitude des lobes secondaires, on peut combiner :

$F_r(f)$, $F_r(f - 1/NT_e)$, $F_r(f - 2/NT_e)$, $F_r(f + 2/NT_e)$, $F_r(f + 1/NT_e)$ selon la loi suivante :

$$\begin{aligned} F_B(f) &= 0,42 F_r(f) + 0,25 [F_r(f - 1/NT_e) + F_r(f + 1/NT_e)] \\ &\quad + 0,08 [F_r(f - 2/NT_e) + F_r(f + 2/NT_e)] \end{aligned}$$

La décroissance des lobes secondaires est en $\frac{1}{f^5}$; l'amplitude maximum des lobes secondaires est -87 db en dessous du lobe principal; Le lobe principal est 2 fois plus large que pour la fenêtre rectangulaire. L'expression temporelle de la fenêtre est :

$$\begin{aligned} F_B(t) &= 0,42 + 0,5 \cos(2\pi t/NT_e) + 0,08 \cos(4\pi t/NT_e) \quad -\frac{NT_e}{2} < t < \frac{NT_e}{2} \\ &\quad \text{ou } 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

1.5.3 Autres fenêtres : Gauss, Kaiser, Dolph-Chebychev

– Fenêtre de Gauss $F_g(t)$

Pour supprimer totalement les lobes de la transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire, on peut utiliser une fenêtre telle que sa transformée de Fourier $F_g(f)$ soit une exponentielle

$$F_g(\omega) = \exp\left[-\frac{(N\omega T_e/2)^2}{4k}\right]$$

Le paramètre k est lié à la dispersion σ de l'exponentielle en prenant comme variable réduite $u = N\omega T_e/2$. σ est alors égal à $\sqrt{2k}$. On pourra donc régler la dispersion de $F_g(f)$, c'est-à-dire la largeur de la bande de transition en faisant varier k .

Cherchons l'expression temporelle de cette fonction : $F_g(t) = \exp[-4k(t/NT_e)^2]$, à une constante près puisque la transformée de Fourier conserve la loi gaussienne :

$$\left[\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \longrightarrow \exp\left(\frac{-\omega^2}{2}\right) \right]$$

La fenêtre gaussienne a donc pour expression :

$$F_g(t) = \exp\left[-4k(t/MT)^2\right] \text{ si } |t| < NT_e/2$$

$$F_g(t) = 0 \text{ si } |t| > NT_e/2$$

Le paramètre k permet de réaliser un compromis entre l'ondulation en bande atténuée et la largeur de la bande de transition, ce que ne permettaient pas de faire les fenêtres décrites précédemment.

– Fenêtre de Kaiser $F_K(t)$

Cette fenêtre est une des plus efficaces : sa transformée de Fourier $F_K(f)$ a pour expression

$$F_K(V) = \frac{2}{I_0(\pi V_a)} \frac{\sin\left[\pi\sqrt{V^2 - V_a^2}\right]}{\pi\sqrt{V^2 - V_a^2}}$$

où $V = fNT_r$, $V_a = f_aNT_e$, $\sqrt{V^2 - V_a^2}$ peut être complexe et $I_0(x)$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

Cette fonction dépend d'un paramètre V_a qui permet de diminuer l'amplitude des lobes secondaires mais qui augmente la largeur du lobe principal. Dans la plupart des applications, une valeur de V_a comprise entre $4/\pi$ et $9/\pi$ conviendra.

$$4/\pi < V_a < 9/\pi$$

L'expression temporelle de la fenêtre de Kaiser, transformée de Fourier inverse de $F_K(f)$ est

$$F_K(t) = \frac{I_0\left[\pi V_a \sqrt{1 - (2t/NT_e)^2}\right]}{I_0(\pi V_a)} \text{ si } |t| < NT_e/2$$

$$F_K(t) = 0 \text{ ailleurs}$$

Comparaison avec la fenêtre de Hamming:

Pour obtenir une bande de transition égale à celle de la fenêtre de Hamming, il suffit d'imposer que le premier zéro de la fonction $F_K(f)$ corresponde à $V = 2$, c'est-à-dire d'imposer que $V_a = \sqrt{3}$ puisque le premier zéro est solution de l'équation $V^2 - V_a^2 = 1$. Dans ces conditions, la fenêtre de Kaiser a 99,8 % de son énergie dans le lobe principal alors que la fenêtre de Hamming n'a que 96,3 % de son énergie dans ce lobe ; par conséquent, l'ondulation en bande atténuée sera meilleure dans le cas de la fenêtre de Kaiser.

Comparaison avec la fenêtre de Blackman:

On peut obtenir la même largeur de lobe principal avec la fenêtre de Kaiser, en positionnant le premier zéro à $V = 3$, c'est-à-dire en faisant $V_a = 2\sqrt{2}$. A nouveau, l'ondulation en bande atténuée est inférieure dans le cas de la fenêtre de Kaiser.

– Fenêtre de Dolph-Chebyshev F_D

La fenêtre de Doph-Tchebychev est celle qui est réalise le meilleur compromis largeur du lobe principal, hauteur des lobes secondaires.

L'expression mathématique de cette fenêtre exprimée dans le domaine fréquentiel est :

$$F_D(f) = \frac{\cos\left[P \cos^{-1}(\lambda \cos \pi f T_e)\right]}{\text{ch}\left[P \arg \text{ch}(\lambda)\right]}$$

où $P = N-1$, N impair.

Le paramètre λ permet de régler l'amplitude des ondulations.

les fonctions $\cos(x)$ et $\cos^{-1}(x)$ sont des fonctions complexes.

L'amplitude maximum δ des ondulations est liée au paramètre λ par la relation

$$\delta = \frac{1}{\text{ch}[P \arg \text{ch}(\lambda)]}$$

L'expression temporelle de cette fenêtre n'a pas une forme simple ; la meilleure façon de l'obtenir étant de calculer la transformée de Fourier inverse de $F_D(f)$ en utilisant la transformée de Fourier discrète.

Dans tous les cas, à nombre N de coefficients constant, on devra réaliser un compromis entre l'amplitude des ondulations et la largeur du lobe principal. Il faudra choisir entre une moins grande dispersion ou une meilleure résolution.

1.6 Problèmes de visualisation de la TFD

Quand on lui présente un graphe discret, l'œil réalise une interpolation entre les points du dessin. Cette interpolation est d'autant plus réussie que les points sont rapprochés.

Pour observer à la fois un «beau» signal $x(n)$ et un «beau» spectre, on ne peut visualiser le même «buffer».

Pour le graphe temporel, on a intérêt à ce que $T_e \ll T_0$ mais si $T_e \ll T_0$ alors $1/T_e$ sera trop grand par rapport à $1/T_0$ et l'œil aura du mal à interpoler le graphe fréquentiel

. Pour améliorer le graphe fréquentiel on peut rajouter des 0 à la suite $x(n)$, on ne change rien au résultat mais on augmente T_0/T_e .

On appelle cette opération «zero-padding» en anglais.

Exemple : soit $x(t)$ dont la fréquence de Shannon ($2f_{max}$) est 128 Hz = f_{SH}

1. pour visualiser en «temps», on échantillonne une durée T à 1024 Hz = $8 f_{SH}$
2. pour visualiser le spectre, on échantillonne à 128 Hz une durée égale à $8 T$ en rajoutant des 0 à la suite $x(n)$.

On aura alors le même nombre de points sur une période de signal et de spectre et les deux graphes seront bien visualisés.

1.7 Propriétés de la TFD et convolution circulaire

Elles sont analogues à celles de la Transformée de Fourier, mais il faut prendre en compte une notion de périodicité des séquences.

1.7.1 Théorème de Parseval

Le théorème de Parseval, sous sa forme discrète, s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_e)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_e)|^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2j\pi \frac{nk}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} X_l^* e^{2j\pi \frac{-nl}{N}} \right) \\ \sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_e)|^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left[X_k X_l^* \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi \frac{n(k-l)}{N}} \right) \right] \end{aligned}$$

Or :

$$\text{Si } k \neq l \quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi \frac{n(k-l)}{N}} = \frac{1 - e^{2j\pi(k-l)}}{e^{2j\pi(k-l)/N}} = 0$$

$$\text{Et si } k = l \quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi \frac{n(k-l)}{N}} = N$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_e)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left[X_k X_l^* \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi \frac{n(k-l)}{N}} \right) \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

1.7.2 Théorème de la convolution discrète

Avant de présenter les résultats concernant la convolution discrète, on a besoin de définir les notions de convolution circulaire et de convolution linéaire.

Convolution circulaire :

Soit 2 suites périodiques $(x(n))$ et $(y(n))$ de période N . La convolution circulaire de ces 2 suites donne la suite $(z(n))$ de période N définie par :

$$(z(n)) = (x(n)) \otimes (y(n)) = \left(\sum_{i=0}^{N-1} x(i)y(\|n-i\|) \right) \quad \text{pour } n \in [0, N-1],$$

où la notation $\|n-i\|$ signifie $(n-i)$ modulo N .

Convolution linéaire :

La convolution linéaire d'une période de $(x(n))$ et d'une période de $(y(n))$ conduit quant-à-elle à une suite $(u(n))$ de longueur $2N-1$ valant :

$$(u(n)) = (x(n)) * (y(n)) = \left(\sum_{i=0}^{N-1} x(i)y(n-i) \right) \quad \text{pour } n \in [0, 2N-1]$$

EXEMPLE :

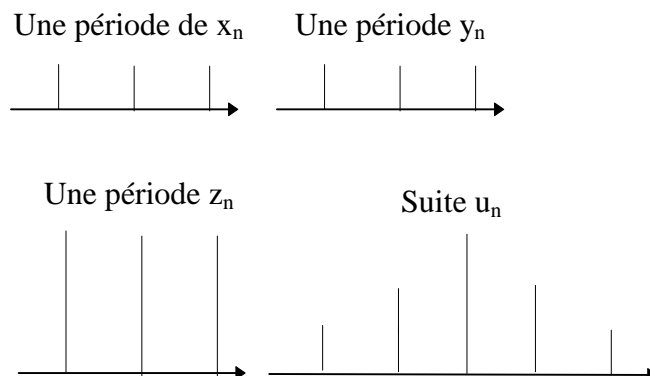
Soit les suites $(x(n))$ et $(y(n))$ périodiques de période $N=3$, telles que

$$x(n) = y(n) = 1 \quad \text{pour } n \text{ entre } 0 \text{ et } 2.$$

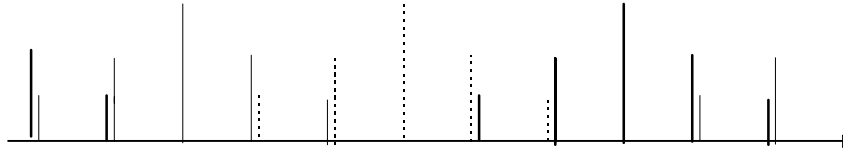
La suite $(z(n))$, convolution circulaire des suites $(x(n))$ et $(y(n))$ est périodique de période $N=3$, et vaut $z(n) = 3$ pour n entre 0 et 2. La suite $(u(n))$, convolution linéaire des suites $(x(n))$ et $(y(n))$ est de durée $2N-1=5$, et vaut :

$$z(0) = 1, z(1) = 2, z(2) = 3, z(3) = 2, z(4) = 1.$$

La suite $(z(n))$ peut s'obtenir en répétant périodiquement la suite $(u(n))$ avec la période N .



Suite z_n obtenue en rendant u_n périodique



Théorème de la convolution discrète circulaire La TFD de la suite $(z(n))$ convolution circulaire de 2 suites périodique $(x(n))$ et $(y(n))$ de période N , est le produit des TFD des suites $(x(n))$ et $(y(n))$:

$$z(n) = x(n) \otimes y(n) \Rightarrow TFD(z(n)) = TFD(x(n))TFD(y(n)) \quad (\text{III.1})$$

où le symbole \otimes représente la convolution circulaire.

Réciproquement, la suite $p(n)$ produit des suites $x(n)$ et $y(n)$, a pour TFD une suite $P(k)$ qui est la convolution circulaire des suites $X(k)$ et $Y(k)$:

$$p(n) = x(n)y(n) \Rightarrow P(k) = X(k) \otimes Y(k)$$

avec $P(k) = TFD(p(n))$, $X(k) = TFD(x(n))$, $Y(k) = TFD(y(n))$.

Démonstration de (III.1)

$$(z(n)) = (x(n)) \otimes (y(n)) = \left(\sum_{i=0}^{N-1} x(i)y(\|n-i\|) \right) \text{ pour } n \in [0, N-1]$$

$$Z(n) = \sum_{i=0}^{N-1} z(i)e^{-j2\pi\frac{ni}{N}} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(\|i-k\|) \right) e^{-j2\pi\frac{ni}{N}}$$

$$Z(n) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} y(\|i-k\|)e^{-j2\pi\frac{n(i-k)}{N}} \right) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} y(\|i-k\|)e^{-j2\pi\frac{n\|i-k\|}{N}} \right)$$

$$Z(n) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} \right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} y(k)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} \right) = X(n)Y(n)$$

Relation entre convolution discrète linéaire et convolution continue

Soit $x(t)$ et $y(t)$ de durées finies. La convolution de $x(t)$ avec $y(t)$ s'écrit $u(t)$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

Échantillons $x(t)$ et $y(t)$ à $f_e = 1/T_e$. On obtient alors P échantillons pour x et Q échantillons pour y .

On peut approcher l'intégrale $u(t)$ par la méthode de l'intégration rectangulaire (de pas T_e). La suite v_n ainsi obtenue (au terme multiplicatif T_e près) correspond à une convolution discrète linéaire (et non circulaire) des suites $x(n)$ et $y(n)$.

$$v(n) = \sum_{k=0}^{P+Q-1} x(k)y(n-k)$$

1.7.3 Théorème du retard circulaire

Soit la suite $x(n)$ périodique, de période N .

Soit la suite y_n obtenue en retardant $x(n)$ de k_0 échantillons. La suite $y(n)$ est périodique de période N et sa TFD $Y(k)$ se déduit de celle de $x(n)$ par :

$$Y(k) = X(k)e^{-j2\pi k k_0 / N}$$

où $Y(k)$ et $X(k)$ sont les TFD de $x(n)$ et $y(n)$.

2 Transformée de Fourier Rapide TFR, Fast Fourier transform FFT

La Transformée de Fourier Rapide (notée par la suite FFT) est simplement une TFD calculée selon un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations et, en particulier, le nombre de multiplications à effectuer. Il faut noter cependant, que la réduction du nombre d'opérations arithmétiques à effectuer, n'est pas synonyme de réduction du temps d'exécution. Tout dépend de l'architecture du processeur qui exécute le traitement.

Pour calculer une TFD, on doit calculer N valeurs $X(k)$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

et ceci pour $k \in [0, N - 1]$.

Si on effectue le calcul directement sans algorithme efficace, on doit effectuer :

$$\begin{cases} N^2 & \text{multiplications complexes} \\ N(N - 1) & \text{additions complexes} \end{cases}$$

Il existe différents algorithmes de FFT. Le plus connu est sûrement celui de Cooley-Tukey (appelé aussi à entrelacement temporel ou à «*decimation in time*») qui réduit à

$$\frac{N}{2} \log_2(N) \quad \text{le nombre de multiplications.}$$

Il existe deux versions de l'algorithme :

- FFT avec entrelacement temporel,
- FFT avec entrelacement fréquentiel.

L'algorithme nécessite que N soit une puissance de 2. Le principe de l'algorithme consiste à décomposer le calcul de la TFD d'ordre $N = 2^l$ en l étapes successives.

2.1 FFT avec entrelacement temporel

Illustrons tout d'abord la méthode par un exemple pour $N = 4$.

Les données sont notées $x(n)$ et la suite TFD $X(n)$.

La notation w représente $e^{-j2\pi/N}$, c'est-à-dire $e^{-j2\pi/4}$. On peut remarquer que $w^N = 1$ et $w^{N/2} = -1$.

Pour $N = 4$, $w^4 = 1$ et $w^2 = -1$.

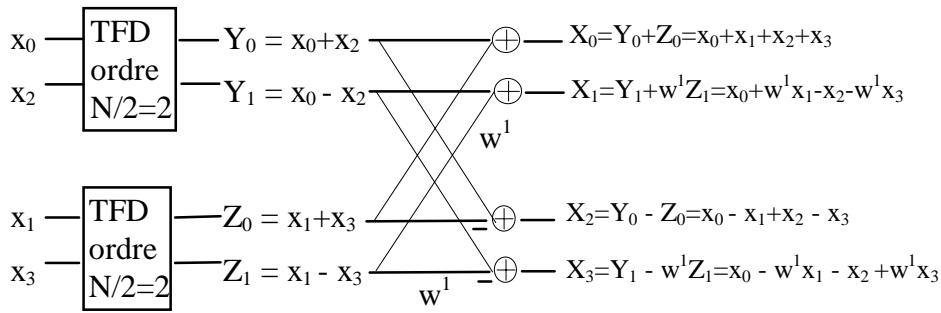
la suite TFD s'écrit :

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = (x(0) + x(2)) + (x(1) + x(3)) \\ X(1) &= x(0) + w^1x(1) + w^2x(2) + w^3x(3) = (x(0) - x(2)) + w^1(x(1) - x(3)) \\ X(2) &= x(0) + w^2x(1) + w^4x(2) + w^6x(3) = (x(0) + x(2)) - (x(1) + x(3)) \\ X(3) &= x(0) + w^3x(1) + w^6x(2) + w^9x(3) = (x(0) - x(2)) - w^1(x(1) - x(3)) \end{aligned}$$

Les données $(x(0), x(1), \dots, x(N - 1))$ sont regroupées en 2 paquets : un paquet formé des données d'indices pairs $(x(0), x(2), \dots, x(N - 2))$ et un paquet formé des données d'indices impairs $(x(1), x(3), \dots, x(N - 1))$. Soit pour $N = 4$, un paquet $(x(0), x(2))$ et un paquet $(x(1), x(3))$.

Puis sur chaque paquet on effectue une DFT d'ordre $N/2$ et on combine les résultats de ces 2 DFT pour obtenir

celle d'ordre N . Ce qui donne, toujours pour $N = 4$:



Pour obtenir les 4 valeurs $X(k)$, il suffit donc de calculer 2 DFT d'ordre $N/2 = 2$ et de combiner les résultats 2 à 2 à l'aide d'une addition et d'une multiplication au maximum, pour chaque valeur $X(k)$. Cette étape est appelée étage de « papillons », pour des raisons évidentes liées à la forme du schéma de calcul. Ce résultat se généralise à toute valeur de N multiple de 2. En effet :

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \\
 X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) e^{-j2\pi \frac{2ik}{N}} + \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) e^{-j2\pi \frac{2(i+1)k}{N}} \\
 X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} + e^{-j2\pi \frac{k}{N}} \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} \\
 X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}}
 \end{aligned}$$

On note $y(i) = x(2i)$ et $z(i) = x(2i+1)$, pour $i \in [0, (N/2 - 1)]$. On remarque que les 2 termes de la somme donnant $X(k)$ se déduisent directement des 2 TFD d'ordre $N/2$ des suites $y(i)$ et $z(i)$ de $N/2$ points. On note ces TFD $Y(k)$ et $Z(k)$.

Ainsi pour $k \leq N/2 - 1$, les 2 termes de la somme se déduisent des termes de rang k de $Y(k)$ et $Z(k)$:

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} = Y(k) + w^k Z(k)$$

Pour $k \in [N/2, (N - 1)]$, on peut écrire $k = k' + N/2$, avec $k' \in [0, (N/2 - 1)]$. De plus, comme quelque soit i entier $e^{-j2\pi i} = 1$, on peut déduire $X(k)$ des termes de rang $k - N/2$ des 2 TFD $Y(k)$ et $Z(k)$:

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} \\
 X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i) e^{-j2\pi \frac{i(k+N/2)}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i) e^{-j2\pi \frac{i(k+N/2)}{N/2}} \\
 X(k) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} y(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} + w^k \sum_{i=0}^{N/2-1} z(i) e^{-j2\pi \frac{ik}{N/2}} \\
 X(k) &= Y(k - N/2) + w^k Z(k - N/2)
 \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout N multiple de 2, on peut calculer chaque terme $X(k)$ de la TFD d'ordre N en combinant, à l'aide d'au plus 1 multiplication et 1 addition, 2 termes des TFD d'ordre $N/2$ des 2 suites $y(i)$ et

$z(i)$ de longueur $N/2$, formées respectivement des termes d'indices pairs et des termes d'indices impairs de la suite $x(n)$. En notant $Y(k)$ et $Z(k)$ les TFD d'ordre $N/2$ de ces suites on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{Pour } k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right] & \quad X(k) = Y(k) + w^k Z(k) \\ \text{Pour } k \in \left[\frac{N}{2}, N - 1\right] & \quad X(k) = Y(k - N/2) + w^k Z(k - N/2) \end{aligned}$$

On appelle « papillon », l'étape de calcul consistant à calculer 2 points de la TFD d'indices distants de $N/2$, par exemple $X(k)$ et $X(k + N/2)$ avec $k \in [0, N/2 - 1]$. Le calcul de ce couple de valeurs de la TFD d'ordre N utilise le couple de valeurs $Y(k)$ et $Z(k)$ des TFD d'ordre $N/2$:

$$\text{Pour } k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right] \quad \begin{cases} X(k) = Y(k) + w^k Z(k) \\ X(k + N/2) = Y_k + w^{k+N/2} Z(k) = Y(k) - w^k Z(k) \end{cases}$$

Chaque papillon nécessite 1 multiplication et 2 additions ou soustractions.

Ainsi tout TFD d'ordre N multiple de 2, peut se calculer à l'aide de 2 TFD d'ordre $N/2$ et d'un étage de $N/2$ papillons.

La complexité de calcul, pour la TFD d'ordre N est donc égale à celle de 2 TFD d'ordre $N/2$ plus celle de $N/2$ papillons. Si on suppose que les TFD d'ordre $N/2$ sont calculées directement (sans algorithme efficace), on peut dire que :

Le calcul d'une TFD d'ordre N pair, avec cet algorithme, demande :

$$\begin{aligned} \text{Le calcul de 2 TFD d'ordre } N/2 : & \quad \begin{cases} 2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2} \text{ multiplications complexes} \\ 2 \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} - 1\right) = N \left(\frac{N}{2} - 1\right) \text{ additions complexes} \end{cases} \\ \text{Le calcul de } N/2 \text{ papillons :} & \quad \begin{cases} \frac{N}{2} \text{ multiplications complexes} \\ N \text{ additions/soustractions} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit un total de

$$\begin{cases} \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} \text{ multiplications complexes} \\ \frac{N^2}{2} \text{ additions complexes} \end{cases}$$

au lieu de:

$$\begin{cases} N^2 & \text{multiplications complexes} \\ N(N - 1) & \text{additions complexes} \end{cases}$$

pour le calcul direct.

Ainsi pour $N = 4$, on a besoin de 10 multiplications et de 8 additions/soustractions complexes au lieu de 16 multiplications et de 12 additions/soustractions complexes.

Si $N/2$ est un multiple de 2, on peut réitérer la méthode pour le calcul des 2 TFD d'ordre $N/2$. Chaque TFD d'ordre $N/2$ est alors calculée à l'aide de 2 TFD d'ordre $N/4$ et de $N/4$ papillons, ce qui donne au total 4 TFD d'ordre $N/4$ plus 2 étages de $N/2$ papillons.

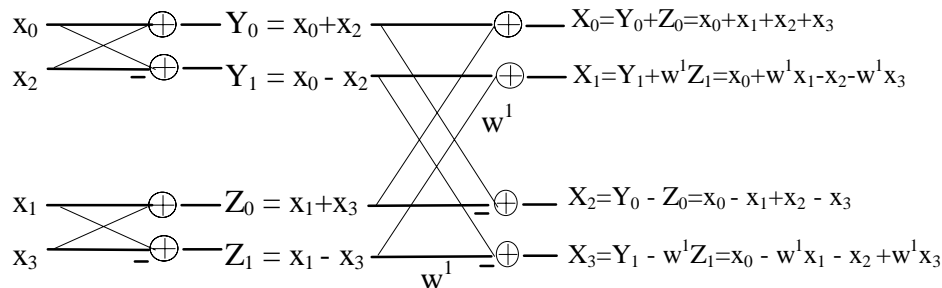
D'une manière plus générale si N est une puissance de 2, $N = 2^l$, on peut réitérer la méthode l fois et calculer la TFD d'ordre N à l'aide de l étages de $N/2$ papillons, avec $l = \log_2(N)$. La complexité de calcul d'une TFD d'ordre N devient alors celle de l étages de $N/2$ papillons, soit :

$$\begin{cases} l \frac{N}{2} = \log_2(N) \frac{N}{2} \text{ multiplications complexes} \\ l N = \log_2(N) N \text{ additions complexes} \end{cases}$$

Cet algorithme est l'algorithme de FFT avec entrelacement temporel (base 2) de Cooley-Tukey.

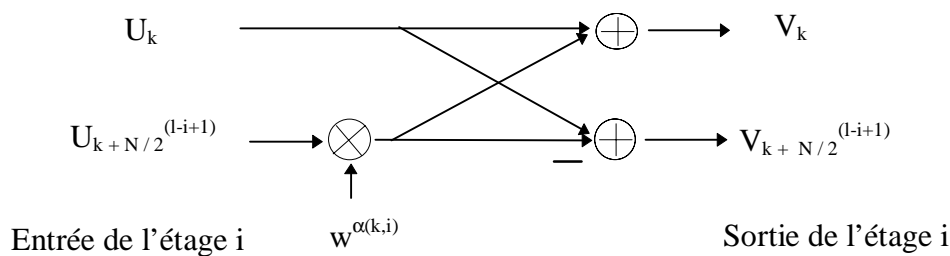
Ainsi pour $N = 1024 = 2^{10}$, le calcul direct demande : 1024×1024 multiplications et 1024×1023 additions, alors que le calcul avec l'algorithme de FFT demande : 10×512 multiplications et 10×1024 additions. Dans ce cas, l'algorithme divise environ par 200 le nombre d'opérations à effectuer. L'efficacité de la FFT augmente avec N .

Pour $N = 4$, le schéma complet de l'algorithme est le suivant :



On remarque sur ce schéma que les données $x(n)$ en entrée sont désordonnées, alors que celles de sortie $X(k)$ sont dans l'ordre naturel. De ce fait cet algorithme de FFT s'appelle FFT avec entrelacement temporel. On verra par la suite qu'il existe un algorithme symétrique appelé FFT avec entrelacement fréquentiel.

Pour l'algorithme de FFT en base 2 avec entrelacement temporel, un papillon élémentaire, à l'étage i (en numérotant de 1 à $l = \log_2(N)$), a la forme suivante :



A l'étage i , les indices des termes associés dans un papillon sont séparés de N_i , N_i étant la taille des DFT intervenant à l'étape i , c'est à dire $N_i = 2^{i-1} = 2^l / 2^{(l-i+1)} = N / 2^{(l-i+1)}$.

Le terme $w^{\alpha(i,k)}$ vaut :

$$w^{\alpha(i,k)} = e^{-j2\pi \frac{k}{2N_i}} = e^{-j2\pi \frac{k}{N} \frac{N}{2^i}} = w^{k2^{l-i}}$$

2.2 FFT avec entrelacement fréquentiel

Cet algorithme est symétrique du précédent. Les données temporelles $x(n)$ restent dans l'ordre naturel, mais les résultats $X(k)$ sont désordonnés.

Le principe consiste encore à décomposer le calcul de la TFD d'ordre $N = 2^l$ en l étapes successives. Mais le regroupement de données se fait différemment.

Illustrons la méthode par un exemple pour $N = 4$.

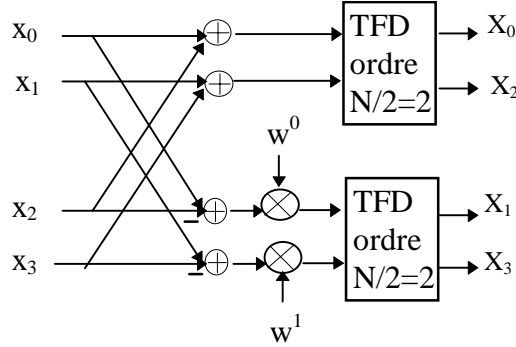
Les données fréquentielles $(X(0), X(1), \dots, X(N-1))$ sont regroupées en 2 paquets : un paquet formé des données d'indices pairs $(X(0), X(2), \dots, X(N-2))$ et un paquet formé des données d'indices impairs $(X(1), X(3), \dots, X(N-1))$. Soit pour $N=4$, un paquet $(X(0), X(2))$ et un paquet $(X(1), X(3))$.

Pour $N = 4$, on peut écrire :

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = (x(0) + x(2)) + (x(1) + x(3))$$

$$\begin{aligned}
X(2) &= x(0) + w^2x(1) + w^4x(2) + w^6x(3) = (x(0) + x(2)) - (x(1) + x(3)) \\
X(1) &= x(0) + w^1x(1) + w^2x(2) + w^3x(3) = (x(0) - x(2)) + [w^1(x(1) - x(3))] \\
X(3) &= x(0) + w^3x(1) + w^6x(2) + w^9x(3) = (x(0) - x(2)) - [w^1(x(1) - x(3))]
\end{aligned}$$

Pour obtenir chaque paquet de résultats fréquentiels, on effectue une DFT d'ordre $N/2$ sur des données résultant d'une étape de papillons sur les données $x(n)$.



On a donc un étage de 2 papillons suivi d'un étage de 2 DFT d'ordre $N/2 = 2$.

Ce résultat se généralise à toute valeur de N multiple de 2. En effet :

$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \\
X(2i) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n2i}{N}} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n2i}{N}} \\
X(2i) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{ni}{N/2}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m + N/2)e^{-j2\pi \frac{mi}{N/2}} \\
X(2i) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x(n) + x(n + N/2)) e^{-j2\pi \frac{ni}{N/2}}
\end{aligned}$$

Ainsi les $N/2$ termes $X(k)$ de rang pair sont égaux aux termes de la TFD d'ordre $N/2$ de la suite de $N/2$ valeurs $(x(n) + x(n + N/2))$, avec n entre 0 et $N/2 - 1$.

De même pour les termes $X(k)$ de rang impair :

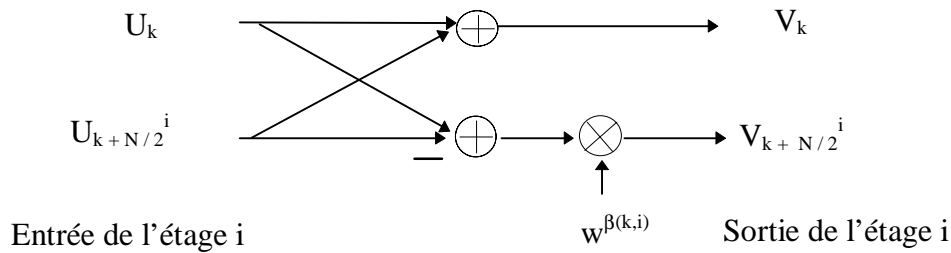
$$\begin{aligned}
X(k) &= \sum_n x(n)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \\
X(2i + 1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n(2i+1)}{N}} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n(2i+1)}{N}} \\
X(2i + 1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{n}{N}} e^{-j2\pi \frac{ni}{N/2}} - \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m + N/2)e^{-j2\pi \frac{m}{N}} e^{-j2\pi \frac{mi}{N/2}} \\
X(2i + 1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} w^n (x(n) - x(n + N/2)) e^{-j2\pi \frac{ni}{N/2}}
\end{aligned}$$

les $N/2$ termes $X(k)$ de rang impair sont égaux aux termes de la TFD d'ordre $N/2$ de la suite de $N/2$ valeurs $w^n(x(n) - x(n + N/2))$, avec n entre 0 et $N/2 - 1$.

D'une manière générale si N est une puissance de 2: $N = 2^l$, on peut réitérer la méthode l fois et calculer la TFD d'ordre N à l'aide de l étages de $N/2$ papillons., avec $l = \log_2(N)$. La complexité de calcul d'une

FFT avec entrelacement fréquentiel est identique à celle de la FFT avec entrelacement temporel.

Pour l'algorithme de FFT en base 2 avec entrelacement fréquentiel, un papillon élémentaire, à l'étage i (en numérotant de 1 à $l = \log_2(N)$), a la forme suivante :



A l'étape i , Les indices des termes associés dans un papillon sont séparés de N_i , N_i étant la taille des DFT intervenant à l'étape i , c'est à dire $N_i = N/2^i$. Et le terme $w^{\beta(i,k)}$ vaut :

$$w^{\beta(i,k)} = e^{-j2\pi \frac{k}{2N_i}} = e^{-j2\pi \frac{k2^i}{2N}} = w^{k2^{i-1}}$$

2.3 Bit reversal

On remarque que dans les 2 cas précédents : FFT avec entrelacement temporel et FFT avec entrelacement fréquentiel, l'ordre entrelacé est obtenu à partir de l'ordre naturel en appliquant une technique dite du « bit reversal ».

Cette technique consiste à écrire en binaire l'indice dans l'ordre naturel puis à retourner l'ordre des bits pour obtenir la représentation binaire de l'indice correspondant dans l'ordre entrelacé.

Par exemple pour $N = 4$:

indices ordre naturel	représentation binaire	représentation retournée	indices ordre entrelacé
0	00	00	0
1	01	10	2
2	10	01	1
3	11	11	3

2.4 Formulation matricielle de l'algorithme de Cooley-Tukey

On utilise les mêmes notations que précédemment :

$N = 2^l$
 $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. On utilise le fait que $w^N = 1$ et que $w^{N/2} = -1$

On illustre l'algorithme pour le cas $N = 8$, $l = 3$. Et on présente l'algorithme avec entrelacement fréquentiel.

- On calcule la TFD de la suite $x(n)$ avec $n \in [0, 7]$
- On note la suite transformée $X(n)$ avec $n \in [0, 7]$

$$X(n) = \sum_{k=0}^7 x(k) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = \sum_{k=0}^7 x(k) w^{nk}$$

On décompose les indices n et k (qui sont compris entre 0 et 7) en base 2 :

$$\begin{aligned} n &= n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0 2^0 \\ k &= k_2 2^2 + k_1 2^1 + k_0 2^0 \end{aligned}$$

On effectue le produit nk en développant selon k , (Il suffirait de développer selon n pour obtenir l'algorithme avec entrelacement temporel) :

$$\begin{aligned} w^{nk} &= w^{nk_2 2^2} w^{nk_1 2^1} w^{nk_0} \\ w^{nk} &= w^{(n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0)k_2 2^2} w^{(n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0)k_1 2^1} w^{(n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0)k_0} \\ w^8 &= 1 \Rightarrow \\ w^{nk} &= w^{n_0 k_2 2^2} w^{(n_1 2^1 + n_0)k_1 2^1} w^{(n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0)k_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{k=0}^7 x(k) w^{nk} \\ X(n) &= \sum_{k_0=0}^1 \left[\sum_{k_1=0}^1 \left(\sum_{k_2=0}^1 x(k_2, k_1, k_1) w^{n_0 k_2 2^2} \right) w^{(2n_1 + n_0)k_1 2^1} \right] w^{(4n_2 + 2n_1 + n_0)k_0} \end{aligned}$$

On a ainsi décomposé la sommation unique sur k en $3 = \log_2(8)$ sommations sur k_0, k_1, k_2 .

Si on effectue la sommation sur k_2 , on obtient un terme :

$$\begin{aligned} x_1(n_0, k_1, k_0) &= \sum_{k_2=0}^1 x(k_2, k_1, k_0) w^{n_0 k_2 2^2} \\ x_1(n_0, k_1, k_0) &= x(0, k_1, k_0) + x(1, k_1, k_0) w^{4n_0} \end{aligned}$$

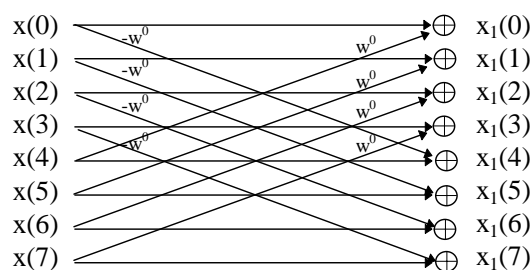
Si l'on considère l'ensemble des valeurs x_1 que l'on peut obtenir en donnant aux indices n_0, k_1, k_0 toutes les valeurs possibles, on obtient 8 valeurs $x_1(n)$ avec $n \in [0, 7]$ qui vérifient les relations :

$$\begin{aligned} x_1(i) &= x(i) + w^0 x(i+4) \quad \text{pour } i \leq 3 \\ x_1(i+4) &= x(i) - w^0 x(i+4) \\ \text{avec } i &= n_0 2^2 + k_1 2 + k_0 \end{aligned}$$

On peut regrouper les valeurs de x_1 2 par 2 pour former des paires duales que l'on calcule à partir de 2 noeuds de même indice de l'étape précédente. Les indices de 2 noeuds duaux étant espacés de $4 = N/2$. L'ensemble des relations précédentes peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \\ x_1(4) \\ x_1(5) \\ x_1(6) \\ x_1(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

Ces relations peuvent aussi se représenter sous la forme graphique de « papillons » :



La deuxième étape est la sommation sur k_1 :

$$\begin{aligned} x_2(n_0, n_1, k_0) &= \sum_{k_1=0}^1 x_1(n_0, k_1, k_0) w^{(2n_1+n_0)2k_1} \\ x_2(n_0, n_1, k_0) &= x_1(n_0, 0, k_0) + x_1(n_0, 1, k_0) w^{4n_1+2n_0} \\ \text{avec } w^{4n_1} &= (-1)^{n_1} \end{aligned}$$

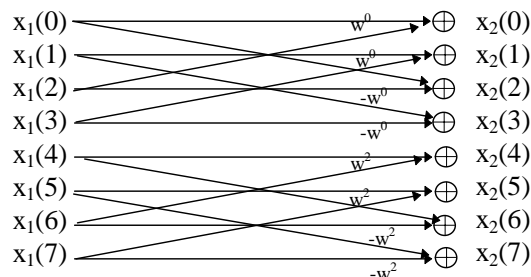
En donnant aux indices n_0, n_1, k_0 toutes les valeurs possibles on obtient les relations duales :

$$\begin{aligned} x_2(i) &= x_1(i) + w^{2n_0} x_1(i+2) \quad \text{pour } i \leq 3 \\ x_2(i+2) &= x_1(i) - w^{2n_0} x_1(i+2) \\ \text{avec } i &= 4n_0 + k_0 \quad \text{c'est à dire } n_1 = 0 \end{aligned}$$

Les valeurs de x_2 se calculent 2 par 2 à partir des 2 valeurs de x_1 de mêmes indices de l'étape précédente. Les noeuds duaux étant espacés de $N/2^2 = 2$. Les relations précédentes correspondent à la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \\ x_2(4) \\ x_2(5) \\ x_2(6) \\ x_2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \\ x_1(4) \\ x_1(5) \\ x_1(6) \\ x_1(7) \end{bmatrix}$$

Ces relations peuvent aussi se représenter sous la forme graphique de papillons :



L'exposant de w dans les relations précédentes est obtenu en divisant logiquement i par 2 et en retournant le résultat.

Enfin la troisième étape est la sommation sur k_0 qui conduit à la relation :

$$\begin{aligned} x_3(n_0, n_1, n_2) &= \sum_{k_0=0}^1 x_2(n_0, n_1, k_0) w^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0} \\ x_3(n_0, n_1, n_2) &= x_2(n_0, n_1, 0) + x_2(n_0, n_1, 1) w^{(4n_2+2n_1+n_0)} \\ \text{avec } w^{4n_2} &= (-1)^{n_2} \end{aligned}$$

Ce qui conduit aux relations duales :

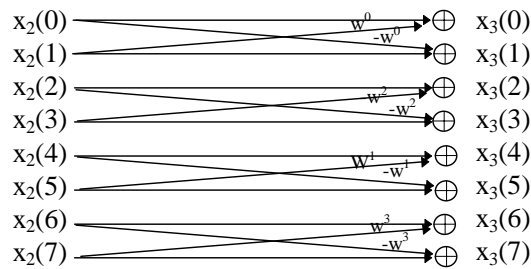
$$\begin{aligned} x_3(i) &= x_2(i) + w^{2n_1+n_0} x_2(i+1) \\ x_3(i+1) &= x_2(i) - w^{2n_1+n_0} x_2(i+1) \quad \text{pour } i \text{ pair} \\ \text{avec } i &= 4n_0 + 2n_1 \end{aligned}$$

Les valeurs de x_3 se calculent 2 par 2 à partir des 2 valeurs de x_2 de mêmes indices de l'étape précédente. Les noeuds duaux étant espacés de $N/2^3 = 1$. L'exposant de w s'obtient en divisant logiquement i par 1 et en retournant le résultat.

Les relations précédentes correspondent à la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_3(0) \\ x_3(1) \\ x_3(2) \\ x_3(3) \\ x_3(4) \\ x_3(5) \\ x_3(6) \\ x_3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \\ x_2(4) \\ x_2(5) \\ x_2(6) \\ x_2(7) \end{bmatrix}$$

Relations qui se représentent graphiquement par :



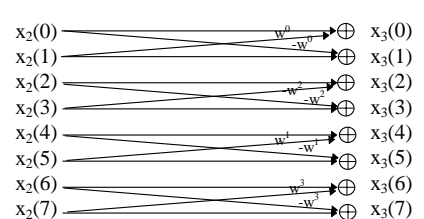
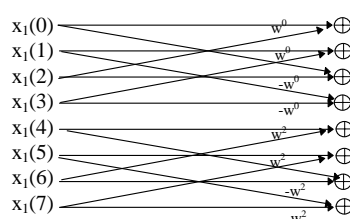
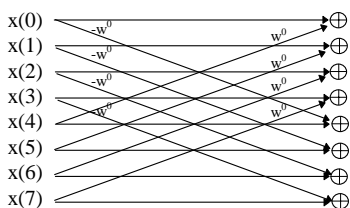
Cette dernière suite de valeurs est égale à la suite cherchée X(n) mais dans le désordre :

$$X(n_2, n_1, n_0) = x_3(n_0, n_1, n_2)$$

En résumé :

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3(0) \\ x_3(1) \\ x_3(2) \\ x_3(3) \\ x_3(4) \\ x_3(5) \\ x_3(6) \\ x_3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w^3 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -w^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -w^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}$$



La méthode illustrée pour N = 8 se généralise pour tout N puissance de 2.

2.5 Autres algorithmes de FFT

Il existe de nombreux autres algorithmes de FFT, qui s'appliquent par exemple au cas où N n'est pas une puissance de 2.

Lorsque N est une puissance de 4, on peut appliquer un algorithme de FFT en base 4, plus efficace que l'algorithme en base 2. Le nombre d'opérations nécessaires étant alors de :

$$\begin{cases} \log_4(N) \frac{3N}{4} \text{ multiplications complexes} \\ \log_4(N) N \text{ additions complexes} \end{cases}$$

2.6 Utilisation de la FFT pour la convolution rapide

Soit la suite $(u(n))$ convolution de la suite $(x(n))$, de durée P , et de la suite $(y(n))$, de durée Q :

$$u(n) = \sum_{i=0}^{P-1} x(i)y(n-i)$$

la suite $(u(n))$ a pour durée $P + Q - 1$.

On peut calculer directement les $(P+Q-1)$ valeurs de la suite $(u(n))$. Ce calcul nécessite $P(Q+1)$ multiplications pour $(Q \geq P)$. Si P et Q sont grands, il peut être efficace de faire ce calcul par FFT.

Pour cela, on complète par des zéros les suites $(x(n))$ et $(y(n))$ de façon qu'elles aient toutes les deux N points, où N est une puissance de 2 telle que $N \geq P + Q - 1$.

Appelons $(x_l(n))$ et $(y_l(n))$ les suites prolongées par des zéros.

La suite $(z_l(n)) = (x_l(n)) \otimes (y_l(n))$ coïncide avec la suite $(u(n))$ sur ses $P + Q - 1$ premiers points.

Pour calculer la suite $(u(n))$, il suffit donc de :

1. compléter les suites $(x(n))$ et $(y(n))$ par des zéros pour qu'elles aient N points, avec $N \geq P + Q - 1$.
2. Calculer par FFT les suites $X_l(k)$ et $Y_l(k)$: DFT des suites $(x_l(n))$ et $(y_l(n))$.
3. Calculer la suite $Z_l(k)$ produit des suites $X_l(k)$ et $Y_l(k)$: $Z_l(k) = X_l(k) \times Y_l(k)$
4. Calculer la suite $z_l(n)$ par FFT inverse de $Z_l(k)$
5. Identifier $(u(n))$ avec les $P + Q - 1$ premiers points de $z_l(n)$.

Le nombre d'opérations à effectuer est de :

3 FFT (directes ou inverses) de N points + N multiplications complexes, c'est à dire :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} N \log_2(N) + N \text{ multiplications complexes} \\ N \log_2(N) \text{ additions complexes} \end{cases}$$

Ce qu'il faut comparer au calcul direct : $P(Q+1)$ multiplications et additions réelles.

Exemple numérique : $P = Q = 500$

On choisirait $N = 1024$.

Le calcul direct demanderait 500×501 multiplications et additions réelles.

Le calcul par FFT demanderait environ $1500 \times 10 + 1000$ soit 16000 multiplications complexes. Une multiplication complexe demandant 4 multiplications réelles, on constate que le gain de calcul par FFT serait de :

$$\frac{500 \times 500}{16000 \times 4} \approx 4$$

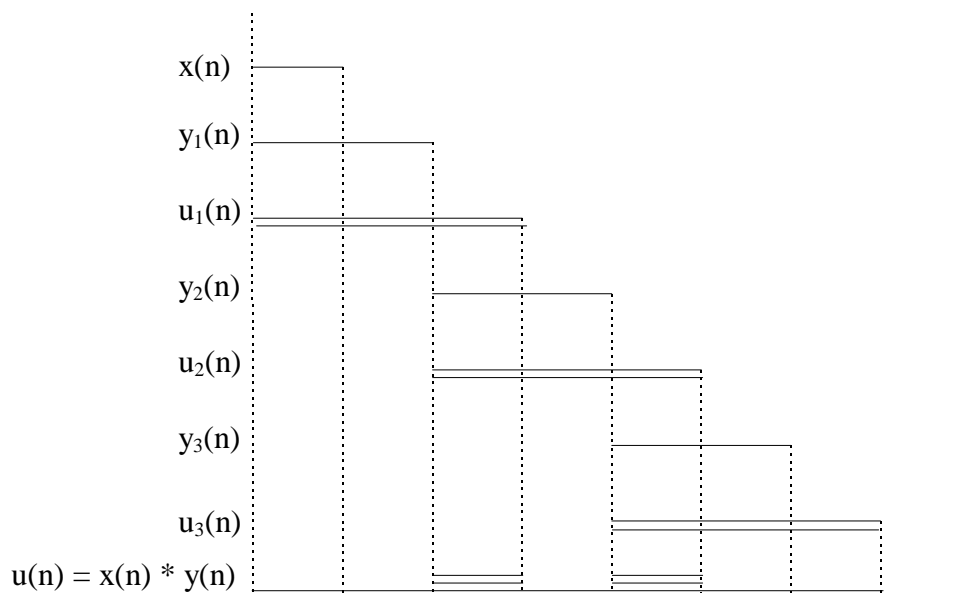
2.7 Calcul de convolution par section d'une des suites

Souvent l'une des suites est beaucoup plus courte que l'autre. Le calcul peut alors se faire en sectionnant la suite la plus longue en sous-suites.

Appelons $(x(n))$ la suite courte de longueur P et $(y(n))$ la suite longue de longueur Q .

$(y(n))$ est coupée en suites de longueur $M > P$.

La convolution totale de $(x(n))$ et $(y(n))$ est obtenue en sommant correctement les convolutions de $(x(n))$ avec les sous-suites de $(y(n))$. Ces petites convolutions sont calculées par exemple par FFT. Le résultat coïncide sur $P+M-1$ premiers points avec les bonnes valeurs. Les petites convolutions se superposent 2 à 2 sur $(P-1)$ points.



Cette méthode permet de limiter la taille de la mémoire nécessaire.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1 : Calculer la transformée de Fourier discrète de la suite (x_n) formée de $N = 8$ points ($n \in [0,7]$), obtenue en échantillonnant à la fréquence $f_e = 16$ Hz le signal $x(t)$:

$$x(t) = 2 \sin(8\pi t) + 8 \cos(4\pi t)$$

Exercice 2 : Calculer la TFD de la suite x_n suivante :

x_n est formée de $N = 24$ points obtenus en échantillonnant le signal $x(t) = 3 \sin(8\pi t) + 4 \cos(6\pi t)$ à la fréquence $f_e = 24$ Hz.

Exercice 3 : Comparer le résultat de la convolution linéaire et de la convolution circulaire des 2 suites x_n et y_n suivantes :

$$\begin{cases} x_n = 1 & \text{pour } 0 \leq n \leq 3 \\ x_n = 0 & \text{pour } n \notin [0, 3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_n = 2 & \text{pour } 0 \leq n \leq 3 \\ y_n = 0 & \text{pour } n \notin [0, 3] \end{cases}$$

On appellera z_n le résultat de la convolution linéaire :

$$z_n = \sum_{k=0}^3 x_k y_{n-k}$$

et t_n le résultat de la convolution circulaire :

$$t_n = \sum_{k=0}^3 x_k y_{\|n-k\|}$$

où $\|n - k\|$ signifie $n-k$ modulo $N = 4$.

Exercice 4 : Pour $N = 4$, la TFD de la suite : x_0, x_1, x_2, x_3 s'écrit : X_0, X_1, X_2, X_3 avec :

$$X_k = \sum_{n=0}^3 x_n e^{-j2\pi \frac{nk}{4}}$$

1) Ecrire la matrice de passage du vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ au vecteur $\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$. On notera $w = e^{-2j\frac{\pi}{4}}$.

2) Quel est le nombre de multiplications et d'additions à effectuer pour effectuer le calcul de la TFD sans algorithme particulier?

3) Chercher à décomposer le calcul en 2 étapes pour diminuer le nombre d'opérations globales. Par exemple, commencer par grouper les indices pairs et les indices impairs séparément.

CHAPITRE IV

SIGNAUX ALÉATOIRES

DE LA MÊME MANIÈRE qu'une variable aléatoire est un ensemble de valeurs caractérisé par une loi de probabilité, on appellera *signal aléatoire*, ou *processus aléatoire* un ensemble de *fonctions* auquel on adjoint une loi de probabilité.

Existe-il des signaux naturels qui soient intrinsèquement aléatoires ? La plupart des phénomènes non-quantiques peuvent être décrits à l'aide d'équations de la physique : le jeu de pile ou face, si l'on connaît les caractéristiques physiques de la pièce, l'impulsion donnée, la densité et la composition de l'air, la température, la pression atmosphérique, la gravité locale, est un jeu dont le résultat est parfaitement prévisible. De même pour le tirage du loto. Simplement le système dépendant d'un trop grand nombre de variables et de paramètres devient trop compliqué à décrire. D'autres exemples sont le signal de parole, l'électromyogramme ou la mesure de l'activité cérébrale, dont on peut espérer qu'ils ne résultent pas de « tirages au hasard », sont caractérisés comme des signaux aléatoires. D'autres signaux sont impossibles à caractériser « *a priori* ». Il s'agit en particulier d'un message transmis sur une ligne téléphonique (ou autre) : du point de vue du récepteur, ce signal est aléatoire jusqu'à sa réception. En effet si ce signal était déjà connu du récepteur, son contenu informationnel serait nul et il serait inutile de le transmettre. Ainsi, on pourra modéliser comme des signaux aléatoires les signaux dont le processus de production est trop compliqué à décrire, ou méconnu, ou des signaux pour lesquels l'aléa provient de la propre incertitude de l'observateur. À partir d'une modélisation probabiliste, il faut alors espérer que l'on pourra aboutir à une caractérisation intéressante et à des outils de traitement qui pourront permettre d'extraire de l'information des signaux aléatoires.

Notation :

On notera $X(t, \omega)$ un signal aléatoire X . Il s'agit d'un ensemble de fonctions de la variable t , cet ensemble étant indexé par la variable ω . Un signal aléatoire est une quantité bivariée, dépendant à la fois du temps t et de l'épreuve ω . Lorsque l'épreuve est fixée, par exemple $\omega = \omega_i$, on obtient une *réalisation* du processus aléatoire que l'on notera $X(t, \omega_i)$ ou plus simplement $x_i(t)$. Lorsque la variable t est fixée, le processus aléatoire se réduit alors à une simple variable aléatoire. En considérant le processus pour $t = t_i$, on obtient ainsi une variable aléatoire $X(t_i, \omega)$, que l'on notera $X_i(\omega)$, ou X_i . Enfin, on notera x_i les valeurs prises par la variable aléatoire X_i .

1 Description d'un signal aléatoire

Les signaux aléatoires pourront être caractérisés par le biais de deux types de description : une description complète qui permet de caractériser complètement le processus, mais qui nécessite une connaissance énorme, et une caractérisation partielle, à partir des moments du processus aléatoire.

1.1 Description complète

$X(t, \omega)$ est connu si $\forall t_1, t_2, \dots, t_k$, et $\forall k$, on connaît la loi conjointe

$$p_{X_1, X_2, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

où X_1, X_2, \dots, X_k sont les variables aléatoires associées aux k instants : $X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_k, \omega)$. En fait, ceci est équivalent à dire que l'on connaît $X(t, \omega)$ si l'on connaît les lois de toutes les variables aléatoires

$X(t_i, \omega)$, ainsi que toutes les interactions entre ces variables, et ceci $\forall i \dots$. La connaissance à avoir est donc gigantesque, et le plus souvent inaccessible, et l'on devra se contenter d'une *description partielle*.

1.2 Description partielle

1.2.1 Description à un instant

On dit que $X(t, \omega)$ est connu à un instant, si, $\forall t_1$, on connaît la loi de la variable aléatoire $X(t_1, \omega)$. Celle-ci est simplement une variable aléatoire au sens habituel, que l'on peut en général (si ceux-ci existent et hors quelques cas de figures exceptionnels) caractériser à l'aide des *moments*.

Moments : on notera

$$m_X(t_1) = E \{X(t_1, \omega)\} = \int x_1 p_{X_1}(x_1) dx_1 \quad (\text{IV.1})$$

$$\vdots$$

$$m_X^{(n)}(t_1) = E \{X(t_1, \omega)^n\} = \int x_1^n p_{X_1}(x_1) dx_1 \quad (\text{IV.2})$$

Rappelons avec force que $E \{ \}$ désigne l'espérance mathématique, que l'intégrale est prise sur le domaine de variation de l'« amplitude » de X_1 , c'est-à-dire de $X(t, \omega)$ considéré à l'instant fixé t_1 . L'écriture

$$E \{X(t, \omega)\} = \int X(t) p(X(t, \omega)) dt,$$

(trop) souvent rencontrée dans des copies, indique une incompréhension attristante et constitue une erreur impardonnable.

1.2.2 Description à deux instants

On dit que $X(t, \omega)$ est connu à deux instants, si, $\forall t_1, t_2$, on connaît la loi conjointe des variables aléatoires $X(t_1, \omega)$ et $X(t_2, \omega)$:

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \quad \text{est connue } \forall t_1, t_2.$$

La connaissance à deux instants nécessite donc de connaître le *lien statistique* entre $X(t_1, \omega)$ et $X(t_2, \omega)$.

Notion de covariance :

On appelle

$$C_X(t_1, t_2) = E \{X(t_1)X(t_2)^*\} = \int \int x_1 x_2^* p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

fonction de covariance.¹ Il s'agit dans le cas général d'une fonction bivariable qui permet de quantifier un certain « lien statistique » entre les variables aléatoires X_1 et X_2 . Dans la mesure où l'argument de l'espérance mathématique fait intervenir le produit de deux variables aléatoires, et est donc homogène à un « carré », on parlera de caractérisation à l'ordre 2.

Remarque : En général, on ne peut pas exprimer la distribution conjointe $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ en fonction des distributions $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$, sauf dans le cas où les variables sont *indépendantes*. On a alors

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2),$$

et la fonction de covariance s'écrit simplement

$$C_X(t_1, t_2) = E \{X(t_1)X(t_2)^*\} = E \{X(t_1)\} E \{X(t_2)^*\},$$

soit $C_X(t_1, t_2) = m_X(t_1)m_X(t_2)^*$.

Lorsqu'un tel signal est *centré*, c'est-à-dire de valeur moyenne nulle, alors $C(t_1, t_2) = 0$, pour $t_1 \neq t_2$. Ce type de signal aléatoire est appelé *bruit blanc* (au sens strict).

1. En toute rigueur, il faudrait réserver le terme de *covariance* à la formule précédente appliquée à des signaux *centrés*, pour lesquels on a alors simplement une extension de la notion de variance d'une variable à deux variables aléatoires. Il s'agit ici d'une *fonction* puisque ces deux variables dépendent respectivement de t_1 et t_2 . Lorsque les signaux ne sont pas centrés, on pourrait parler de moment d'ordre 2 croisé.

2 Propriétés fondamentales

2.1 Stationnarité

La stationnarité est une propriété particulièrement importante pour l'analyse des signaux aléatoires.

Définition 1 On dit qu'un signal aléatoire est stationnaire si ses propriétés statistiques sont invariantes par translation dans le temps.

En ce qui concerne la description complète, ceci se traduit par

$$p_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)} = p_{X(t_1-\tau), X(t_2-\tau), \dots, X(t_k-\tau)},$$

et si $\tau = t_k$,

$$p_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)} = p_{X(t_1-t_k), X(t_2-t_k), \dots, X(0)}.$$

La distribution conjointe ne dépend plus alors que de $k - 1$ paramètres, au lieu des k paramètres initiaux. Ceci va se prolonger à la description partielle : les moments, qui dépendent dans le cas général de l'instant considéré, deviennent des quantités indépendantes du temps dans le cas stationnaire. La fonction de covariance $C_X(t_1, t_2)$ devient quant-à-elle une quantité dépendant uniquement de l'écart entre t_1 et t_2 .

Pour la description partielle à un instant, on a ainsi

$$p_{X(t_1)} = p_{X(t_1-\tau)} = \dots = p_{X(0)}.$$

Toutes les variables $X(t_i, \omega)$ possèdent ainsi la même loi à un instant. Par suite,

$$E \{X(t_1)^n\} = E \{X(t_1 - \tau)^n\} = \dots = m_X^{(n)}.$$

On en déduit donc que tous les moments sont indépendants du temps.

À deux instants, la distribution conjointe ne dépend que de l'écart entre les deux instants et non des instants eux-mêmes :

$$p_{X(t_1), X(t_2)} = p_{X(t_1-t_2), X(0)}.$$

On en déduit donc que

$$C_X(t_1, t_2) = E \{X(t_1)X(t_2)^*\} = E \{X(t_1 - t_2)X(0)^*\} = E \{X(0)X(t_2 - t_1)^*\} = E \{X(t)X(t - \tau)^*\},$$

avec t quelconque et $\tau = t_1 - t_2$. La covariance devient une fonction de corrélation, qui ne dépend que de l'écart de temps. On pose

$$R_X(\tau) = E \{X(t)X(t - \tau)^*\}.$$

On peut vérifier la stationnarité en calculant tous les moments, à tous les ordres. Ceci n'est pas forcément utilisable, et on se contentera souvent d'étudier une stationnarité *au sens faible* (par opposition à la stationnarité *stricte*), en définissant une stationnarité à l'ordre 1 — le moment d'ordre 1 est indépendant du temps, et une stationnarité à l'ordre 2 — moment d'ordre 1 et fonction de covariance invariants par translation dans le temps.

Exercice 1 : Si

$$X(t, \omega) = A(\omega) \cos(2\pi f_0 t),$$

où $A(\omega)$ est une variable gaussienne centrée et de variance σ^2 , vérifiez que $X(t, \omega)$ est stationnaire à l'ordre 1 mais pas à l'ordre 2.

2.2 Ergodisme

L'ergodisme est une propriété très souvent employée, mais non vérifiable, à l'exception de quelques domaines de la physique. En traitement du signal, l'ergodisme sera le plus souvent un *postulat*, nécessaire pour travailler.

On considère un signal aléatoire $X(t, \omega)$. On note $x_i(t)$ les différentes réalisations de ce signal. On définit

$$\langle x_i^n \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} x_i(t)^n dt,$$

la *moyenne temporelle* prise sur la réalisation i , durant toute son histoire. De la même manière, on définit les *moyennes temporelles* du signal aléatoire $X(t, \omega)$ par

$$\langle X(t, \omega)^n \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)^n dt.$$

Dans le cas général, cette moyenne **est** une variable aléatoire, $\mu^{(n)}(\omega)$ dont les réalisations sont les $\langle x_i^n \rangle$. De la même façon, on définit des moyennes temporelles croisées, comme

$$\langle X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) dt.$$

Définition 2 Le signal $X(t, \omega)$ est dit *ergodique* si les moyennes temporelles sont des nombres certains.

Cette propriété entraîne donc, puisque $\langle \cdot \rangle$ est une variable certaine, que toutes les « réalisations » prennent la même valeur. En ce qui concerne les moments, on a ainsi $\langle X(t, \omega)^n \rangle$ qui est un nombre certain, ce qui entraîne $\langle x_1^n \rangle = \langle x_2^n \rangle = \dots = \langle x_k^n \rangle$. On notera $\mu^{(n)}$ ce nombre.

Il est d'une grande importance pratique d'avoir à la fois stationnarité et ergodisme. En effet, dans ce cas de figure, les moyennes d'ensemble (les espérances mathématique) et les moyennes temporelles sont égales.

Exemple (moments).

On a

$$\langle X(t, \omega)^n \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)^n dt.$$

Si le signal aléatoire est ergodique, alors $\langle X(t, \omega)^n \rangle$ est un nombre certain et

$$E \{ \langle X(t, \omega)^n \rangle \} = \langle X(t, \omega)^n \rangle = \mu^{(n)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mu^{(n)} = \langle X(t, \omega)^n \rangle &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} E \{ X(t, \omega)^n \} dt, \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} E \{ X(t, \omega)^n \} dt, \\ &= E \{ X(t, \omega)^n \} = m_X^{(n)}, \end{aligned}$$

où la dernière ligne a été écrite en utilisant le fait que $E \{ X(t, \omega)^n \}$ ne dépend pas du temps si $X(t, \omega)$ est stationnaire.

Dans le cas stationnaire et ergodique, on a donc

$$E \{ X(t, \omega)^n \} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)^n dt,$$

ce qui signifie que l'on peut calculer les espérances mathématiques en effectuant des moyennes temporelles sur des réalisations quelconques du signal. Ceci est d'une grande importance pratique, car il est rare que l'on dispose de plusieurs réalisations du processus (et encore moins d'une infinité), et de sa distribution de probabilité.

Notons cependant qu'il est au moins aussi rare que l'on dispose de réalisations du signal de $-\infty$ à $+\infty$; on ne pourra donc pas calculer exactement la valeur des moyennes par la formule précédente. On se contentera d'*approcher* le résultat par des moyennes temporelles sur la durée où est connu une réalisation du processus. On parle alors d'*estimation*.

Exemple (covariance).

On a

$$\langle X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) dt.$$

Si le signal est ergodique, il vient

$$\langle X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} E \{X(t, \omega)X(t - \tau, \omega)\} dt,$$

et par stationnarité,

$$E \{X(t, \omega)X(t - \tau, \omega)\} = R_X(\tau)$$

est indépendant du temps t . Dans ce cas, on obtient

$$\langle X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) \rangle = E \{X(t, \omega)X(t - \tau, \omega)\} = R_X(\tau),$$

soit finalement

$$R_X(\tau) = E \{X(t, \omega)X(t - \tau, \omega)\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) dt.$$

2.3 Le syndrome gaussien

Le signal aléatoire gaussien est déduit de la variable aléatoire gaussienne. Le signal aléatoire gaussien est très important en traitement du signal en raison de sa facilité d'emploi, de l'optimalité des méthodes du second ordre pour les signaux gaussiens, et par son omniprésence liée au(x) théorème(s) central limite.

On rappelle que $X(t, \omega)$ est connu, au sens de la description complète, si l'on connaît la distribution conjointe

$$p_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad \forall t_1, t_2, \dots, t_k \text{ et } \forall k.$$

Le signal est un processus gaussien si tous les $X(t_i, \omega)$ sont des variables aléatoires gaussiennes. Or on sait qu'une variable aléatoire gaussienne est entièrement caractérisée par ses deux premiers moments. La description à un instant nécessitera donc de connaître $m_X(t) \forall t$, tandis que la description à deux instants impose de connaître $C_X(t_1, t_2) \forall t_1, t_2$. dans le cas d'un processus stationnaire, ceci se réduit à la connaissance de la moyenne m_X et de la fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$.

En introduisant le vecteur $\mathbf{X}(\omega)$ de dimension k

$$\mathbf{X}(\omega)^t = [X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_k, \omega)],$$

la distribution du vecteur gaussien $\mathbf{X}(\omega)$ est

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det \mathbf{R}}} \exp - \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}})^t \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}) \right\},$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\mathbf{X}} = E \{ \mathbf{X}(\omega) \} &= [m_X(t_1), m_X(t_2), \dots, m_X(t_k)]^t, \\ &= m_X [1, 1, \dots, 1]^t \text{ dans le cas stationnaire,} \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{R} = E \{ \mathbf{X}_c(\omega) \mathbf{X}_c^*(\omega) \} = \begin{bmatrix} E \{ X_c(t_1, \omega) X_c(t_1, \omega)^* \} & E \{ X_c(t_1, \omega) X_c(t_2, \omega)^* \} & \dots & E \{ X_c(t_1, \omega) X_c(t_k, \omega)^* \} \\ E \{ X_c(t_2, \omega) X_c(t_1, \omega)^* \} & E \{ X_c(t_2, \omega) X_c(t_2, \omega)^* \} & \dots & E \{ X_c(t_2, \omega) X_c(t_k, \omega)^* \} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ E \{ X_c(t_k, \omega) X_c(t_1, \omega)^* \} & E \{ X_c(t_k, \omega) X_c(t_2, \omega)^* \} & \dots & E \{ X_c(t_k, \omega) X_c(t_k, \omega)^* \} \end{bmatrix},$$

où \mathbf{X}_c désigne le signal centré : $\mathbf{X}_c = \mathbf{X} - m_{\mathbf{X}}$. On obtient finalement

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(t_2 - t_1) & \dots & R_X(t_k - t_1) \\ R_X(t_1 - t_2) & R_X(0) & \dots & R_X(t_k - t_2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_X(t_1 - t_k) & R_X(t_2 - t_k) & \dots & R_X(0) \end{bmatrix}$$

dans le cas stationnaire. Le terme $m_{\mathbf{X}}$ est la moyenne du vecteur gaussien $\mathbf{X}(\omega)$, et \mathbf{R} est la matrice de corrélation. La distribution $p(\mathbf{X}(\omega))$ n'est autre que la distribution conjointe des k variables aléatoires $X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_k, \omega)$. Par conséquent, si l'on connaît la moyenne $m_X(t)$ et la fonction de covariance $C_X(t_1, t_2)$, ou la moyenne m_X et la fonction de corrélation $R_X(\tau)$ du processus (dans le cas stationnaire), on est capable d'écrire la distribution conjointe, et ceci quelque soient les t_i et pour n'importe quelle dimension k . Ainsi, *dans le cas gaussien, la connaissance de la moyenne et de la fonction de covariance suffit à caractériser entièrement le processus.*

Une autre définition du processus gaussien est

Définition 3 *Le processus $X(t, \omega)$ est un processus gaussien si, quelque soit la fonction $g(t)$,*

$$Z(\omega) = \int g(t)X(t, \omega)dt$$

est une variable gaussienne.

On peut déduire de cette définition une propriété fondamentale des processus gaussiens : *le caractère gaussien se conserve par transformation linéaire.* En d'autres termes, si l'entrée d'un filtre linéaire est gaussienne, alors la sortie du filtre est également gaussienne.

Supposons donc que $Y(t, \omega)$ est la sortie d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et d'entrée $X(t, \omega)$. Cette sortie s'exprime donc sous la forme du produit de convolution

$$Y(t, \omega) = (X * h)(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)X(\tau, \omega)d\tau.$$

À partir de la sortie $Y(t, \omega)$, on forme la variable aléatoire Z selon

$$Z = \int g(t)Y(t, \omega)dt.$$

En écrivant $Y(t, \omega)$ en fonction de $X(t, \omega)$ et $h(t)$, il vient alors

$$Z = \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(t - \tau)X(\tau, \omega)dtd\tau,$$

et en intégrant par rapport à t et en posant alors

$$w(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(t - \tau)dt,$$

il reste simplement

$$Z = \int w(\tau)X(\tau, \omega)d\tau.$$

Si $X(\tau, \omega)$ est, par hypothèse, un signal aléatoire gaussien, alors Z est une variable gaussienne, par définition et d'après la relation précédente. Z ayant été introduit comme une transformation de $Y(t, \omega)$, avec g quelconque, on en déduit que $Y(t, \omega)$ est un processus aléatoire gaussien.

Ainsi, puisque le filtrage d'un processus gaussien conserve le caractère gaussien, il nous restera à examiner comment se transforment la moyenne et la fonction de corrélation, ces deux quantités suffisant à décrire un processus gaussien stationnaire. Nous examinerons ces points dans quelques paragraphes.

L'importance des signaux aléatoires gaussiens, outre leur facilité d'utilisation liée à la manipulation de seulement deux moments, provient également de l'importance quantitative des signaux gaussiens, liée au(x) théorème(s) central limite. Il existe en effet un certain nombre de théorèmes qui indiquent qu'un mélange de

variables aléatoires, tend, lorsque le nombre de variables dans le mélange augmente, vers une distribution gaussienne. Ces théorèmes se distinguent par les hypothèses faites sur les lois des variables, leurs liens statistiques ou des hypothèses sur les conditions de mélange. Une formulation simple est la suivante :

Théorème 2 *Soit*

$$Y_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i,$$

où X_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Alors, lorsque $N \rightarrow +\infty$, la variable Y_N tend vers une variable aléatoire gaussienne de moyenne m et de variance σ^2/N , si m et σ^2 sont les moyenne et variance commune des variables X_i .

Ceci indique, que comme c'est souvent le cas en pratique, lorsqu'un signal aléatoire est composé par la superposition d'un grand nombre de « signaux élémentaires », alors le signal résultant est bien approximé par une distribution gaussienne. Rappelons qu'il existe d'autres théorèmes limite qui prennent en compte des combinaisons linéaires quelconques de variables, qui peuvent être liés, et dont les distributions peuvent être différentes.

2.4 Signaux aléatoires à temps discret

À partir des signaux aléatoires précédemment définis « à temps continu », c'est-à-dire que la variable d'évolution t prend ses valeurs dans \mathbb{R} , on définit des signaux aléatoires « à temps discret », ou la variable d'évolution n prend ses valeurs dans un ensemble discret, \mathbf{N} , par exemple. Rappelons que s'il est commode d'appeler t et n des variables temporelles, celles-ci ne sont pas nécessairement homogènes à un temps : t et n peuvent représenter une distance, un évolution d'une intensité de stimulation ou autre.

On note $X(n, \omega)$ un signal aléatoire X , un ensemble de fonctions de la variable n , cet ensemble étant indexé par la variable ω . On notera $x(n)$ une réalisation du processus aléatoire et on désignera par $x(n)$ ou $X(n, \omega_i)$ une réalisation particulière, obtenue pour $\omega = \omega_i$. Lorsque n est fixé, le processus aléatoire se réduit alors à une simple variable aléatoire. Le processus aléatoire à temps discret ne se réduit pas à une collection de variables aléatoires indépendantes ; ces variables aléatoires peuvent être liées les unes aux autres, par le biais d'une fonction de la variable d'évolution n .

Un signal aléatoire à temps discret peut être construit directement à temps discret, ou être intrinsèquement de nature discrète, ou peut résulter de l'échantillonnage d'un signal aléatoire à temps continu.

Les notions de description complète et partielles, les définitions des moments et covariance, les propriétés de stationnarité, d'ergodisme se transposent directement à partir du cas continu, à un très faible aménagement de notation près. Nous poursuivrons donc la présentation en donnant les résultats pour ces deux classes de signaux aléatoires, et en donnant les argumentations et exemples en se plaçant tantôt dans un cas, tantôt dans l'autre.

3 Propriétés énergétiques des signaux aléatoires stationnaires de puissance moyenne finie

Les propriétés énergétiques des signaux aléatoires stationnaires sont décrites à l'aide des moments d'ordre deux, c'est-à-dire des fonctions d'auto et d'intercorrélation, dans le domaine temporel, et à l'aide des densités spectrales de puissance, dans le domaine de Fourier.

3.1 Analyse dans le domaine temporel

Les notions importantes sont ici les notions de fonctions de corrélation et leurs propriétés.

3.1.1 Définitions et propriétés

Définition 4 Si $X(t, \omega)$ et $Y(t, \omega)$ sont deux processus aléatoires conjointement stationnaires, les fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation sont définies par

$$R_{XY}(\tau) \triangleq E \{X(t, \omega)Y^*(t - \tau, \omega)\} \underset{\text{erg}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)Y^*(t - \tau, \omega)dt,$$

$$R_{XX}(\tau) \triangleq E \{X(t, \omega)X^*(t - \tau, \omega)\} \underset{\text{erg}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)X^*(t - \tau, \omega)dt,$$

et, à temps discret, par

$$R_{XY}(k) \triangleq E \{X(n, \omega)Y^*(n-k, \omega)\} \underset{\text{erg}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N X(n, \omega)Y^*(n-k, \omega),$$

$$R_{XX}(k) \triangleq E \{X(n, \omega)X^*(n-k, \omega)\} \underset{\text{erg}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N X(n, \omega)X^*(n-k, \omega).$$

Notons que si on note Ech l'opérateur d'échantillonnage et Corr l'opérateur de corrélation, alors on a

$$\text{Corr}[\text{Ech}[X(t, \omega)]] = \text{Ech}[\text{Corr}[X(t, \omega)]];]$$

et c'est bien heureux, car les corrélateurs analogiques ne courent pas les rues.

Les fonctions de corrélation jouissent d'un certain nombre de propriétés que nous rappelons ci-dessous.

1. (Symétrie hermitienne)

$$R_{YX}(\tau) = E \{Y(t, \omega)X^*(t-\tau, \omega)\} = E \{Y(t+\tau, \omega)X^*(t, \omega)\} = E \{X(t, \omega)Y^*(t+\tau, \omega)\}^* = R_{XY}^*(-\tau).$$

On dit que l'intercorrélation est à symétrie hermitienne.

2. (Parité). En appliquant la propriété de symétrie hermitienne à l'autocorrélation, on obtient

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}^*(-\tau).$$

3. (Centrage). Si m_X est la moyenne de $X(t, \omega)$, en définissant par $X_c(t, \omega) = X(t, \omega) - m_X$ le signal centré, on a

$$R_{XX}(\tau) = R_{X_c X_c}(\tau) + m_X^2.$$

4. (Autocorrélation et puissance). Pour un retard τ nul, on a

$$R_{XX}(0) = E \{|X(t, \omega)|^2\} \underset{\text{erg}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} |X(t, \omega)|^2 dt = P_X.$$

La fonction d'autocorrélation prise pour le retard nul, $R_{XX}(0)$, est simplement la puissance du signal. On en déduit d'ailleurs que $R_{XX}(0) > 0$.

5. (Maximum). À partir de l'inégalité de Schwartz,

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

et en utilisant $\langle x_1, x_2 \rangle = E \{X_1(t)X_2^*(t)\}$ comme produit scalaire, on déduit que

$$(a) |R_{YX}(\tau)|^2 \leq R_{XX}(0)R_{YY}(0), \quad \forall \tau,$$

$$(b) |R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0), \quad \forall \tau,$$

Exercice 2 : Au sens du produit scalaire défini ci-dessus, démontrez l'inégalité de Schwartz en développant $E \{|X + \lambda Y|^2\}$ en un polynôme en λ et en notant que ce polynôme est toujours positif. À partir de cette inégalité, retrouvez les deux propriétés de maximum.

6. La fonction d'autocorrélation est *définie non négative* :

$$\sum_i \sum_j \lambda_i R_{XX}(\tau_i - \tau_j) \lambda_j \geq 0, \quad \forall i, j.$$

Ceci s'établit en développant $E \{|\sum_i \lambda_i X(\tau_i)|^2\}$, qui est une quantité positive.

En reprenant cette démarche, on peut étudier

$$E \left\{ \left| \int X(t, \omega) \exp(-j2\pi ft) dt \right|^2 \right\},$$

expression qui nécessiterait quelques précautions d'écriture (la transformée de Fourier d'un processus aléatoire stationnaire n'a pas de sens). En développant tout de même, on a

$$\begin{aligned} & E \left\{ \int X(t, \omega) \exp(-j2\pi ft) dt \int X^*(t', \omega) \exp(j2\pi ft') dt' \right\} \\ &= \int \int E \{ X(t, \omega) X^*(t', \omega) \} \exp(-j2\pi f(t-t')) dt dt' \\ &= \int \int R_{XX}(t-t') \exp(-j2\pi f(t-t')) dt dt', \end{aligned}$$

soit, en posant $t-t' = \tau$,

$$S_{XX}(f) \triangleq \int R_{XX}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \geq 0.$$

On en déduit donc que *la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est toujours positive*. On dit aussi que le caractère défini non négatif se conserve par transformée de Fourier. Ce résultat constitue le théorème de Bochner.

7. (Mémoire). On a vu que $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$. On appelle

$$\rho_c(\tau) \triangleq \frac{R_{XX}(\tau)}{R_{XX}(0)} = \frac{E \{ X(t, \omega) X^*(t-\tau, \omega) \}}{\sqrt{E \{ |X(t, \omega)|^2 \} E \{ |X^*(t-\tau, \omega)|^2 \}}}$$

le coefficient de corrélation, dont on vérifie aisément qu'il est compris entre -1 et 1. Il s'agit en fait de la fonction d'autocorrélation normalisée par rapport à son maximum. Lorsqu'au bout d'un temps t le coefficient de corrélation devient nul, le processus est dit à *mémoire finie*.

3.1.2 Notion de bruit blanc

Un bruit blanc est un modèle de signal aléatoire « limite » que l'on rencontrera très souvent. Le bruit blanc est un bruit à *corrélation microscopique*, c'est-à-dire qu'entre deux instants, si proches soient-ils, $\rho_c(\tau) = 0$. On pose, par définition,

$$R_{XX}(\tau) \triangleq \frac{N_0}{2} \delta(\tau),$$

où $\delta(\tau)$ est la distribution de Dirac. On peut noter dès à présent que la transformée de Fourier de cette fonction d'autocorrélation, que l'on a déjà notée $S_{XX}(f)$, est une *constante*, d'amplitude $N_0/2$.

$$S_{XX}(f) = TF[R_{XX}(\tau)] = \frac{N_0}{2}.$$

Par ailleurs, en se souvenant que $R_{XX}(0)$ représente la puissance moyenne du signal, on constate que le bruit blanc possède une puissance moyenne infinie... Il s'agit donc d'un modèle délicat à manipuler.

On peut distinguer plusieurs types de bruit blanc : si toutes les variables aléatoires que l'on peut extraire du signal sont indépendantes, le bruit est blanc, puisque l'indépendance entraîne la décorrélation. Par contre, toutes les variables peuvent être décorréliées sans être nécessairement indépendantes. On parlera alors de bruit blanc au sens fort (ou au sens strict), dans le premier cas et de bruit blanc à l'ordre deux dans le second. Notons qu'il existe un certain nombre de situations intermédiaires.

Exercice 3 : Montrez qu'un bruit blanc est nécessairement de valeur moyenne nulle.

Exercice 4 : On considère un signal aléatoire $U(t, \omega)$ n'existant que sur l'intervalle de temps $[0, T]$; et on s'intéresse au signal périodique

$$X(t, \omega) = \text{Rep}_T[U(t, \omega)] = \sum_k U(t - kT, \omega).$$

1. Montrez que $R_{UU}(\tau) = 0$ pour $\tau \notin [-T, T]$.
2. Montrez que $R_{XX}(\tau)$ est une fonction périodique de période T et exprimez $R_{XX}(\tau)$ en fonction de $R_{UU}(\tau)$.

Exercice 5 : On considère le signal aléatoire à temps discret $X(n, \omega)$, d'autocorrélation $R_{XX}(k)$, et on définit

$$Z(n, \omega) = X(n, \omega) + aX(n - n_0, \omega).$$

Calculez la fonction d'autocorrélation de $Z(n, \omega)$.

3.2 Transformation des fonctions aléatoires par filtrage

On étudie ici comment sont transformés les signaux aléatoires, ou plus exactement leurs caractéristiques, lors d'un filtrage linéaire. On s'intéressera d'abord à la représentation temporelle, transformation de la moyenne et des fonctions de corrélation, et établirons la formule des interférences et ses conséquences, puis nous examinerons la transformation des caractéristiques du signal dans le domaine fréquentiel.

3.2.1 Rappel

On rappelle qu'un filtre est un système linéaire invariant dans le temps (stationnaire), que l'on peut décrire par une équation différentielle à coefficients constants ou par une intégrale de convolution. À temps continu, si $X(t, \omega)$ est l'entrée du filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, on a

$$Y(t, \omega) = (X * h)(t, \omega) = \int X(u, \omega)h(t - u)du = \int h(u)X(t - u, \omega)du.$$

À temps discret, si $X(n, \omega)$ est l'entrée du filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, on a

$$Y(n, \omega) = (X * h)(n, \omega) = \sum_m X(m, \omega)h(n - m) = \sum_m h(m)X(n - m, \omega).$$

3.2.2 Transformation de la moyenne

On note m_Y la moyenne de la sortie du filtre, et on effectue le calcul à temps discret.

$$m_Y = E\{Y(n, \omega)\} = E\left\{\sum_m h(m)X(n - m, \omega)\right\} = \sum_m h(m)E\{X(n - m, \omega)\} = m_X \sum_m h(m).$$

La moyenne de la sortie est donc simplement la moyenne du signal d'entrée affectée du facteur $\sum_m h(m)$. Or si l'on considère la transformée de Fourier $H(f)$ de $h(m)$,

$$H(f) = \sum_m h(m) \exp\{j2\pi fm\}$$

(transformée de Fourier à fréquence continue), on note que pour la fréquence nulle, on retrouve

$$H(0) = \sum_m h(m).$$

Ainsi, la moyenne en sortie s'écrit

$$m_Y = m_X H(0) = m_X \sum_m h(m).$$

La moyenne de la sortie du filtre est la moyenne de l'entrée, multipliée par le gain complexe (la fonction de transfert) pour la fréquence nulle.

Exercice 6 : Montrez que pour un signal aléatoire à temps continu, on a les formules analogues :

$$m_Y = m_X H(0) = m_X \int h(u) du.$$

3.2.3 Théorème, ou formule des interférences

La très importante formule des interférences permet de relier l'intercorrélacion entre les sorties de deux filtres, aux intercorrélacions des entrées de ces filtres. La figure IV.1 décrit le dispositif expérimental.

$$\begin{cases} Y_1(n, \omega) &= (X_1 * h_1)(n, \omega), \\ Y_2(n, \omega) &= (X_2 * h_2)(n, \omega), \end{cases}$$

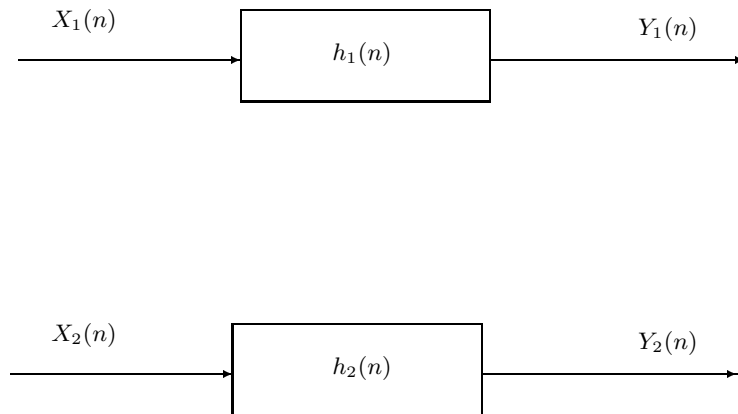


FIG. IV.1 - Dispositif pour la formule des interférences

Calculons l'intercorrélacion entre \$Y_1(n)\$ et \$Y_2(n)\$:

$$R_{Y_1 Y_2}(m) = E \{ Y_1(n, \omega) Y_2^*(n - m, \omega) \} = E \{ (X_1 * h_1)(n, \omega) (X_2^* * h_2^*)(n - m, \omega) \}.$$

Les deux produits de convolution s'écrivent

$$\begin{aligned} (X_1 * h_1)(n, \omega) &= \sum_u X_1(u, \omega) h_1(n - u) = \sum_u h_1(u) X_1(n - u, \omega), \\ (X_2 * h_2)(n - m, \omega) &= \sum_v X_2(v, \omega) h_2(n - m - v) = \sum_v h_2(v) X_2(n - m - v, \omega), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_{Y_1 Y_2}(m) &= E \left\{ \sum_u X_1(n - u, \omega) h_1(u) \sum_v X_2^*(n - m - v, \omega) h_2^*(v) \right\} \\ &= E \left\{ \sum_u \sum_v X_1(n - u, \omega) h_1(u) X_2^*(n - m - v, \omega) h_2^*(v) \right\} \\ &= \sum_u \sum_v h_1(u) R_{X_1 X_2}(m + v - u) h_2^*(v). \end{aligned}$$

En effectuant la somme sur u , on voit apparaître un produit de convolution entre h_1 et $R_{X_1X_2}$, exprimé en $(m+v)$:

$$\begin{aligned} R_{Y_1Y_2}(m) &= \sum_v (h_1 * R_{X_1X_2})(m+v) h_2^*(v) \\ &= \sum_v (h_1 * R_{X_1X_2})(m+v) h_2^{*(-)}(-v), \end{aligned}$$

où l'on a posé $h_2^{*(-)}(v) = h_2^*(-v)$. Dans cette relation apparaît à nouveau un produit de convolution, cette fois-ci entre $(h_1 * R_{X_1X_2})$ et $h_2^{*(-)}$:

$$\begin{aligned} R_{Y_1Y_2}(m) &= \sum_v (h_1 * R_{X_1X_2})(m+v) h_2^{*(-)}(-v) \\ &= \sum_{v'} (h_1 * R_{X_1X_2})(m-v') h_2^{*(-)}(v') \\ &= (h_1 * R_{X_1X_2} * h_2^{*(-)})(m). \end{aligned}$$

On en déduit donc la formule des interférences :

$$\boxed{R_{Y_1Y_2}(m) = (h_1 * R_{X_1X_2} * h_2^{*(-)})(m)}.$$

Exercice 7 : Établir la même relation en continu.

Conséquences

1. Considérons non plus deux filtres, mais un filtre unique (voir figure IV.2). On peut appliquer la formule des interférences, en prenant

$$\begin{cases} X_1 = X_2 = X, \\ h_1 = h_2 = h. \end{cases}$$

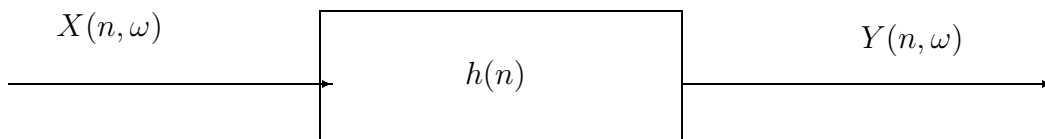


FIG. IV.2 - Filtre unique

Les deux sorties sont évidemment égales, $Y_1 = Y_2 = Y$, et l'on obtient

$$\boxed{R_{YY}(m) = (h * R_{XX} * h^{*(-)})(m)}.$$

2. On cherche maintenant à établir l'expression de l'intercorrélacion sortie-entrée d'un filtre $R_{YX}(m)$. Pour cela, on peut appliquer la formule des interférences avec un premier filtre d'entrée $X(n, \omega)$, de réponse impulsionnelle $h(n)$ et de sortie $Y(n, \omega)$, et un second filtre unitaire, c'est-à-dire d'entrée $X(n, \omega)$ de réponse impulsionnelle $\delta(n)$ et donc de sortie $X(n, \omega)$. On considère ainsi :

$$\begin{cases} X_1 = X_2 = X, \\ Y_1 = Y, \\ Y_2 = X, h_1 = h, \\ h_2 = \delta. \end{cases}$$

Dans ce cas, l'application de la formule des interférences fournit :

$$R_{YX}(m) = (h * R_{XX})(m).$$

L'intercorrélacion sortie-entrée s'exprime donc comme un filtrage de l'autocorrélacion de l'entrée, ce filtrage étant analogue à celui qui lie la sortie et l'entrée du filtre.

Application : identification de réponse impulsionnelle

La manière classique d'identifier une réponse impulsionnelle consiste à recueillir la sortie du filtre à une impulsion de Dirac... Ceci nécessite donc d'être capable de générer une impulsion de Dirac ; or il n'est évidemment pas possible de générer une telle impulsion, qui devrait être de largeur nulle et d'amplitude infinie. Par ailleurs, si la sortie du filtre est bruitée, la réponse impulsionnelle ainsi identifiée sera inexploitable.

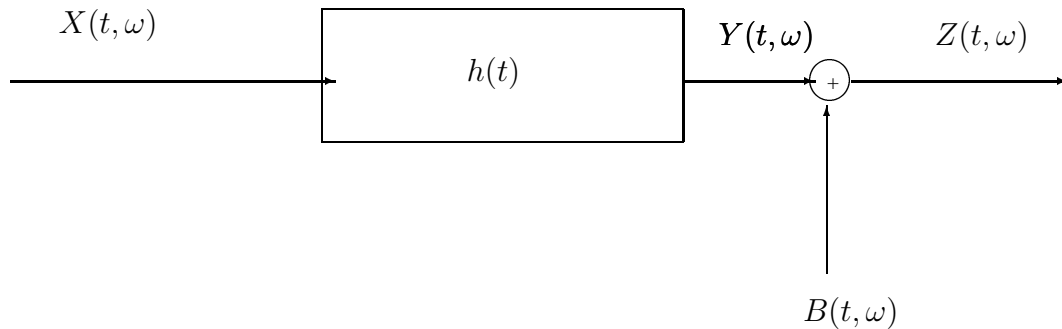


FIG. IV.3 - Mesure de la réponse impulsionnelle d'un filtre bruité

Si l'on prend pour $X(t, \omega)$ un bruit blanc, il est possible d'identifier la réponse impulsionnelle : en effet, si $X(t, \omega)$ est blanc, $R_{XX}(\tau, \omega) = N_0/2\delta(\tau)$, et

$$R_{YX}(\tau) = \left(h * \frac{N_0}{2} \delta \right) (\tau) = \frac{N_0}{2} h(\tau).$$

Lorsque la sortie est bruitée, par exemple par un bruit $B(t, \omega)$ tel que

$$Z(t, \omega) = Y(t, \omega) + B(t, \omega),$$

où l'on supposera $B(t, \omega)$ non corrélé à l'entrée $X(t, \omega)$ (ces deux quantités n'ont pas de raison particulière d'être corrélées entre elles, d'autant plus qu'on est maître de l'entrée), on peut appliquer la même démarche :

$$\begin{aligned} R_{ZX}(\tau) &= E \{ Z(t, \omega) X^*(t - \tau, \omega) \} = E \{ (Y(t, \omega) + B(t, \omega)) X^*(t - \tau, \omega) \} \\ &= R_{YX}(\tau) + R_{BX}(\tau) = \left(h * \frac{N_0}{2} \delta \right) (\tau) = \frac{N_0}{2} h(\tau); \end{aligned}$$

puisque $R_{BX}(\tau) = 0$ (non corrélation). Les résultats restent donc inchangés en dépit de la présence d'un bruit additif non corrélé à l'entrée. La méthode d'identification de réponse impulsionnelle par intercorrélacion sortie-entrée est insensible à un bruit d'observation. Par ailleurs, elle ne nécessite pas l'application d'une impulsion de Dirac impossible à réaliser. Il restera cependant à générer un bruit blanc, ce qui peut être aussi difficile (*i.e.* impossible) que la génération d'une impulsion de Dirac. Il est possible de se contenter d'un *bruit blanc dans la bande* du filtre (nous donnerons plus loin la signification de cette expression), où on peut travailler à temps discret, où, comme nous le verrons également, il est possible de générer un bruit blanc discret.

Exercice 8 : Considérez le problème de l'identification d'un filtre dans lequel la sortie **et** l'entrée sont perturbées par un bruit additif : si on applique $X(t, \omega)$ au filtre, l'entrée réelle est $X_1(t, \omega) = X(t, \omega) + B_1(t, \omega)$, et la sortie observée est $Z(t, \omega) = Y(t, \omega) + B_2(t, \omega)$, où $Y(t, \omega)$ est la sortie liée à $X_1(t, \omega)$ et $B_2(t, \omega)$ est un bruit d'observation. Vous supposerez que $X(t, \omega)$ est blanc, que $X(t, \omega)$, $B_1(t, \omega)$ et $B_2(t, \omega)$ sont non corrélés. Dans ces conditions, montrez que l'identification de la réponse impulsionnelle par intercorrélacion est possible.

3.3 Analyse dans le domaine fréquentiel

En repartant de la formule des interférences

$$R_{Y_1 Y_2}(m) = \left(h_1 * R_{X_1 X_2} * h_2^{*(-)} \right) (m),$$

on obtient simplement, après transformée de Fourier,

$$\boxed{S_{Y_1 Y_2}(f) = H_1(f) S_{X_1 X_2}(f) H_2^*(f)},$$

où $S_{Y_1 Y_2}(f)$, $S_{X_1 X_2}(f)$, $H_1(f)$ et $H_2(f)$ sont respectivement les transformées de Fourier de $R_{Y_1 Y_2}(m)$, $R_{X_1 X_2}(m)$, $h_1(m)$ et $h_2(m)$.²

Conséquences :

1. En prenant $Y_1 = Y_2 = Y$, $X_1 = X_2 = X$ et $H_1 = H_2 = H$, c'est-à-dire que l'on considère un seul filtre, il vient

$$\boxed{S_{YY}(f) = S_{XX}(f) |H(f)|^2}.$$

2. Si $H_1(f)$ et $H_2(f)$ sont deux filtres *disjoints* en fréquence, alors

$$S_{Y_1 Y_2}(f) = 0.$$

On en déduit que

$$R_{Y_1 Y_2}(\tau) = \text{TF}[S_{Y_1 Y_2}(f)]^{-1} = \text{TF}[0]^{-1} = 0.$$

si les filtres sont disjoints en fréquence, l'intercorrélacion des sorties est nulle.

Application Considérons deux filtres parfaits autour de deux fréquences pures f_1 et f_2 , de même entrée $X(t, \omega)$. On a $Y_1(t, \omega) = X(f_1, \omega) \exp(-j2\pi f_1 t)$, et $Y_2(t, \omega) = X(f_2, \omega) \exp(-j2\pi f_2 t)$.³ Dans ces conditions,

$$R_{Y_1 Y_2}(0) = E \{ X(f_1, \omega) X^*(f_2, \omega) \} \exp(-j2\pi(f_1 - f_2)t) = 0,$$

soit

$$E \{ X(f_1, \omega) X^*(f_2, \omega) \} = 0.$$

On dit que les composantes spectrales sont décorréliées.

Notion de densité spectrale de Puissance

La densité spectrale de puissance représente la répartition de la puissance du signal dans le domaine fréquentiel. Il s'agit exactement de la même notion que celle de densité de probabilité : lorsque l'on veut calculer probabilité qu'une variable aléatoire X appartienne à un certain intervalle $[x_1, x_2]$, il suffit d'intégrer la densité de probabilité de la variable entre ces deux bornes :

$$\Pr(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x) dx.$$

Si on appelle $D_{XX}(f)$ la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire $X(t, \omega)$, alors la puissance du signal portée par les composantes fréquentielles comprises entre f_1 et f_2 s'écrit

$$P_{XX}(f \in [f_1, f_2]) = \int_{f_1}^{f_2} D_{XX}(f) df.$$

Dès lors, la puissance totale du signal s'écrit

$$P_{XX} = \int_{-\infty}^{+\infty} D_{XX}(f) df.$$

2. La transformée de FOURIER de $h^*(-t)$ vaut $H^*(f)$.

3. Cette écriture n'est pas rigoureuse, car la transformée de Fourier n'est pas définie pour des signaux aléatoires stationnaires. Il faudrait ici utiliser la représentation de CRAMÉR — voir §3.4.

Or on sait que, pour un signal stationnaire et ergodique,

$$P_{XX} = E \{ |X(t, \omega)|^2 \} = R_{XX}(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |X(t, \omega)|^2 dt.$$

Par ailleurs,

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) \exp(j2\pi f\tau) df,$$

soit, pour $\tau = 0$,

$$R_{XX}(0) = P_{XX} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) df.$$

La transformée de Fourier $S_{XX}(f)$ de la fonction d'autocorrélation est ainsi une bonne candidate pour être la densité spectrale de puissance. Notons cependant, cette dernière relation ne prouve pas qu'elle le soit.

Considérons un filtre parfait, dont le module de la fonction de transfert est d'amplitude un dans une bande Δf centrée sur une fréquence f_0 , et nul ailleurs :

$$\begin{cases} |H(f)| = 1 & \text{pour } f \in [f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}] \\ |H(f)| = 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Notons $Y(t, \omega) = (h * X)(t, \omega)$ la réponse de ce filtre à une entrée $X(t, \omega)$. La puissance de la sortie est donnée par

$$P_{YY} = R_{YY}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(f) df,$$

or la formule des interférences fournit

$$S_{YY}(f) = S_{XX}(f) |H(f)|^2,$$

avec les conditions sur le module de $H(f)$ données précédemment. On obtient donc

$$P_{YY}(f \in [f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}]) = \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_{XX}(f) df,$$

ce qui correspond bien à la définition de la densité spectrale de puissance : la puissance pour les composantes spectrales comprises dans un intervalle est bien égale à l'intégrale de la densité spectrale de puissance sur cet intervalle. Si Δf est suffisamment faible, on pourra considérer la densité spectrale de puissance $S_{XX}(f)$ comme approximativement constante sur l'intervalle, et

$$P_{YY}(f \in [f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}]) \simeq S_{XX}(f_0) \Delta f.$$

Cette dernière relation indique que la densité spectrale de puissance doit s'exprimer en Watts par Hertz. Par ailleurs, lorsque Δf tend vers 0, la puissance recueillie est de plus en plus faible. Pour $\Delta f = 0$, la puissance obtenue est ainsi normalement nulle, sauf si la densité spectrale elle-même est constituée par une « masse » de Dirac (de largeur nulle mais d'amplitude infinie) à la fréquence considérée.

Notons que le filtre que nous avons défini ci-dessus n'est défini, par commodité de présentation, que pour les fréquences positives. Sa fonction de transfert ne vérifie donc pas la propriété de symétrie hermitienne des signaux réels : la réponse impulsionnelle associée est donc complexe et la sortie $Y(t, \omega)$ également complexe. En restaurant cette symétrie, c'est-à-dire en imposant $H(f) = H^*(-f)$, ce qui entraîne (notez le module de f)

$$\begin{cases} |H(f)| = 1 & \text{pour } |f| \in [f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}] \\ |H(f)| = 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

la puissance en sortie est

$$P_{YY} = \int_{-f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{-f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_{XX}(f) df + \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_{XX}(f) df.$$

La densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire réel est une fonction paire, ce qui conduit enfin à

$$P_{YY} = 2 \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_{XX}(f) df,$$

relation qui indique que la puissance se partage équitablement dans les fréquences positives et négatives.

Exemple :

Considérons le cas d'une sinusoïde à amplitude et phase aléatoire

$$X(t, \omega) = A(\omega) \sin(2\pi f_0 t + \phi(\omega)),$$

où $A(\omega)$ est une variable aléatoire centrée de variance σ^2 et $\phi(\omega)$ uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$, indépendante de $A(\omega)$. La fonction d'autocorrélation de ce signal vaut

$$R_{XX}(\tau) = \frac{\sigma^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau).$$

Par transformée de Fourier, on obtient la densité spectrale :

$$S_{XX}(f) = \frac{\sigma^2}{4} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)].$$

Enfin, en intégrant la densité spectrale

$$\int \frac{\sigma^2}{4} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] df = \frac{\sigma^2}{2},$$

on retrouve la puissance de la sinusoïde, $\sigma^2/2$, comme il se doit.

Les fonctions de corrélation et les densités spectrales de puissance forment des paires de transformées de Fourier :

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{XX}(f) \xrightarrow{\quad} R_{XX}(\tau), \\ S_{XY}(f) \xrightarrow{\quad} R_{XY}(\tau), \end{array}}$$

où $S_{XX}(f)$, $S_{XY}(f)$ sont les densités spectrale de puissance et de puissance d'interaction, respectivement. Ces relations constituent le théorème de Wiener-Kintchine-Einstein.

3.4 La représentation de Cramér

Un processus aléatoire stationnaire $X(t, \omega)$ n'admet pas de transformée de Fourier. En effet, si le processus est stationnaire, il est défini sur tout \mathbf{R} , et $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t, \omega)| dt$ ne converge pas. Il est ainsi impossible de définir la transformée de Fourier d'un processus stationnaire au sens habituel. Il est cependant possible d'associer aux signaux aléatoires stationnaires au sens large une représentation spectrale : c'est la représentation de Cramér. Cette représentation fait intervenir la théorie de la mesure. On peut représenter un processus aléatoire selon la transformée de Fourier inverse

$$X(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi ft) dZ(f, \omega).$$

La quantité $dZ(f, \omega)$ est appelée *incrément spectral*. On notera qu'il s'agit d'un signal aléatoire dépendant de la variable f . Lorsque le processus est stationnaire au sens large, l'incrément spectral possède les propriétés suivantes :

1. l'incrément est moyenne nulle

$$E \{dZ(f, \omega)\} = 0,$$

2. les incréments à des fréquences différentes sont décorrélés

$$E \{dZ(f_1, \omega)dZ(f_2, \omega)^*\} = 0 \quad \text{si } f_1 \neq f_2,$$

3. la densité spectrale de puissance est liée à la valeur moyenne du module carré de l'incrément spectral

$$E \{ |dZ(f, \omega)|^2 \} = S_{XX}(f)df.$$

L'incrément spectral $dZ(f, \omega)$ est ainsi un processus de moyenne nulle et décorrélé. On peut le considérer comme un bruit blanc (à l'ordre 2) dans le domaine fréquentiel (pas de corrélation, sauf pour le «retard» nul). La seconde propriété constitue la formulation rigoureuse indiquant la propriété de décorrélation des composantes spectrales.

On retrouve le lien entre puissance et densité spectrale de puissance en calculant $E\{|X(t, \omega)|^2\}$ en terme des incréments spectraux :

$$\begin{aligned} E \{ |X(t, \omega)|^2 \} &= E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi f_1 t) dZ(f_1, \omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi f_2 t) dZ(f_2, \omega)^* \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi(f_1 - f_2)t) E \{ dZ(f_1, \omega)dZ(f_2, \omega)^* \}. \end{aligned}$$

En tenant compte de la propriété de décorrélation, l'intégrande n'est non nul que pour $f = f_1 = f_2$, et

$$E \{ |X(t, \omega)|^2 \} = \int_{-\infty}^{+\infty} E \{ |dZ(f, \omega)|^2 \} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)df.$$

3.5 Bruit blanc à temps discret

Nous avons déjà noté l'impossibilité de disposer d'un bruit blanc théorique à temps continu, puisqu'un tel signal devrait être à corrélation microscopique, présenter une densité spectrale de puissance constante pour toutes les fréquences, et par suite une puissance infinie. Notons aussi que ce signal serait aussi à variance infinie... Il s'agit donc d'un modèle mathématique commode mais irréaliste.

Il est par contre possible de générer sans difficulté un bruit blanc à temps discret. Pour illustrer ceci (ce n'est pas une méthode de construction), considérons un signal aléatoire dont la bande est constante sur la zone de fréquence $[-B/2, B/2]$ et nulle ailleurs. Ce sera par exemple un signal de bande suffisamment large que l'on aura limité entre $-B/2$ et $B/2$. Notons N_0 l'amplitude de la densité spectrale de puissance. Ce signal a pour fonction de corrélation la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale de puissance que nous venons de définir, soit

$$R_{XX}(\tau) = \text{TF}^{-1} \left[\frac{N_0}{2} \text{rect}_B(f) \right] = N_0 B \frac{\sin(\pi B \tau)}{\pi B \tau}.$$

Le signal $X(t, \omega)$ étant à bande limitée par construction, il est possible de l'échantillonner, ce que l'on effectue à la fréquence de Shannon, c'est-à-dire avec $F_e = B$. Dans ces conditions, la fonction de corrélation du signal après échantillonnage $X(n, \omega)$, est la fonction de corrélation du signal à temps continu, échantillonnée au rythme F_e :

$$R_{XX}(kT_e) = N_0 B \frac{\sin(k\pi)}{k\pi}.$$

Il est aisé de voir que cette fonction de corrélation n'est non nulle que pour $k = 0$, et que l'on a

$$R_{XX}(0) = N_0 B.$$

On notera aussi

$$R_{XX}(k) = N_0 B \delta(k),$$

où $\delta(k)$ représente cette fois-ci le symbole de Kronecker, le « Dirac à temps discret », qui vaut un lorsque son argument est nul, et est nul sinon. Le signal que nous venons de définir possède donc des échantillons décorrélés, présente une variance finie $N_0 B$. Du point de vue spectral, l'échantillonnage a périodisé le spectre initial tous les $F_e = B$. Le spectre de départ étant constant dans la bande $[-B/2, B/2]$, cette périodisation, à la limite du recouvrement, conduit à un spectre constant pour toutes les fréquences. Ce signal présente ainsi toutes les caractéristiques du bruit blanc.

4 Un exemple d'application : le filtrage adapté

4.1 Contexte

En sonar ou en radar, on cherche à localiser une « cible » (vocabulaire consacré) – cette cible peut être le sol, un bâtiment, une interface (en sismique réflexion) ou un avion ennemi (pour les guerriers). Pour cela, on procède de la façon suivante : on émet un signal $s(t)$, qui parcourt la distance d jusqu'à la cible, sur laquelle il est réfléchi en direction d'un récepteur. Le récepteur est souvent couplé à l'émetteur, et reçoit alors le signal atténué, retardé et bruité

$$Y(t, \omega) = as(t - t_0) + B(t, \omega).$$

L'atténuation a est supposée connue ; le bruit additif est en général supposé gaussien, pas nécessairement blanc, et il s'agit de déterminer le retard t_0 , correspondant au temps d'aller-retour, $t_0 = 2d/c$.

4.2 Maximisation du rapport signal-à-bruit

Considérons simplement pour le moment le modèle

$$Y(t, \omega) = x(t) + B(t, \omega).$$

L'approche habituelle consiste à rechercher à minimiser l'effet du bruit d'observation. On cherche alors à construire un filtre $h(t)$ tel que le rapport signal-à-bruit en sortie soit maximal, à un instant T , appelé instant de décision. Cet instant T devra être défini pour que l'observation ait été effectuée et que le filtre ait agi.

Notons $Z(t, \omega)$ la sortie du filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. On a alors

$$Z(t, \omega) = (h * Y)(t, \omega) = (h * x)(t) + (h * B)(t, \omega).$$

On écrit ainsi la sortie comme la somme de la sortie non-bruitée et de la contribution du bruit. Le rapport signal-à-bruit vaut ainsi

$$\rho(t) = \frac{|(h * x)(t)|^2}{\mathbb{E} \{|(h * B)(t, \omega)|^2\}},$$

où le numérateur représente la puissance instantanée de la sortie non bruitée et le dénominateur la puissance liée au bruit. On évalue ce rapport signal-à-bruit à l'instant de décision T .

$$\rho(T) = \frac{|(h * x)(T)|^2}{\mathbb{E} \{|(h * B)(T, \omega)|^2\}}.$$

En développant les produits de convolution, on obtient

$$\rho(T) = \frac{|\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(T-u)du|^2}{\mathbb{E} \left\{ \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)B(T-u, \omega)du \right|^2 \right\}}.$$

En ce qui concerne tout d'abord le dénominateur, il s'agit là de la puissance d'un signal aléatoire à la sortie d'un filtre, et l'on a donc

$$\mathbb{E} \left\{ |(h * B)(t, \omega)|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{B'B'}(f)df = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df,$$

où σ^2 est la puissance du bruit d'entrée.

L'inégalité de Schwartz permet de majorer le numérateur :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(T-u)du \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|^2 du \int_{-\infty}^{+\infty} |x^*(T-u)|^2 du,$$

avec égalité lorsque les vecteurs $h(u)$ et $x^*(T-u)$ sont colinéaires. L'égalité de Parseval-Plancherel, qui exprime la conservation du produit scalaire entraîne que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df.$$

On en déduit donc que le rapport signal-à-bruit est majoré selon

$$\rho(T) \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |x^*(T-u)|^2 du}{\sigma^2} = \frac{E_x}{\sigma^2},$$

où E_x est l'énergie du signal $x(t)$. L'égalité est atteinte lorsque $h(u)$ et $x^*(T-u)$ sont colinéaires, c'est-à-dire

$$\boxed{h(u) = kx^*(T-u)},$$

où k est une constante arbitraire. Le filtre optimal maximisant le rapport signal-à-bruit en sortie, à l'instant T , est ainsi le filtre dont la réponse impulsionnelle la copie retournée et décalée dans le temps du signal que l'on cherche à retrouver. En ce sens, le filtre est adapté au signal.

La relation de filtrage de $Y(t, \omega)$ avec une « copie retournée » équivaut en fait à effectuer une intercorrélacion (au sens déterministe). En effet,

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)y(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(T-u)y(t-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(T+v)y(t+v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(T-t+v)y(v)dv, \end{aligned}$$

soit

$$z(t) = R_{yx}(T-t).$$

Le récepteur optimal consiste donc à calculer l'intercorrélacion entre le signal reçu $y(t)$ et le signal attendu $x(t)$. On parle alors souvent de récepteur à corrélacion.

Application en Sonar-Radar

Dans le développement précédent, on a supposé connaître $x(t)$. Or, dans le contexte sonar-radar, le signal à détecter est $as(t-t_0)$, où a et t_0 sont inconnus. On utilisera alors comme filtre adapté le filtre adapté à $s(t)$, soit

$$h(t) = ks^*(T-t).$$

Dans ce cas, la sortie du filtre est, en terme d'intercorrélacion, $R_{ys}(T-t)$. En reprenant avec

$$y(t) = as(t-t_0) + b(t),$$

on obtient

$$z(t) = R_{ys}(T-t) = aR_{ss}(T+t_0-t) + R_{bs}(T-t).$$

L'effet du filtrage est alors de minimiser le terme de « bruit » $R_{bs}(T-t)$. Par ailleurs, on sait que l'autocorrélacion est maximale en 0. Dans notre cas de figure, la sortie $z(t)$ sera maximale pour $t = T + t_0$. À partir de ce maximum, on peut alors déduire la valeur du retard t_0 et la valeur du facteur d'échelle a . Le choix du signal s est important : on cherchera à ce qu'il présente un pic d'autocorrélacion R_{ss} très prononcé, afin de localiser facilement le maximum et permettre éventuellement la détection simultanée de plusieurs échos.

4.3 Approche probabiliste

Il n'est pas forcément nécessaire de rechercher une maximisation du rapport signal-à-bruit pour faire apparaître le filtre adapté. On peut poser le problème en termes probabilistes et rechercher la distribution *a posteriori* du retard t_0 compte tenu des observations.

Les données du problème sont alors l'équation d'observation

$$y(n) = as(n-n_0) + b(n). \quad (\text{IV.3})$$

et le signal émis $s(n)$.

On rappelle la règle de BAYES qui lie la probabilité *a priori* $p(x)$, la vraisemblance $p(y|x)$ et la distribution *a posteriori* $p(x|y)$:

$$p(x|y) \propto p(y|x)p(x). \quad (\text{IV.4})$$

Dans ce problème de réception, on s'intéresse à déterminer le retard r à partir des observations $\mathbf{y}(n)$ et de la connaissance du signal émis $\mathbf{s}(n)$. On cherchera donc à établir l'expression de la distribution *a posteriori* $p(r|\mathbf{y}(n))$.

On suppose que le bruit additif est gaussien, centré, de variance σ^2 . La probabilité d'observer \mathbf{y} si le retard τ est connu (c'est-à-dire alors que $\mathbf{s}(n-r)$ est connu), est alors donnée par

$$p(\mathbf{y}|r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{y}(n) - \mathbf{s}(n-r))^t(\mathbf{y}(n) - \mathbf{s}(n-r))}{2\sigma^2}\right). \quad (\text{IV.5})$$

En prenant pour r une distribution uniforme entre 1 et N , la distribution *a posteriori* est simplement

$$p(r|\mathbf{y}) \propto \exp\left(-\frac{(\mathbf{y}(n) - \mathbf{s}(n-r))^t(\mathbf{y}(n) - \mathbf{s}(n-r))}{2\sigma^2}\right), \quad (\text{IV.6})$$

avec $\mathbf{y}(n) = [y(n), y(n-1), \dots, y(n-N+1)]^t$.

Il ne reste plus qu'à développer l'argument de l'exponentielle pour obtenir le résultat que nous souhaitons établir :

$$(\mathbf{y}(n) - \mathbf{s}(n-r))^t(\mathbf{y}(n) - \mathbf{s}(n-r)) = \mathbf{y}^t(n)\mathbf{y}(n) - 2\mathbf{y}^t(n)\mathbf{s}(n-r) + \mathbf{s}^t(n-r)\mathbf{s}(n-r); \quad (\text{IV.7})$$

Les termes $\mathbf{y}^t(n)\mathbf{y}(n)$ et $\mathbf{s}^t(n-r)\mathbf{s}(n-r)$ représentent l'énergie du signal reçu et du signal émis, et ne dépendent pas du retard r (sous réserve qu'on ait une durée d'observation N suffisante pour avoir un motif complet de s dans les deux vecteurs $\mathbf{y}(n)$ et $\mathbf{s}(n-r)$). Développons le troisième terme :

$$\mathbf{y}^t(n)\mathbf{s}(n-r) = \sum_{i=0}^{N-1} y(n-i)s(n-i-r). \quad (\text{IV.8})$$

On reconnaît dans cette dernière relation l'expression de l'intercorrélation entre y et s , pour le retard r .

La distribution *a posteriori* du retard s'exprime donc comme

$$p(r|\mathbf{y}) \propto \exp\left(\frac{R_{ys}(r)}{\sigma^2}\right). \quad (\text{IV.9})$$

La distribution du retard, compte tenu des observations, est donc l'exponentielle de l'intercorrélation, pondérée par l'inverse de la variance du bruit additif gaussien. Pour tracer cette distribution *a posteriori*, il faudra donc calculer cette intercorrélation pour tous les retards possibles, puis en prendre l'exponentielle.

On peut aller un peu plus loin. En effet, dans une expérience de sonar, on répète l'émission avec une période $T = MT_e$, où M est le nombre de points obtenus sur la durée T avec un échantillonnage à la période T_e . En collectant les données sous la forme de K vecteurs de M points, on peut penser intuitivement que l'on améliorera le résultat de l'estimation en moyennant les intercorrélations calculées sur les différentes tranches. Ceci se formule ainsi :

$$p(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_K|r) = p(\mathbf{y}_1|r)p(\mathbf{y}_2|r) \dots p(\mathbf{y}_K|r), \quad (\text{IV.10})$$

en supposant que les «bruits» sont indépendants de tranche à tranche. On en déduit alors que

$$p(r|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_K) \propto p(\mathbf{y}_1|r)p(\mathbf{y}_2|r) \dots p(\mathbf{y}_K|r)p(r) \quad (\text{IV.11})$$

Compte tenu de la forme exponentielle de $p(\mathbf{y}_i|r)$, on obtient finalement

$$p(r|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_K) \propto \exp\left(\sum_{i=1}^K \frac{R_{y_i s}(r)}{\sigma^2}\right), \quad (\text{IV.12})$$

relation qui indique bien que l'on a intérêt à moyennner, ou plus exactement sommer les intercorrélations calculées sur les différentes tranches. Le processus est constructif, et la distribution *a posteriori* devient alors de plus en plus piquée.

4.4 Notes sur le choix du signal test, signaux pseudo-aléatoires

Il n'est pas possible, à l'aide d'un ordinateur, de générer une suite *aléatoire*. Même avec la montée en puissance des processeurs, *etc*, un ordinateur n'en reste pas moins foncièrement déterministe, et heureusement. . . Il est cependant possible de générer des suites pseudo-aléatoires, qui présentent en pratique, du point de vue de l'utilisateur, les caractéristiques d'un signal aléatoire.

Un tel générateur peut être réalisé en utilisant un registre à décalage bouclé sur lui même. ce générateur fournit alors des suites pseudo-aléatoires de 0 et de 1. On définit les bouclages du registre de manière à ce que la suite obtenue soit de longueur maximale. Pour un registre de n bits, on obtient ainsi une suite de longueur $2^n - 1$.

Les bouclages optimaux sont donnés par des polynômes particuliers. Le polynôme $P(x) = x^4 + x + 1$ est l'un de ceux-ci. Les suites obtenues sont périodiques, et permettent de parcourir tous les états possibles du registre. La valeur initiale du registre à décalage est la «graine». Les coefficients des premiers polynômes sont donnés ci-dessous :

(1,0)
 (2,1,0)
 (3,1,0)
 (4,1,0)
 (5,2,0)
 (6,1,0)
 (7,1,0)
 (8,4,3,2,0)
 (9,4,0)
 (10,3,0)
 (11,2,0)
 (12,6,4,1,0)
 (13,4,3,1,0)
 ...

On montre que la corrélation calculée sur *une période complète* vaut $R_{xx}(0) = \frac{A^2}{N}$, et $R_{xx}(k) = \frac{N+1}{N^2} A^2$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1 :

On considère le processus aléatoire $x(t)$ défini par $x(t) = B(\omega) + A(\omega) \cos(2\pi f_0 t + \phi(\omega))$ où $A(\omega)$, $B(\omega)$, et $\phi(\omega)$ sont des variables aléatoires indépendantes, $\phi(\omega)$ est une variable uniformément distribuée entre 0 et 2π , et on note $E\{A\} = m_A$, $E\{A^2\} = e_A^2$, $E\{B\} = m_B$, $E\{B^2\} = e_B^2$. Calculez la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $x(t)$. Le signal $x(t)$ est-il faiblement stationnaire à l'ordre 2?

Exercice 2 :

Soit $x(n)$ un signal aléatoire à temps discret faiblement stationnaire du second ordre. On définit

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) \cos(2\pi f_0 n + \phi(\omega)), \\ z(n) &= x(n) \cos(2\pi(f_0 + \lambda)n + \phi(\omega)) \end{aligned}$$

où $\phi(\omega)$ est une variable uniformément distribuée entre 0 et 2π , indépendante de $x(n)$. On note m_X et $R_{XX}(k)$ la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $x(n)$.

Montrez que $y(n)$ et $z(n)$ sont faiblement stationnaires d'ordre deux, et que $y(n) + z(n)$ n'est pas stationnaire d'ordre 2.

Exercice 3 :

On cherche à prédire l'évolution d'un signal stationnaire discret $x(n)$ à partir de ses valeurs précédentes $x(n-1)$, en formant l'estimation $\hat{x}(n) = ax(n-1)$.

Déterminez la valeur optimale de a qui minimise l'erreur quadratique moyenne $E\{|\hat{x}(n) - x(n)|^2\}$?. De la même manière, on pourra chercher à prédire $x(n)$ à partir de p valeurs précédentes selon $\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^p a_i x(n-i)$.

Exercice 4 : Soit un filtre RC passif passe-bas du premier ordre, avec R la résistance et C la capacité. L'entrée du filtre est un signal aléatoire blanc, centré, de densité spectrale de puissance $N_0/2$. Calculez la moyenne, la densité spectrale de puissance, et la puissance du signal de sortie $y(t)$. Donnez également la bande de bruit équivalente.

On utilisera le fait que la primitive de $1/(a^2 + x^2)$ est $\frac{1}{a} \arctg(x/a)$.

Exercice 5 :

Soit un processus aléatoire discret $x(n)$ blanc et centré, de variance σ^2 . On définit deux nouveaux signaux aléatoires $y(n)$ et $z(n)$ par les relations

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) + bx(n-1), \\ z(n) &= x(n) + az(n-1), \end{aligned}$$

avec $a < 1$. Calculez les moments d'ordre 1 et 2 de $y(n)$ et $z(n)$. On pourra admettre que $E\{x(n)z(n-k)\} = 0$ pour $k > 0$.

Exercice 6 : Soit un filtre passe-bas idéal de fonction de transfert $H(f)$, $H(f) = 1$ pour $|f| \leq B/4$ et 0 ailleurs. L'entrée du filtre est un processus aléatoire gaussien $x(t)$ de moyenne m_X et de densité spectrale de puissance $S_{XX}(f)$, avec $S_{XX}(f) = 1$ pour $|f| \leq B/2$ et 0 ailleurs. Calculez la variance de $x(t)$, la moyenne, la variance et la fonction d'autocorrélation de la sortie du filtre $y(t)$. Donnez la loi de $y(t)$.

Problème I : Soit le signal, défini pour $n \in [0, N - 1]$

$$x(n) = A \cos(2\pi m_o n/N + \phi),$$

où

- A est une variable aléatoire gaussienne, centrée, de variance σ^2 ,
- ϕ est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$
- A et ϕ sont indépendantes.

1) Montrez que

$$\text{TFD} \left\{ e^{j2\pi m_o n/N} \right\} = \delta(m - m_o),$$

où $\delta(u) = 1$ si $u = 0$, et 0 sinon.

- 2) Calculez la moyenne de $x(n)$.
- 3) Calculez la fonction d'autocorrélation $R_{XX}(k)$ de $x(n)$.
- 4) Calculez la transformée de Fourier discrète $X(m)$ de $x(n)$.
- 5) Le signal $X(m)$ est-il certain ou aléatoire? Calculez la moyenne de $X(m)$.
- 6) Donnez $|X(m)|^2$.
- 7) Calculez la moyenne de $|X(m)|^2$.
- 8) Calculez la TFD de $R_{XX}(k)$, et comparez la au résultat précédent.
- 9) On considère maintenant le signal

$$x(n) = g(n) \cos(2\pi m_o n/N + \phi),$$

avec $n \in [0, N - 1]$, et où $g(n)$ est une fonction aléatoire, indépendante de ϕ .

- a) Calculez l'autocorrélation de $x(n)$,
- b) déduisez en sa densité spectrale de puissance, en fonction de la densité spectrale de puissance de g , $S_g(f)$.

Rappels :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos a + b + \cos a - b]$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

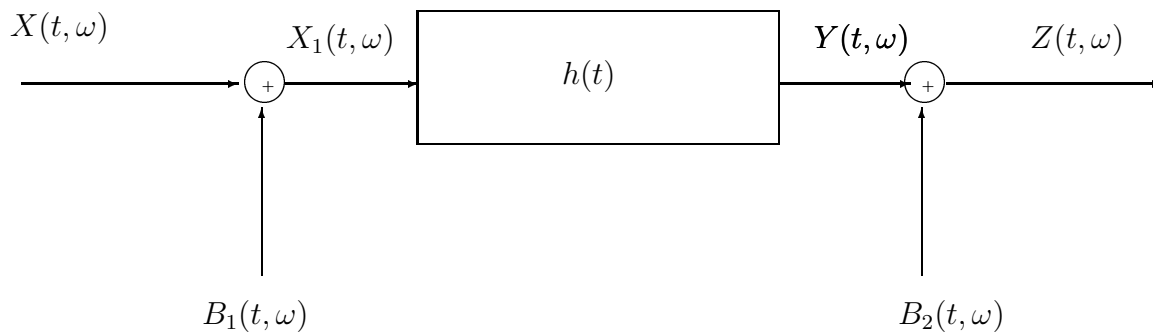
$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$$

Problème II :

On considère le schéma de la figure 1, où $X(t, \omega)$ est un signal aléatoire stationnaire et ergodique, $f_T(t)$ une fonction déterministe (certaine), et $h(t)$ la réponse impulsionnelle du système. On notera $\tilde{X}_T(t, \omega)$ le produit $f_T(t)X(t, \omega)$.

Question 1 :

- 1-a Donnez l'autocorrélation de la sortie, $R_{YY}(\tau)$, et l'intercorrélacion sortie-entrée $R_{YX}(\tau)$ en fonction de l'autocorrélation de l'entrée R_{XX} et de la réponse impulsionnelle h .

FIG. IV.4 - *Filtre bruité en entrée et en sortie*

1-b Dans le cas où $h(t) = \exp(j2\pi f_0 t)$, donnez l'expression de la sortie $Y(t, \omega)$, et montrez que $Y(0, \omega) = X_T(f_0, \omega)$, la transformée de Fourier de $X_T(t, \omega)$ à la fréquence f_0 .

1-c Toujours dans le cas où $h(t) = \exp(j2\pi f_0 t)$, donnez l'expression de l'autocorrélation de la sortie, $R_{YY}(\tau)$ et montrez que $R_{YY}(0) = E\{|X_T(f_0)|^2\}$.

Question 2 :

En notant toujours $X_T(t, \omega) = f_T(t)X(t, \omega)$, et en définissant

$$\hat{R}_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t, \omega) X_T^*(t - \tau, \omega) dt,$$

2-a montrez que

$$E\{\hat{R}_{XX}(\tau)\} = g(\tau)R_{XX}(\tau),$$

où $g(\tau)$ est une fonction dont vous donnerez l'expression. Représentez $g(\tau)$ lorsque $f_T(t) = \text{rect}_T(t/T)$.

2-b En utilisant l'égalité de Plancherel-Parseval, montrez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)e^{j2\pi f\tau} df,$$

et déduisez en que la transformée de Fourier de $R_{xy}(\tau)$ vaut $X(f)Y^*(f)$, où $X(f)$ et $Y(f)$, sont respectivement les transformées de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$.⁴

2-c Déduisez en que

$$\hat{S}_{XX}(f) = \text{TF}[\hat{R}_{XX}(\tau)] = |X_T(f)|^2.$$

2-d Montrez que

$$E\{\hat{S}_{XX}(f)\} = \text{TF}[E\{\hat{R}_{XX}(\tau)\}] = G(f) * S_{XX}(f),$$

où $G(f)$ est la transformée de Fourier de $g(\tau)$ et $S_{XX}(f)$ la densité spectrale de l'entrée $X(t, \omega)$.

Question 3 :

Dans le cas où $f_T(t) = \text{rect}_T(t/T)$, donnez $G(f)$, et représentez $S_{YY}(f)$, si

- $X(t, \omega)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance $N_0/2$,
- $X(t, \omega)$ est une sinusoïde à phase aléatoire, uniforme sur $[0, 2\pi[$, de fréquence f_0 .

Question 4 :

4-a Donnez la densité spectrale de la sortie, $S_{YY}(f)$, en fonction de la densité spectrale de l'entrée, $S_{XX}(f)$, de $G(f)$, et de la fonction de transfert $H(f)$.

4. Les x et y donnés dans les deux dernières relations sont des signaux « généraux » : ce ne sont pas nécessairement $X(t, \omega)$ et $Y(t, \omega)$.

4-b Considérons maintenant

$$f_T(t) = \text{rect}_T(t/T) \exp(j2\pi f_1 t).$$

On notera dans la suite $X_T(f, \omega)$ la transformée de Fourier du produit $\text{rect}_T(t/T)X(t, \omega)$.

– Montrez que $S_{YY}(f) = S_{X_T X_T}(f_0 - f_1)$, (cf 1-b)

– exprimez $S_{YY}(f)$ en fonction de $S_{XX}(f)$,

– donnez $Y(t, \omega)$ et $Y(0, \omega)$,

– montrez enfin que $\hat{S}_{YY}(f) = |X_T(f_0 - f_1, \omega)|^2 = |Y(t, \omega)|^2$, (cf 2-c)

5 À quoi peut servir le dispositif

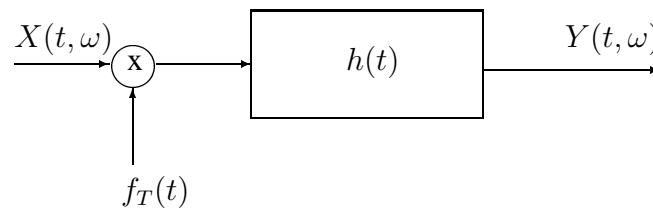


FIG. IV.5 - Système considéré

dans lequel on peut faire varier la fréquence f_1 ? Quel serait l'intérêt d'ajouter une intégration supplémentaire en sortie?

Problème III : (Séquence aléatoire binaire)

Soit une série de variables aléatoires binaires indépendantes $\{a_k\}$, pour $k = -\infty \dots \infty$. On a

$$\begin{cases} \Pr(a_k = 0) = 1/2, \\ \Pr(a_k = 1) = 1/2, \end{cases}$$

c'est-à-dire une densité de probabilité

$$p(a_k) = \frac{1}{2} [\delta(a_k) + \delta(a_k - 1)],$$

où $\delta(\bullet)$ est l'impulsion de Dirac.

1 – Calculez

$$\begin{aligned} E\{a_k\}, \\ \text{Var}\{a_k\} \end{aligned}$$

où $E\{\bullet\}$ désigne l'espérance mathématique, et $\text{Var}\{\bullet\}$ la variance.

2 – On définit un signal aléatoire $x(t)$ selon

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT_b),$$

où T_b est la « période bit ». On supposera que les a_k sont indépendants entre eux.

Représentez une réalisation (quelconque) de ce signal aléatoire.

3 – On considère un filtre de réponse impulsionnelle $s(t)$, où $s(t)$ est une fonction déterministe définie sur $[0, T_b]$. On note $y(t)$ la sortie de ce filtre soumis à l'entrée $x(t)$.

Donnez l'expression générale de $y(t)$.

À titre d'illustration, on considèrera $s(t) = \text{rect}_{T_b/2}(t - T_b/4) - \text{rect}_{T_b/2}(t - 3T_b/4)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} s(t) = 1 & \text{pour } t \in [0, T_b/2] \\ s(t) = -1 & \text{pour } t \in [T_b/2, T] \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

Représentez graphiquement la sortie du filtre pour la réalisation

$$\{\dots a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1, \dots\}.$$

4 – Calculez la moyenne statistique de $y(t)$, $E\{y(t)\}$ (on demande ici l'expression générale en fonction de $s(t)$). Représentez $E\{y(t)\}$ dans le cas particulier (IV.13). Ce signal est-il stationnaire? Dans le cas particulier, donnez également la moyenne temporelle de $y(t)$.

5 – Lorsqu'on le système n'est pas synchrone, on ne connaît pas les instants d'apparition du signal, et on modélise le signal comme

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k s(t - kT_b + \theta),$$

où θ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, T_b]$. On considèrera que les $\{a_k\}$ et θ sont indépendants. On notera qu'une somme infinie d'intégrales définies sur des intervalles consécutifs est une intégrale définie sur $[-\infty, \infty]$, et on notera $m_a = E\{a_k\}$, et $m_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)du$. Calculez la moyenne statistique de $x(t)$. Ce signal est-il stationnaire?

6 – En utilisant le même modèle de signal que pour la question précédente, montrez que

$$R_{YY}(\tau) = \frac{1}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{aa}(k) R_{SS}(\tau - kT_b),$$

où $R_{aa}(k)$ représente la l'autocorrélation éventuelle des a_k . Cette expression de la fonction de corrélation pour un «code en ligne» rendu stationnaire par l'introduction de la variable θ , est appelé formule de BENETT.

CHAPITRE V

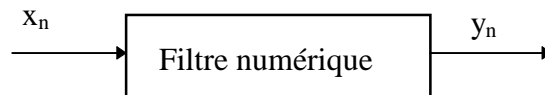
INTRODUCTION AU FILTRAGE NUMÉRIQUE

C E CHAPITRE définit la notion de filtrage numérique et présente les propriétés générales des filtres numériques. Il étudie par ailleurs les cellules de filtrage élémentaires d'ordre 1 et 2.

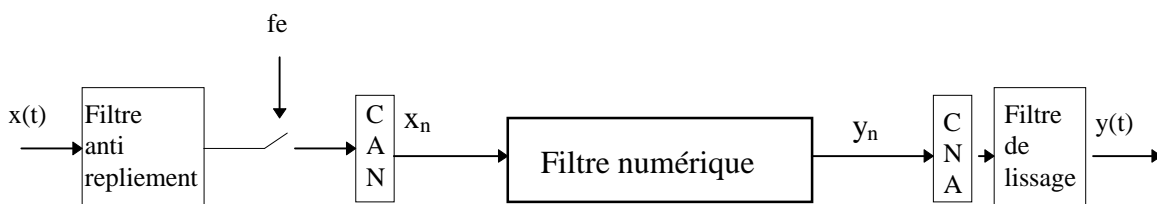
On appelle filtre numérique un système discret linéaire et invariant en temps, opérant sur des signaux discrets.

Un signal discret (x_n) est une suite prenant ses valeurs dans \mathbb{R} , le plus souvent, parfois dans \mathbb{C} .

Les premiers filtres numériques ont servi à simuler des filtres analogiques sur ordinateurs. Les suites d'entrée et de sortie du filtre sont alors dépourvues de tout support physique.



Puis on a réalisé des systèmes discrets travaillant sur des signaux physiques échantillonnés et numérisés. Dans ce cas, en notant T_e la période d'échantillonnage, les valeurs de la suite (x_n) valent : $x_n = x(nT_e)$.



Il faut alors que les performances attendues du filtre numérique soient cohérentes avec la précision de la conversion analogique numérique.

Si f_e est peu supérieure à $2f_{max}$ (f_{max} étant la fréquence maximale du signal $x(t)$), le filtre antirepliement de spectre peut être assez difficile à réaliser. Il pourra alors être intéressant de suréchantillonner l'entrée analogique, ce qui simplifie le filtre antirepliement analogique en élargissant sa bande de transition. On sous-échantillonnera ensuite le signal numérique en lui appliquant un filtre antirepliement numérique.

Les principaux avantages des filtres numériques sont les suivants :

- Ils sont reproductibles sans réglages,
- Ils sont programmables,
- Ils ne dérivent pas, ni en temps ni en température,
- On peut les rendre facilement adaptatifs (dans ce cas là, le système n'est plus invariant en temps),
- Ils permettent de réaliser des filtres à phase parfaitement linéaire,

Leurs principaux inconvénients sont :

- Leur consommation (par comparaison aux circuits analogiques passifs),
- Leur limitation en fréquence : ils sont limités par la fréquence des convertisseurs analogiques numériques et par la vitesse des opérateurs de calcul numérique comme les multiplieurs.

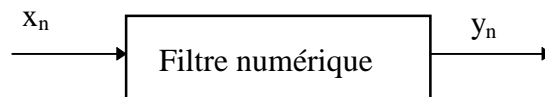
- Leur coût (mais ce dernier point n'est pas toujours vrai).

Les fonctions des filtres numériques sont analogues à celles des filtres analogiques. On les utilise en général dans le but d'atténuer une ou plusieurs bandes de fréquences. On parle de :

- filtres passe-bas quand on atténue les hautes fréquences,
- filtres passe-haut quand on atténue les basses fréquences,
- filtres coupe-bande quand on atténue une bande de fréquences,
- filtres passe-bande quand on favorise une bande de fréquences.

Un autre rôle des filtres est de corriger la fonction de transfert d'un canal qui introduit de la distortion. Dans ce cas le canal est dit dispersif et le filtre est appelé égaliseur.

1 Systèmes linéaires discrets invariants en temps



1.1 Définition

Un filtre numérique est un système discret linéaire invariant en temps. Il associe à la suite d'entrée (x_n) une suite de sortie (y_n) .

1.1.1 Linéarité

Soit 2 suites $x_1(n)$ et $x_2(n)$ avec les sorties correspondantes $y_1(n)$ et $y_2(n)$. Dire que le système est linéaire signifie que :

$$\begin{cases} \forall \lambda_1 \in \mathbb{R} \\ \forall \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \lambda_1 x_1(n) + \lambda_2 x_2(n) \rightarrow \lambda_1 y_1(n) + \lambda_2 y_2(n)$$

1.1.2 Invariance en temps

Soit la suite $x(n)$ et la sortie correspondante $y(n)$, dire que le système est invariant en temps signifie qu'à la suite $x(n - n_0)$ correspond la sortie $y(n - n_0)$, et ceci quelque soit n_0 .

1.2 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système discret linéaire invariant en temps est la réponse du filtre à une entrée impulsion u_n . Cette réponse impulsionnelle est généralement notée h_n .

La suite impulsion u_n est définie par :

$$\begin{cases} \forall n < 0 & u_n = 0 \\ & u_0 = 1 \\ \forall n > 0 & u_n = 0 \end{cases}$$

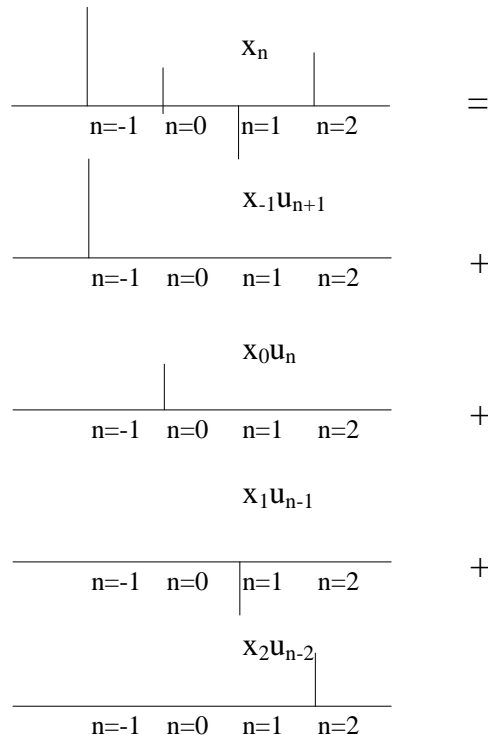


1.3 Relation entrée-sortie, convolution discrète

Soit une entrée quelconque x_n , on va montrer que la sortie correspondante y_n peut s'exprimer comme une convolution discrète de l'entrée x_n et de la réponse impulsionnelle h_n .

Toute suite x_n , peut s'écrire à l'aide de suites impulsionnelles u_{n-k} sous la forme :

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k u_{n-k}$$



D'après l'invariance en temps du filtre, la sortie correspondant à une entrée u_{n-k} (notée $\text{sortie}(u_{n-k})$) est la suite h_{n-k} .

D'après la linéarité du filtre, la sortie du filtre y_n pour une entrée x_n vaut :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \text{sortie}(u_{n-k}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k h_{n-k}$$

D'où :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k h_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

La relation liant h_n et x_n est appelée convolution discrète de la suite x_n avec la suite h_n .

La sortie d'un filtre est donc le produit de convolution de l'entrée du filtre avec la réponse impulsionnelle du filtre.

En analogique, la convolution n'avait pas d'utilité pratique pour la réalisation d'un filtre. En numérique, cette relation sera, dans certains cas, mise en œuvre explicitement pour la réalisation du filtre.

1.4 Réponse en fréquence

1.5 Réponse à une entrée fréquence pure

Soit une entrée x_n ne contenant qu'une fréquence f_0 (soit une seule pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$).

$$x_n = e^{j\omega_0 n T_e}$$

On a supposé ici que x_n était la suite obtenue par échantillonnage à la période T_e du signal analogique $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, mais on pourrait raisonner de même sur une suite numérique $x_n = e^{j\omega_0 n}$.

La sortie y_n correspondante se calcule par la relation de convolution :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k h_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{j\omega_0(n-k)T_e} = e^{j\omega_0 n T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-j\omega_0 k T_e}$$

$$y_n = x_n H(\omega_0)$$

Avec :

$$H(\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-j\omega_0 k T_e}$$

Pour une entrée ne contenant qu'une fréquence, la sortie est proportionnelle à l'entrée, c'est à dire que l'on retrouve la même fréquence à la sortie du filtre. Le coefficient de proportionnalité $H(\omega_0)$ est complexe. Son module est le coefficient qui multiplie l'amplitude réelle de l'entrée, et son argument est l'angle de déphasage de l'entrée.

$$H(\omega_0) = |H(\omega_0)| e^{j \arg(H(\omega_0))} = A(\omega_0) e^{j\Phi(\omega_0)}$$

Et pour $x_n = e^{j\omega_0 n T_e}$, la sortie s'écrit $y_n = A(\omega_0) e^{j(\omega_0 n T_e + \Phi(\omega_0))}$.

Les suites $x_n = e^{j\omega_0 n T_e}$ sont les fonctions propres des filtres numériques.

La fonction $H(\omega)$ est la transformée de Fourier à temps discret de la suite h_n . Elle est appelée la fonction de transfert en fréquence du filtre.

$H(\omega)$ est une fonction périodique de période $2\pi/T_e$. On notera $f_e = 1/T_e$.

L'inverse d'une transformée de Fourier à temps discret $H()$ est donnée par :

$$h_n = \frac{1}{2\pi f_e} \int_{-\pi f_e}^{\pi f_e} H(\omega) e^{j\omega n T_e} d\omega$$

1.5.1 Relation entre les transformées de Fourier de l'entrée et de la sortie

Soit une suite d'entrée x_n quelconque et sa transformée de Fourier $X(\omega)$. La sortie y_n a pour transformée de Fourier $Y(\omega)$.

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-j\omega n T_e} \quad Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{-j\omega n T_e}$$

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{-j\omega n T_e} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} e^{-j\omega n T_e} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} e^{-j(n-k)T_e} e^{-j\omega k T_e}$$

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-j\omega k T_e} \left(\sum_{n-k=-\infty}^{+\infty} x_{n-k} e^{-j\omega(n-k)T_e} \right) = H(\omega) X(\omega)$$

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$$

On peut donc caractériser un filtre numérique soit par sa réponse impulsionnelle h_n soit par sa fonction de transfert en fréquence $H(\omega)$, qui est la transformée de Fourier de la suite h_n .

En pratique on s'intéressera souvent au module de la fonction de transfert H , ce module caractérisant l'atténuation ou le gain du filtre pour chaque fréquence.

Le déphasage introduit par le filtre pour chaque fréquence sera noté :

$$\Phi(\omega) = \arg(H(\omega))$$

Lorsque ce déphasage est proportionnel à ω : $\Phi(\omega) = k\omega T_e$ alors le filtre ne déforme pas les signaux dans la bande passante.

En effet soit par exemple :

$$x_n = a_1 \cos(2\pi f_1 n T_e + \Phi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 n T_e + \Phi_2)$$

En supposant que f_1 et f_2 soient dans la bande passante avec un gain unité pour la fonction de transfert, on peut écrire :

$$\begin{aligned} y_n &= a_1 \cos(2\pi f_1 n T_e + \Phi_1 + \Phi(f_1)) + a_2 \cos(2\pi f_2 n T_e + \Phi_2 + \Phi(f_2)) \\ y_n &= a_1 \cos(2\pi f_1 n T_e + \Phi_1 + 2k\pi f_1 T_e) + a_2 \cos(2\pi f_2 n T_e + \Phi_2 + 2k\pi f_2 T_e) \\ y_n &= a_1 \cos(2\pi f_1 T_e (n+k) + \Phi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 T_e (n+k) + \Phi_2) = x(n+k) \end{aligned}$$

La sortie est donc égale à l'entrée retardée de $-k$ échantillons.

On appelle retard de groupe cette valeur $-kT_e$.

Dans le cas général, on définit le **retard de groupe** $\tau(\omega)$ par :

$$\tau(\omega) = -\frac{\partial \Phi(\omega)}{\partial \omega}$$

Le retard de groupe représente un retard introduit par le filtre pour chaque fréquence.

Lorsque la phase est linéaire, le retard de groupe est constant.

Dans de nombreuses applications, en particulier en transmission de données il est important de ne pas déformer le signal utile et on utilisera des filtres à phase linéaire.

Dans d'autres cas, on cherchera à obtenir un retard de groupe aussi petit que possible.

1.6 Fonction de transfert en z

1.6.1 Définition

On étudie les propriétés d'un filtre analogique à l'aide de $H(p)$, sa fonction de transfert en p , qui est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.

De même, on étudie les propriétés d'un filtre numérique, à l'aide de $H(z)$, sa fonction de transfert en z , qui est la transformée en z de sa réponse impulsionnelle h_n .

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n z^{-n}$$

On remarquera que $H(\omega)$ est la restriction de $H(z)$ au cercle unité ($|z|=1$) :

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n e^{-j\omega n T_e} = H(z)|_{z=e^{j\omega T_e}}$$

1.6.2 Relation entre les transformées en z de l'entrée et de la sortie d'un filtre

On rappelle que la transformée en z d'une suite x_n est définie comme la limite d'une série de Laurent lorsque cette série converge.

On notera respectivement $X(z)$, $Y(z)$ et $H(z)$ les transformées en z de l'entrée x_n , de la sortie y_n et de la réponse impulsionnelle h_n .

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n} \quad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n z^{-n} \quad Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n z^{-n}$$

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} \right) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} \right) z^{-k} z^{-(n-k)}$$

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k} \left(\sum_{m=n-k=-\infty}^{+\infty} x_m z^{-m} \right) = X(z)H(z)$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

En résumé pour un filtre numérique, on peut écrire :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k h_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

2 Quelques rappels sur la transformée en z

2.1 Domaine de convergence

Le critère de Cauchy permet d'étudier l'existence de la transformée en z :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right| < \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty \quad \text{si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Séquences causales :

Une séquence x_n est dite causale si elle est nulle pour $n < 0$.

Pour une séquence causale, la transformée en z est monolatérale :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n}$$

$X(z)$ existe si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n z^{-n}|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \text{c'est à dire si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} |z|^{-1} < 1 \quad \text{soit} \quad |z| > R_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{\frac{1}{n}}$$

La transformée en z d'une suite causale est donc définie à l'extérieur d'un cercle de rayon R_+ .

Séquences anticausales :

Une séquence x_n est dite anticausale si elle est nulle pour $n \geq 0$.

Pour une séquence anticausale, la transformée en z s'écrit :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x_{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{-n} z^n$$

$X(z)$ existe si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{-n} z^n|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \text{c'est à dire si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{-n}|^{\frac{1}{n}} |z| < 1 \quad \text{soit} \quad |z| < R_- = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{-n}|^{-\frac{1}{n}}$$

La transformée en z d'une suite anticausale est donc définie à l'intérieur d'un cercle de rayon R_- .

Suite quelconque

Une suite quelconque x_n est la somme d'une suite causale x^+ et d'une suite anticausale x^- :

$$x_n = x_n^+ + x_n^- \quad \text{avec :}$$

$$\begin{array}{l} x_n^+ = x_n \quad \text{si } n \geq 0 \\ x_n^+ = 0 \quad \text{si } n < 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} x_n^- = x_n \quad \text{si } n < 0 \\ x_n^- = 0 \quad \text{si } n \geq 0 \end{array}$$

La transformée en z d'une suite quelconque est donc définie dans une couronne : $R_+ < |z| < R_-$, quand cette couronne existe.

2.2 Linéarité

$$\forall \lambda_1 \quad \text{et} \quad \forall \lambda_2 \quad TZ(\lambda_1 x_1(n) + \lambda_2 x_2(n)) = \lambda_1 TZ(x_1(n)) + \lambda_2 TZ(x_2(n))$$

2.3 Théorème du retard

$$\text{Cas de la transformée en z bilatérale} \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n}$$

$$TZ(x_n) = X(z) \Rightarrow TZ(x_{n-k}) = z^{-k} X(z)$$

$$\text{Cas de la transformée en z monolatérale} \quad X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n}$$

Il faut alors tenir compte des conditions initiales.

$$TZ(x_n) = X(z) \Rightarrow$$

$$TZ(x_{n-k}) = z^{-k} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n-k} z^{-(n-k)} \right) = z^{-k} \left(\sum_{m=-k}^{+\infty} x_m z^{-m} \right) = z^{-k} X(z) + z^{-k} \left(\sum_{m=-k}^{-1} x_m z^{-m} \right)$$

$$TZ(x_{n-k}) = z^{-k} X(z) + \left(\sum_{n=1}^k x_{-n} z^{n-k} \right)$$

2.4 Théorème de la convolution

Soit z_n la suite obtenue par convolution de 2 suites x_n et y_n : $z_n = x_n * y_n$

on utilise les notations : $X(z) = TZ(x_n)$ $Y(z) = TZ(y_n)$ $Z(z) = TZ(z_n)$ Où TZ signifie transformée en z monolatérale.

Et on montre facilement que :

$$Z(z) = X(z)Y(z)$$

2.5 Théorème de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 = \frac{1}{2j\pi} \int_{\text{Cercle unité}} X(z)X(z^{-1})z^{-1}dz = \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} |X(f)|^2 df$$

2.6 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} x_n &= \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) \text{ pour une suite causale} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) \end{aligned}$$

2.7 Intégration et dérivation

$$TZ \left(\sum_{i=-\infty}^n x_i \right) = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$$

$$TZ (x_n - x_{n-1}) = (1 - z^{-1})X(z)$$

2.8 Inversion de la transformée en z

L'inverse de la transformée en z est donnée par :

$$x_n = \frac{1}{2j\pi} \int_{\text{Cercle unité}} X(z) z^{n-1} dz$$

Pour montrer cette relation, on calcule d'abord l'intégrale :

$$\int_C z^{-n} dz \text{ où } C \text{ représente le cercle unité.}$$

En remplaçant z par $z = re^{j\theta}$, avec $r=1$, et dz par $dz = e^{j\theta} d\theta$, l'intégrale devient :

$$\int_C z^{-n} dz = j \int_0^{2\pi} e^{-jn\theta} e^{j\theta} d\theta$$

Si $n \neq 1$ alors :

$$j \int_0^{2\pi} e^{-jn\theta} e^{j\theta} d\theta = j \frac{e^{-j(n-1)2\pi} - 1}{j(1-n)} = 0$$

Et si $n=1$

$$j \int_0^{2\pi} e^{-j\theta} e^{j\theta} d\theta = j \int_0^{2\pi} d\theta = 2j\pi$$

En conclusion :

$$\int_C z^{-n} dz = \begin{cases} 2j\pi & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

D'où pour $X(z)$:

$$\int_{\text{cercle unité}} X(z) z^{n-1} dz = \int_{\text{Cercle unité}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z^{-k} z^{n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \int_{\text{Cercle unité}} z^{n-k-1} dz = 2j\pi x_n$$

D'où :

$$x_n = \frac{1}{2j\pi} \int_{\text{cercle unité}} X(z) z^{n-1} dz$$

3 Fonctions de transfert rationnelles en z, FIR, IIR

En général, on utilisera des filtres dont la fonction de transfert est rationnelle. $H(z)$ s'écrit alors comme le rapport d'un numérateur $N(z)$ et d'un dénominateur $D(z)$ polynômes en z^{-1} .

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^Q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}}$$

On a normalisé a_0 à 1.

Dans la suite de ce polycopié, on se limitera, sauf exception, à ces filtres.

Ces filtres sont simples à réaliser. La sortie y_n s'écrit en fonction des entrées et des sorties précédentes à l'aide d'une équation de récurrence à coefficients constants.

En effet :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z)D(z) = X(z)N(z)$$

$$Y(z) + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{i=0}^Q b_i z^{-i} X(z)$$

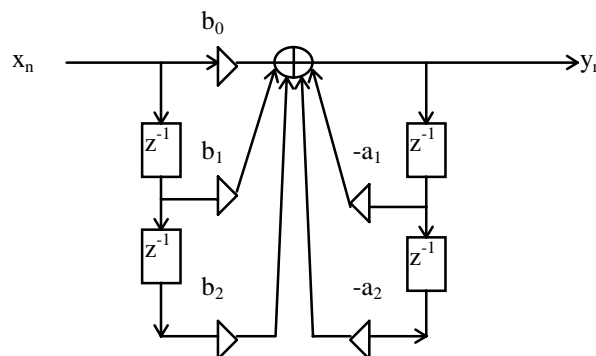
D'où par transformée en z inverse :

$$y_n + \sum_{k=1}^P a_k y_{n-k} = \sum_{i=0}^Q b_i x_{n-i}$$

$$y_n = \sum_{i=0}^Q b_i x_{n-i} - \sum_{k=1}^P a_k y_{n-k}$$

Cette équation de récurrence à coefficients constants permet de réaliser simplement le filtre. Il y a bien sûr d'autres structures de réalisation possibles, mais elles utilisent, de même, des multiplieurs, des additionneurs et des mémoires.

La figure suivante représente une cellule de filtrage d'ordre 2 ($P=Q=2$). Sur la figure, les rectangles entourant z^{-1} représentent un retard d'un échantillon.



On aurait pu considérer, de façon plus générale des fonctions de transfert $H(z)$ rationnelles contenant des puissances de z positives, ce qui correspondrait à des filtres non causaux (voir définition ci-dessous).

On distingue 2 types de filtres : les filtres RII à Réponse Impulsionnelle Infinie et les filtres RIF à Réponse Impulsionnelle Finie.

Les filtres RII ont la forme générale $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ avec $D(z) \neq 1$.

Les filtres RII sont dits récurrents car le calcul de la sortie y_n à l'instant n fait intervenir les valeurs de P sorties précédentes y_{n-k} .

Les filtres RII sont caractérisés par les pôles et les zéros de leur fonction de transfert $H(z)$.

Les filtres RIF ont un dénominateur $D(z)$ égal à 1. Ils sont caractérisés par leurs seuls zéros.

La réponse impulsionnelle des filtres RIF est de longueur finie (d'où leur nom) puisque :

$$H(z) = \sum_{i=0}^Q b_i z^{-i} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n z^{-n} \Rightarrow \begin{cases} \forall n \notin [0, Q-1] & h_n = 0 \\ \forall n \in [0, Q-1] & h_n = b_n \end{cases}$$

La réponse impulsionnelle h_n d'un filtre RIF n'a donc qu'un nombre fini de valeurs non nulles, et h_n coïncide

avec les coefficients b_n de l'équation de récurrence. En conclusion, pour un filtre RIF :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{i=0}^Q b_i z^{-i} \\ y_n &= \sum_{i=0}^Q b_i x_{n-i} \end{aligned}$$

3.1 Calcul de la réponse impulsionnelle d'un filtre RII

On peut, quand le filtre est de type RII, calculer sa réponse impulsionnelle de différentes façons :

- soit en appliquant la formule de la transformée en z inverse et utilisant le théorème des résidus,
- soit en effectuant une division polynomiale de $N(z)$ par $D(z)$,
- soit, quand les pôles de $D(z)$ sont simples, en utilisant la somme de la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{pour } |q| < 1$$

3.1.1 Rappel sur le théorème des résidus

L'intégrale sur un contour fermé C d'une fonction complexe holomorphe $F(z)$ rationnelle vaut :

$$\int_C F(z) dz = 2j\pi \sum_{\text{pôles } z_i \text{ dans } C} \text{Résidu}(z_i)$$

Où z_i est un pôle de $F(z)$.

$$\text{Et pour } F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{\prod_{i=1}^P (1 - z_i z^{-1})}$$

Si z_i est un pôle simple :

$$\text{résidu}(z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) F(z)$$

Si z_i est un pôle multiple d'ordre k :

$$\text{résidu}(z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} \left((z - z_i)^k F(z) \right)}{\partial z^{k-1}}$$

Exemple :

$$\text{Soit } H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Calcul de h_n par identification avec une série géométrique

Lorsque $|a_1| < 1$ (on verra par la suite que cette condition est nécessaire pour que le filtre soit stable) on peut écrire :

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-a_1 z^{-1} \right)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n z^{-n}$$

Et par identification :

$$\begin{cases} h_n = 0 & \text{pour } n < 0 \\ h_n = (-a_1)^n & \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

Calcul de h_n par transformée en z inverse

Pour cet exemple, la formule de la transformée en z inverse nous donne :

$$h_n = \frac{1}{2j\pi} \int_C H(z) z^{n-1} dz = \text{Résidu}_{\text{pour } -a_1} \left(H(z) z^{n-1} \right) = \lim_{z \rightarrow -a_1} (z + a_1) H(z) z^{n-1} = (-a_1)^n$$

4 Causalité et stabilité

4.1 Causalité

Un filtre numérique est dit causal, si sa réponse impulsionnelle h_n est nulle pour $n < 0$.
Sa transformée en z converge alors à l'extérieur d'un cercle.

Un filtre numérique est dit anticausal, si sa réponse impulsionnelle h_n est nulle pour $n \geq 0$.
Sa transformée en z converge alors à l'intérieur d'un cercle.

4.2 Stabilité

On dira qu'un filtre numérique est stable, si à toute entrée bornée x_n correspond une sortie y_n bornée.
Pour toute suite (x_n) bornée :

$$\exists M \quad \forall n \quad |x_n| < M \quad \Rightarrow \quad \exists M' \quad \forall n \quad |y_n| < M'$$

4.2.1 1^{ère} condition nécessaire et suffisante de stabilité

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité s'écrit :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h_n| < A$$

C'est une condition suffisante car :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k}$$

$$|y_n| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h_k| |x_{n-k}|$$

$$|x_n| < M \quad \Rightarrow \quad |y_n| < M \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h_k| < MA$$

C'est une condition nécessaire. Un contre exemple suffit à le montrer. Ainsi l'entrée bornée x_n , égale à 1 si h_{-n} est positif et à -1 si h_{-n} est négatif, génère une sortie y_0 non bornée :

$$\text{Si } x_n = \text{signe}(h_{-n}) \text{ alors } y_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n h_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h_n| \text{ non bornée}$$

4.2.2 2^{ème} condition nécessaire et suffisante de stabilité

Lorsque le filtre est causal et que sa fonction de transfert est rationnelle,
il existe une autre condition nécessaire et suffisante de stabilité :
il faut et il suffit que tous les pôles du $H(z)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

Réciproquement pour un filtre anticausal de fonction de transfert rationnelle,
une condition nécessaire et suffisante de stabilité est que
tous les pôles du $H(z)$ soient à l'extérieur du cercle unité.

Démonstration dans le cas causal :

$H(z)$ rationnelle peut se décomposer en K éléments simples correspondant à des pôles simples ou multiples.

La réponse impulsionnelle $h(n)$ est la somme de K termes $h_i(n)$ égaux aux transformées en z inverses des éléments de la décomposition pour les pôles z_i .

Pour un pôle simple z_i , en notant $\frac{A_i}{1-z_i z^{-1}}$ l'élément correspondant de la décomposition de $H(z)$ en éléments simples, on a :

$$h_i(n) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) \frac{A_i z^{n-1}}{1 - z_i z^{-1}} = A_i z_i^n$$

Et la somme des valeurs absolues de $h_i(n)$ est bornée si et seulement si $|z_i| < 1$.

De même pour un pôle z_i multiple d'ordre k , en notant $\frac{A_i(z)}{(1-z_i z^{-1})^k}$ l'élément correspondant de la décomposition de $H(z)$ en éléments simples, on a :

$$h_i(n) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} (A_i(z) z^{n+k-1})}{\partial z^{k-1}} = B_i(z_i)$$

Où $B_i(z_i)$ est un polynôme de degré $n+k-1$ au maximum.

Et la somme des valeurs absolues de $h_i(n)$ est bornée si et seulement si $|z_i| < 1$.

4.2.3 Stabilité des FIR

On remarquera que les filtres FIR ont comme seul pôle $z=0$ et que ce pôle est à l'intérieur du cercle unité. Les filtres FIR sont donc toujours stables. C'est une des raisons pour lesquelles ils sont très utilisés en filtrage adaptatif. En effet, les coefficients d'un filtre adaptatif varient à chaque nouvel échantillon, il faut donc vérifier la stabilité du filtre à chaque nouvel échantillon. Mais pour un filtre RIF, cette vérification est inutile.

5 Etude des filtres numériques élémentaires

5.1 Introduction

Cette section présente les caractéristiques des cellules élémentaires de filtrage FIR et IIR d'ordre un et deux. La connaissance du comportement de ces filtres est importante car très souvent, les filtres d'ordre élevé sont réalisés par l'association en cascade ou en parallèle de ces cellules élémentaires.

Pour cette section, dans les tracés de fonction de transfert, l'axe des fréquences sera limité à la plage $[0, f_e/2]$ et on normalisera $f_e/2$ à 1.

Avant d'étudier les cellules élémentaires de filtrage le chapitre commence par une analyse des zéros de transmission.

5.2 Etude des zéros de transmission

Les filtres FIR et les filtres IIR possédant un numérateur peuvent présenter des zéros de transmission, c'est à dire que leur fonction de transfert fréquentielle peut s'annuler pour certaines valeurs de fréquence.

La fonction de transfert en fréquence correspondant aux valeurs prises par la fonction de transfert en z lorsque z évolue sur le cercle unité, un zéro de transmission correspond aussi à un zéro de la fonction de transfert $H(z)$ et ce zéro, noté z_i , est situé sur le cercle unité.

Son module vaut un et son argument θ_i :

$$z_i = e^{j\theta_i}$$

Cet argument θ_i correspond à un zéro de transmission pour une pulsation ω et une fréquence f telles que $\omega = 2\pi f$ et :

$$\begin{aligned} z &= e^{j\omega T_e} = e^{j2\pi f T_e} \\ z &= z_i \Rightarrow f = \frac{\theta_i}{2\pi} f_e \end{aligned}$$

5.2.1 Cas d'une cellule d'ordre 1

Dans le cas d'une cellule FIR d'ordre 1 ou d'un numérateur d'ordre 1 pour un filtre IIR, le polynôme d'ordre un en z^{-1} s'écrit :

$$N(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$$

Le zéro de $N(z)$ vaut $z_0 = -\frac{b_1}{b_0}$, il est réel. Comme le module de z_0 vaut 1, les seules solutions sont : $z_0 = 1$ et $z_0 = -1$. Les zéros de transmission ne peuvent avoir lieu qu'à la fréquence nulle ou à la fréquence $f_e/2$.

Les seuls polynômes d'ordre un présentant des zéros de transmissions sont de la forme:

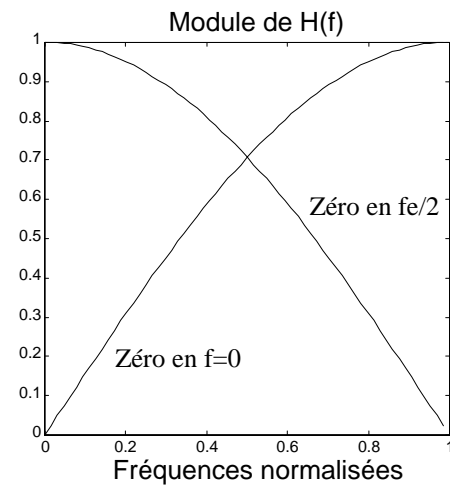
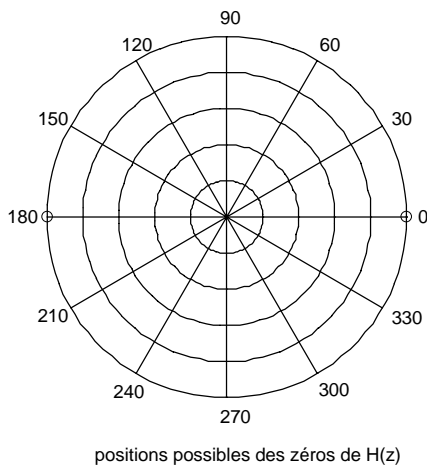
$$N(z) = b_0(1 + z^{-1})$$

$$N(z) = b_0(1 - z^{-1})$$

C'est à dire que b_0 et b_1 sont égaux ou opposés.

Les figures suivantes représentent :

- Les zéros de $H(z)$ dans le plan z , pour les deux types de fonctions à zéro de transmission à l'ordre un. Les zéros sont matérialisés par des cercles sur cette figure.
- Les deux fonctions de transfert possibles (en module) à l'ordre un, possédant un zéro de transmission soit en $f = 0$ soit en $f = f_e/2$.



5.2.2 Cas d'une cellule d'ordre deux

Dans le cas d'une cellule FIR d'ordre deux ou d'un numérateur d'ordre deux pour un filtre IIR, le polynôme d'ordre deux en z^{-1} s'écrit :

$$N(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}$$

Les coefficients de $N(z)$ sont réels, les zéros sont donc imaginaires conjugués et s'écrivent :

$$z_1 = e^{j\theta_1}$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = e^{-j\theta_1}$$

Et

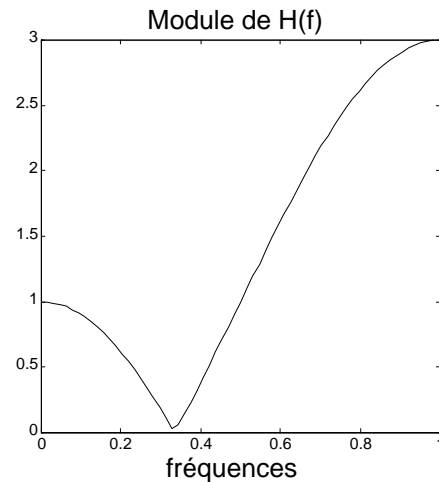
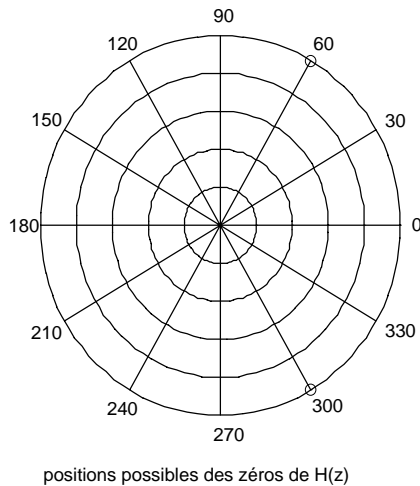
$$N(z) = b_0(1 - z_1z^{-1})(1 - \bar{z}_1z^{-1})$$

$$N(z) = b_0(1 - 2\cos\theta_1z^{-1} + z^{-2})$$

Les coefficients b_0 et b_2 sont donc égaux.

La figure suivante représente le cas de 2 zéros d'arguments $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ et $\theta_2 = \frac{-\pi}{3}$, ce qui correspond à un

zéro de transmission en $f_e/6$.



5.3 Cellule FIR d'ordre un

5.3.1 Généralités

La cellule causale FIR d'ordre un a pour fonction de transfert en z, le polynôme H(z) suivant :

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$$

La fonction H(z) n'a pas de pôle à l'extérieur du cercle unité, elle est donc stable.

Comme pour tous les FIR, la réponse impulsionnelle est facile à calculer par identification avec la définition :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{n=P} h_n z^{-n} = b_0 + b_1 z^{-1} \text{ on déduit que } \forall n \ h_n = b_n \text{ et en particulier ici:}$$

$$\begin{aligned} h_0 &= b_0 \\ h_1 &= b_1 \\ h_n &= 0 \text{ si } n \notin [0, 1] \end{aligned}$$

La fonction de transfert en fréquence est obtenue à partir de H(z) par la relation :

$$H(e^{j2\pi f T_e}) = \left[H(z) / z = e^{j2\pi f T_e} \right]. \text{ Cette fonction sera notée un peu abusivement } H(f) \text{ par la suite.}$$

$$H(f) = b_0 + b_1 e^{-j2\pi f T_e}$$

Son module, sa phase et son temps de propagation de groupe $\tau(f)$ valent :

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= b_0^2 + b_1^2 + 2b_0 b_1 \cos(2\pi f T_e) \\ \Phi(f) &= -\arctg \left(\frac{b_1 \sin(2\pi f T_e)}{b_0 + b_1 \cos(2\pi f T_e)} \right) \\ \tau(f) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi(f)}{\partial f} = b_1 \frac{b_1 + b_0 \cos(2\pi f T_e)}{b_0^2 + b_1^2 + 2b_0 b_1 \cos(2\pi f T_e)} \end{aligned}$$

Le module est une fonction monotone sur la demi période $[0, f_e/2]$ et les valeurs extrêmes sont :

$$|H(0)| = |b_0 + b_1| \quad \text{avec} \quad \Phi(0) = 0$$

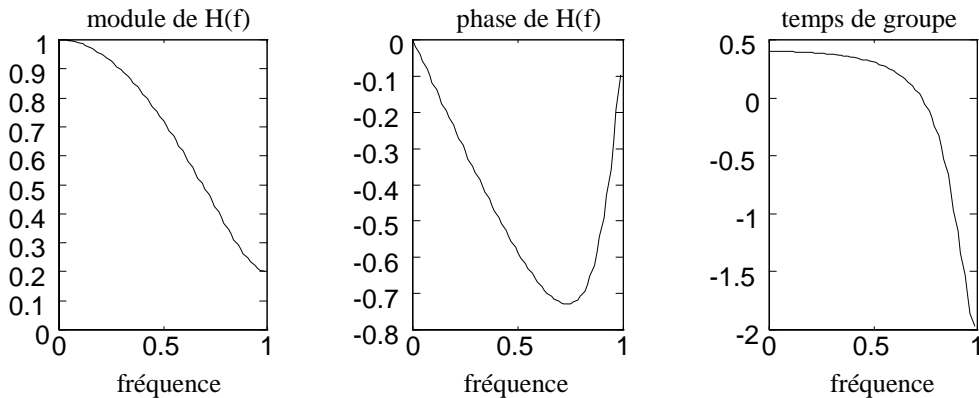
$$\left| H\left(\frac{f_e}{2}\right) \right| = |b_0 - b_1| \quad \text{avec} \quad \Phi\left(\frac{f_e}{2}\right) = 0$$

Si les deux coefficients sont de mêmes signes, le filtre est un passe bas. Et réciproquement, si les deux coefficients sont de signes opposés, le filtre est un passe haut. En effet ce changement de signe revient à changer z en -z, c'est à dire f en $\frac{f_e}{2} - f$.

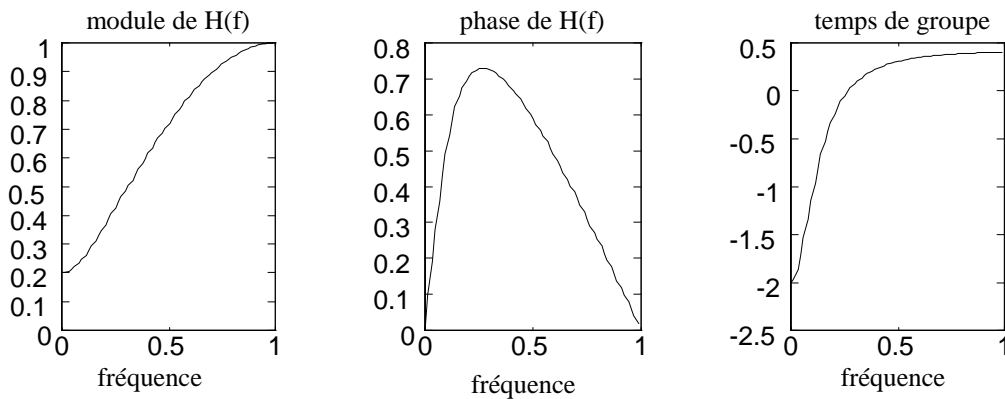
L'étude de la fonction $\phi(f)$ montre que $\phi(f) \leq \frac{\pi}{2}$.

5.3.2 Exemple

Les courbes suivantes illustrent une cellule d'ordre un de coefficients $b_0 = 0.6$ et $b_1 = 0.4$.



Les courbes suivantes illustrent une cellule d'ordre un de coefficients $b_0 = 0.6$ et $b_1 = -0.4$.



5.3.3 Cellules spéciales

Deux cellules d'ordre un sont particulièrement intéressantes parce qu'elles possèdent des zéros de transmission :

$H(z) = b_0(1 + z^{-1})$ qui s'annule pour la fréquence $f_e/2$ et $H(z) = b_0(1 - z^{-1})$ qui s'annule pour la fréquence 0.

D'autre part si $b_0 = -b_1$ la phase s'écrit:

$$\Phi(f) = \frac{\pi}{2} - \pi f T_e$$

et le temps de propagation de groupe est constant. Il vaut $T_e/2$.

Si $b_0 = b_1$ la phase s'écrit :

$$\Phi(f) = -\pi f T_e$$

Cette phase est linéaire et le temps de propagation de groupe est constant. Il vaut $T_e/2$.

5.4 Cellule FIR d'ordre 2

5.4.1 Généralités

La cellule causale FIR d'ordre deux a pour fonction de transfert en z , le polynôme $H(z)$ suivant :

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

La fonction $H(z)$ n'a pas de pôle à l'extérieur du cercle unité elle est donc stable.

Comme pour tous les FIR, la réponse impulsionnelle est facile à calculer par identification avec la définition :

$H(z) = \sum_{n=0}^{n=p} h_n z^{-n} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$ on déduit que $\forall n \quad h_n = b_n$ et en particulier ici :

$$\begin{aligned} h_0 &= b_0 \\ h_1 &= b_1 \\ h_2 &= b_2 \\ h_n &= 0 \quad \text{si } n \notin [0, 1, 2] \end{aligned}$$

La fonction de transfert en fréquence est obtenue à partir de $H(z)$ par la relation :

$H(e^{j2\pi f T_e}) = [H(z)/z = e^{j2\pi f T_e}]$. Cette fonction sera notée un peu abusivement $H(f)$ par la suite :

$$H(f) = b_0 + b_1 e^{-j2\pi f T_e} + b_2 e^{-j4\pi f T_e}$$

Le polynôme $H(z)$ en z^{-1} possède deux zéros. Si les deux zéros sont réels, le filtre peut être considéré comme formé de deux cellules d'ordre un en cascade. Nous nous intéressons, dans ce chapitre seulement au cas d'une "vraie" cellule d'ordre deux possédant deux zéros complexes. Comme les coefficients b sont réels, ces zéros sont complexes conjugués. Appelons z_1 et z_2 ces zéros. On peut les écrire en coordonnées polaires sous la forme :

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 &= \bar{z}_1 = r_1 e^{-j\theta_1} \\ H(z) &= b_0 (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \end{aligned}$$

En identifiant les deux écritures de $H(z)$, on déduit les relations liant les coefficients b aux coordonnées polaires des zéros.

$$\begin{aligned} b_1 &= b_0 (z_1 + \bar{z}_1) = -2b_0 r_1 \cos(\theta_1) \\ b_2 &= b_0 z_1 \bar{z}_1 = b_0 r_1^2 \end{aligned}$$

Le module, la phase et le temps de propagation de groupe de la fonction de transfert en fréquence peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées polaires des zéros. Ils valent :

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= b_0^2 \left| 1 - z_1 e^{-j2\pi f T_e} \right|^2 \left| 1 - \bar{z}_1 e^{-j2\pi f T_e} \right|^2 \\ |H(f)|^2 &= b_0^2 \left| 1 - r_1 e^{-j(2\pi f T_e - \theta_1)} \right|^2 \left| 1 - r_1 e^{-j(2\pi f T_e + \theta_1)} \right|^2 \\ |H(f)|^2 &= b_0^2 \left(1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(2\pi f T_e - \theta_1) \right) \left(1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(2\pi f T_e + \theta_1) \right) \\ \Phi(f) &= \text{arctg} \left(\frac{r_1 \sin(2\pi f T_e - \theta_1)}{1 - r_1 \cos(2\pi f T_e - \theta_1)} \right) + \text{arctg} \left(\frac{r_1 \sin(2\pi f T_e + \theta_1)}{1 - r_1 \cos(2\pi f T_e + \theta_1)} \right) \\ \tau(f) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi(f)}{\partial f} \\ \tau(f) &= -2r_1 \frac{(1 + r_1^2) [\cos(\theta_1) \cos(2\pi f T_e) - r_1] - r_1 [\cos(4\pi f T_e) + \cos(2\theta_1) - 2r_1 \cos(\theta_1) \cos(2\pi f T_e)]}{[1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(2\pi f T_e - \theta_1)] [1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(2\pi f T_e + \theta_1)]} \end{aligned}$$

Pour une cellule d'ordre 2, la fonction $\phi(f)$ est en valeur absolue inférieure à π .

5.4.2 Etude des extréma du module de la fonction de transfert en fréquence

Pour étudier les extrémas de $|H(f)|$, il faut étudier sa dérivée par rapport à f . Lorsque cette dérivée s'annule, la fonction $|H(f)|$ passe par un extrémum. Pour trouver les valeurs de f où $\frac{\partial |H(f)|}{\partial f} = 0$, on dérive $\|H(f)\|^2$ et on étudie pour quelle valeur de f , cette dérivée s'annule sans que $H(f)$ s'annule.

$$\frac{\partial |H(f)|^2}{\partial f} = 2 |H(f)| \frac{\partial |H(f)|}{\partial f} = b_0^2 4\pi T_e r_1 \sin(2\pi f T_e) \left[(1 + r_1^2) \cos(\theta_1) - 2r_1 \cos(2\pi f T_e) \right]$$

Dans l'intervalle $[0, f_e/2]$, cette dérivée s'annule lorsque :

- Soit $\sin(2\pi f T_e)$ s'annule, c'est à dire pour $f = 0$ et $f = f_e/2$.
- Soit $(1 + r_1^2) \cos(\theta_1) - 2r_1 \cos(2\pi f T_e)$ s'annule, c'est à dire pour une fréquence f_R telle que :

$$\cos(2\pi f_R T_e) = \frac{(1 + r_1^2) \cos(\theta_1)}{2r_1} = -\frac{(b_0 + b_2)b_1}{4b_2b_0}$$

Ce dernier cas n'est possible que si : $\left| \frac{(1+r_1^2)\cos(\theta_1)}{2r_1} \right| \leq 1$ ou, ce qui revient au même : $\left| \frac{(b_0+b_2)b_1}{4b_2b_0} \right| \leq 1$.

Ces zéros sont des zéros de $\frac{\partial H(f)}{\partial f}$ et non de $\|H(f)\|$, sauf dans le cas trivial où $r_1 = 1$ et $\theta_1 = 0$.

D'autre part la dérivée de $|H(f)|$ par rapport à f est négative pour $f < f_R$ puis positive pour $f > f_R$. La fréquence f_R , quand elle existe, correspond donc forcément à un minimum de $|H(f)|$. Une cellule FIR d'ordre deux peut donc présenter une **antirésonance**.

Si r_1 est proche de 1, la fréquence f_R est proche de $\frac{\theta_1 f_e}{2\pi}$. Il y a égalité si $r_1 = 1$.

La valeur de $|H(f)|$ pour $f = f_R$ vaut :

$$|H(f_R)| = \left| b_0(1 - r_1)^2 \sin \theta_1 \right|$$

Comme on l'a vu précédemment si $r_1 = 1$, la cellule possède un zéro de transmission qui correspond au minimum de $|H(f)|$.

Soit B_R la largeur de bande à mi-hauteur de cette antirésonance.

$$B_R = |f_+ - f_-|$$

où f_- et f_+ sont les fréquences pour lesquelles $|H(f)|^2 = 2|H(f_R)|^2$, lorsque ces fréquences existent. On peut écrire $|H(f)|^2$ sous la forme d'un polynôme d'ordre 2 en $\cos(2\pi f T_e)$:

$$|H(f)|^2 = 4r_1^2 \cos(2\pi f T_e)^2 - 4r_1(1 + r_1^2) \cos(\theta_1) \cos(2\pi f T_e) + 2r_1^2 \cos(2\theta_1) + (1 + r_1^2)^2$$

Pour $|H(f)|^2 = (1 - r_1^2)^2 \sin(\theta_1)^2$ le discriminant du polynôme est nul et on retrouve la solution correspondant à la fréquence de résonance $\cos(2\pi f_R T_e) = \frac{(1+r_1^2)\cos(\theta_1)}{2r_1}$.

Pour $|H(f)|^2 = 2|H(f_R)|^2 = 2(1 - r_1^2)^2 \sin(\theta_1)^2$, le polynôme s'écrit :

$$4r_1^2 \cos(2\pi f T_e)^2 - 4r_1(1 + r_1^2) \cos(\theta_1) \cos(2\pi f T_e) + \cos(2\theta_1) + (1 + r_1^4) + 2r_1^2 = 0$$

le discriminant s'écrit :

$$\Delta = 16r_1^2(1 + r_1^2)^2 \cos(\theta_1)^2 - 16r_1^2 \left(\cos(2\theta_1) + (r_1^4 + 1) + 2r_1^2 \right) = 16r_1^2(1 - r_1^2)^2 \sin(\theta_1)^2$$

Le discriminant est positif, on en déduit 2 expressions pour les racines potentielles :

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_+ T_e) &= \cos(2\pi f_R T_e) - \frac{(1 - r_1^2) \sin \theta_1}{2r_1} \\ \cos(2\pi f_- T_e) &= \cos(2\pi f_R T_e) + \frac{(1 - r_1^2) \sin \theta_1}{2r_1} \end{aligned}$$

Ces 2 racines n'existent que si :

$$\begin{aligned} \left| \cos(2\pi f_R T_e) - \frac{(1 - r_1^2) \sin \theta_1}{2r_1} \right| &\leq 1 \\ \left| \cos(2\pi f_R T_e) + \frac{(1 - r_1^2) \sin \theta_1}{2r_1} \right| &\leq 1 \end{aligned}$$

Toutes les situations sont possibles : les 2 racines existent, une seule racine existe, ou bien aucune des 2 n'existe. Dans le cas où les 2 conditions sont vérifiées, c'est à dire où les 2 racines existent, on peut calculer une approximation de la largeur de bande de l'antirésonance. A partir des valeurs de $\cos(2\pi f_+ T_e)$ et de $\cos(2\pi f_- T_e)$, on déduit que, pour $r_1 \approx 1$:

$$\cos(2\pi f_+ T_e) - \cos(2\pi f_- T_e) = -2 \sin(2\pi(f_R + B/2)T_e) \sin(\pi B T_e) \approx -2 \sin(\theta_1) \pi B T_e \approx -2 \frac{(1 - r_1^2) \sin(\theta_1)}{2r_1}$$

D'où :

$$B_R \approx \frac{(1 - r)}{\pi} f_e$$

5.4.3 inversion du module des zéros, polynôme réciproque de H(z)

Les cellules FIR d'ordre 2 définies par les fonctions de transfert $H(z)$ et $H_r(z) = z^{-2}H(z^{-1})$ possèdent des pôles de mêmes arguments θ_1 et $-\theta_1$ mais de modules inverses r_1 et $1/r_1$. Elles présentent (si les conditions d'antirésonance sont vérifiées) une antirésonance pour la même fréquence f_R . Ces deux fonctions de transfert ont le même module mais :

$$\begin{aligned} \Phi_r(f) &= -4\pi f T_e - \Phi(f) \\ \tau_r(f) &= 2T_e - \tau(f) \end{aligned}$$

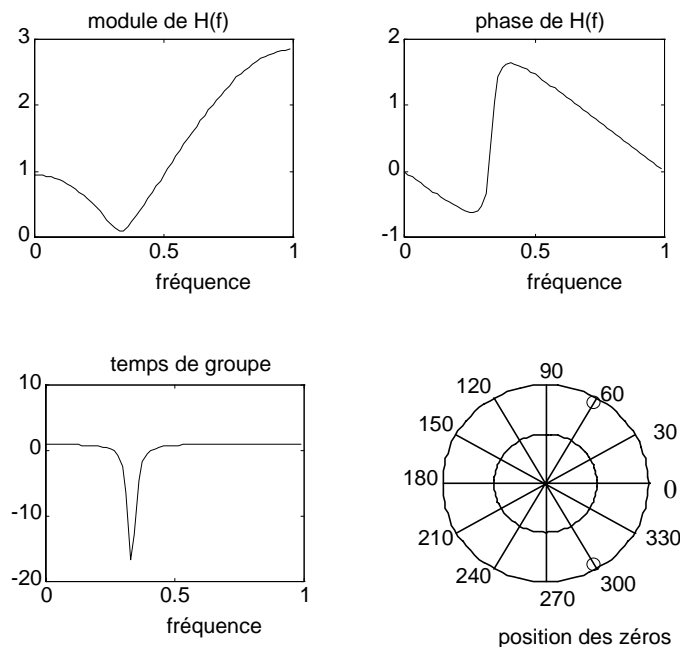
Les filtres numériques dont les zéros sont à l'intérieur du cercle unité sont dits à **phase minimale**.

5.4.4 Exemple

Les figures suivantes représentent la fonction de transfert $H(f)$ en module, en phase, en temps de propagation de groupe ainsi que la position des zéros de $H(z)$, pour les valeurs : $r_1 = 0.95$ $\theta_1 = \pi/3$, ce qui correspond à $H(z) = 1 - 0.95z^{-1} + 0.9025z^{-2}$.

La fréquence d'antirésonance f_R est telle que :

$2\pi f_R T_e = 1.0464$, ce que l'on peut comparer à $\theta_1 = \frac{\pi}{3} = 1.0472$.



5.4.5 Changement du signe du coefficient b_1 , changement de z en $-z$

Si l'on change le signe de b_1 , ou ce qui revient au même z en $-z$, le filtre change de type, les valeurs de $H(0)$ et de $H(f_e/2)$ sont inversées. Dans l'exemple ci-dessus, le filtre est plutôt un passe haut (dans le sens que $H(f = 0) < H(f = f_e/2)$). Si on remplace $b_1 = -0.95$ par $b_1 = 0.95$, le filtre résultant est un passe bas. Changer le signe de b_1 revient à remplacer θ_1 par $\pi - \theta_1$. Si les angles des zéros (en valeur absolue) sont

inférieurs à $\pi/2$ le filtre est un passe haut. Si les angles des zéros (en valeur absolue) sont supérieurs à $\pi/2$ le filtre est un passe bas.

En fait changer z en $-z$, revient à multiplier z par $e^{j\pi}$. Dans le domaine fréquentiel, multiplier $e^{j2\pi fT_e}$ par $e^{j\pi}$, revient à remplacer $e^{j2\pi fT_e}$ par $e^{j2\pi(f+f_e/2)T_e}$. Remplacer z par $-z$ est donc équivalent à une translation de $-f_e/2$ dans le domaine fréquentiel, et ceci quelque soit $H(z)$. Un passe-bas devient un passe-haut et réciproquement.

5.5 Cellule IIR d'ordre 1

5.5.1 Généralités

La cellule causale IIR d'ordre 1 a pour fonction de transfert en z , le polynôme $H(z)$ suivant :

$$H(z) = \frac{1}{a_0 + a_1 z^{-1}}$$

Par la suite, on normalise le terme constant du dénominateur de $H(z)$ à 1, $a_0 = 1$.

Pour que la fonction $H(z)$ soit stable et causale, il faut qu'elle n'ait pas de pôle à l'extérieur du cercle unité. Or le pôle de cette cellule vaut $-a_1$. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité de cette cellule causale est que $|a_1| < 1$.

La réponse impulsionnelle peut se calculer par la formule d'inversion de la transformée en z , à savoir:

$$h_n = \frac{1}{2j\pi} \int_{\text{cercle unité}} H(z) z^{n-1} dz$$

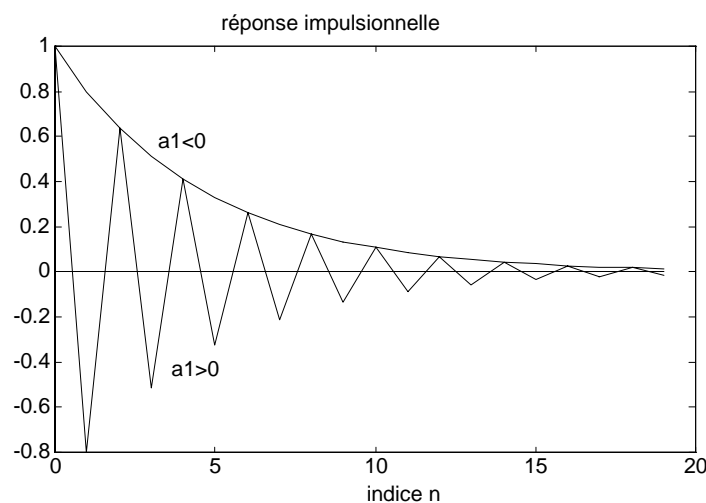
ou par identification de $H(z)$ avec la somme d'une série géométrique de raison $q = -a_1 z^{-1}$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-a_1)^n z^{-n}$$

D'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0 & \quad h_n = (-a_1)^n \\ \forall n < 0 & \quad h_n = 0 \end{aligned}$$

La figure suivante visualise l'allure de h_n pour a_1 positif et a_1 négatif.



La fonction de transfert en fréquence est obtenue à partir de $H(z)$ par la relation :

$$H(e^{j2\pi fT_e}) = \left[H(z) / z = e^{j2\pi fT_e} \right]$$

. Cette fonction sera notée un peu abusivement $H(f)$ par la suite.

$$H(f) = \frac{1}{1 + a_1 e^{-j2\pi f T_e}}$$

Pour le calcul de ses caractéristiques principales, il suffit de reprendre les résultats obtenus pour la cellule FIR. Son module, sa phase et son temps de propagation de groupe $\tau(f)$ valent :

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= \frac{1}{1 + a_1^2 + 2a_1 \cos(2\pi f T_e)} \\ \Phi(f) &= \arctg\left(\frac{a_1 \sin(2\pi f T_e)}{1 + a_1 \cos(2\pi f T_e)}\right) \\ \tau(f) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi(f)}{\partial f} = -a_1 \frac{a_1 + \cos(2\pi f T_e)}{1 + a_1^2 + 2a_1 \cos(2\pi f T_e)} \end{aligned}$$

Le module est une fonction monotone sur la demi période $[0, f_e/2]$ et les valeurs extrêmes sont :

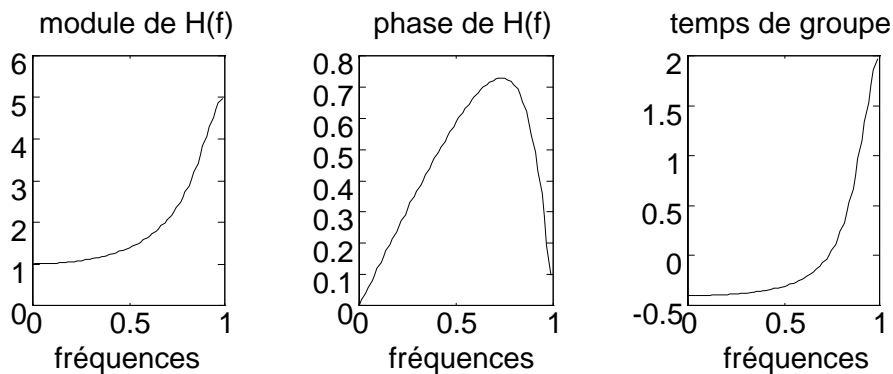
$$\begin{aligned} |H(0)| &= \frac{1}{|1 + a_1|} \quad \text{avec} \quad \Phi(0) = 0 \\ \left|H\left(\frac{f_e}{2}\right)\right| &= \frac{1}{|1 - a_1|} \quad \text{avec} \quad \Phi\left(\frac{f_e}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Si les deux coefficients sont de mêmes signes, le filtre est un passe-haut. Et réciproquement, si les deux coefficients sont de signes opposés, le filtre est un passe-bas.

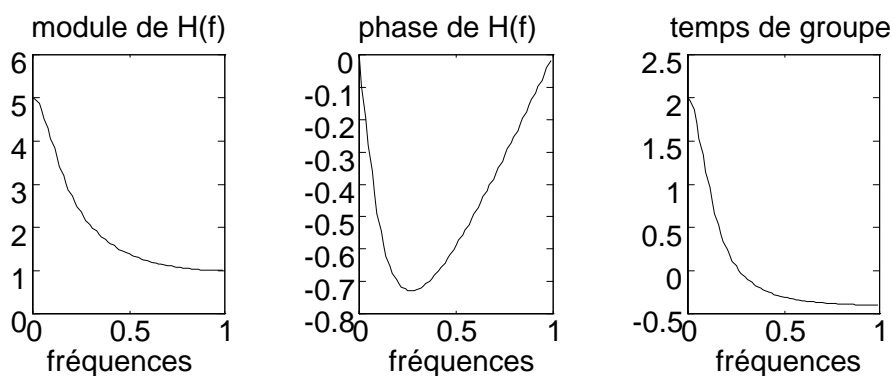
On remarque que pour une cellule d'ordre 1, le déphasage introduit par la cellule est inférieur ou égal à $\pi/2$.

5.5.2 Exemple

Les courbes suivantes illustrent une cellule d'ordre un de coefficients $a_0 = 0.6$ et $a_1 = 0.4$:



Les courbes suivantes illustrent une cellule d'ordre un de coefficients $a_0 = 0.6$ et $a_1 = -0.4$:



5.6 Cellule IIR d'ordre 2

5.6.1 Généralités

La cellule causale IIR d'ordre deux a pour fonction de transfert en z , le polynôme $H(z)$ suivant :

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

On a, comme pour la cellule d'ordre 1, normalisé a_0 à 1.

La fonction $H(z)$ causale est stable si et seulement si ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité, c'est à dire sont de module inférieur à 1.

La fonction $H(z)$ possède deux pôles. Si les deux pôles sont réels, le filtre peut être considéré comme formé de deux cellules d'ordre un en cascade. Nous nous intéressons, dans ce chapitre seulement au cas d'une « vraie » cellule d'ordre deux possédant deux pôles complexes. Comme les coefficients a_i sont réels ces pôles sont complexes conjugués. Appelons z_1 et z_2 ces pôles. On peut les écrire en coordonnées polaires sous la forme :

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 &= \bar{z}_1 = r_1 e^{-j\theta_1} \\ H(z) &= \frac{1}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})} \end{aligned}$$

En identifiant les deux écritures de $H(z)$, on déduit les relations liant les coefficients a_i aux coordonnées polaires des pôles.

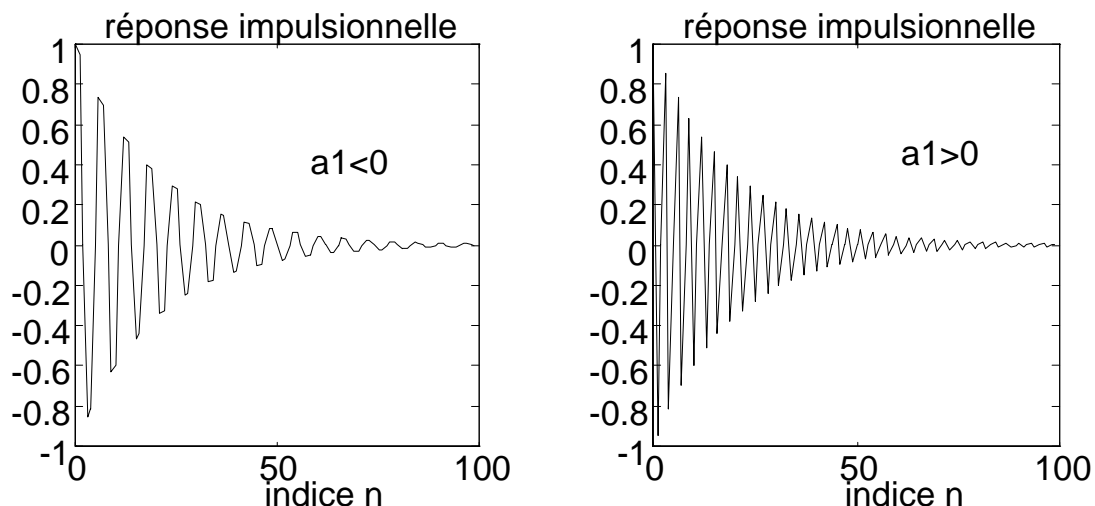
$$\begin{aligned} a_1 &= (z_1 + \bar{z}_1) = -2r_1 \cos(\theta_1) \\ a_2 &= z_1 \bar{z}_1 = r_1^2 \end{aligned}$$

La réponse impulsionnelle peut se calculer par la formule d'inversion de la transformé e en z , ou par identification de $H(z)$ avec des sommes de séries géométriques.

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{1}{2j\pi} \int_{\text{cercle unité}} H(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2j\pi} \int_{\text{cercle unité}} \frac{z^{n-1}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - \bar{z}_1 z^{-1})} \\ h_n &= \sum_{\text{pôles de } H(z)} \text{résidus}(H(z) z^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0 \quad h_n &= \left(\frac{z_1^{n+1}}{z_1 - \bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_1^{n+1}}{\bar{z}_1 - z_1} \right) = \left(\frac{r_1^n \sin[(n+1)\theta_1]}{\sin \theta_1} \right) \\ \forall n < 0 \quad h_n &= 0 \end{aligned}$$

La figure suivante représente les réponses impulsionnelles pour $r_1 = 0.95$ et $\theta_1 = \pi/3$ (ce qui correspond à un coefficient $a_1 < 0$) ainsi que pour $r_1 = 0.95$ et $\theta_1 = 2\pi/3$ (ce qui correspond à un coefficient $a_1 > 0$).



La fonction de transfert en fréquence est obtenue à partir de $H(z)$ par la relation :

$$H(e^{j2\pi fT_e}) = \left[H(z)/z = e^{j2\pi fT_e} \right].$$

Comme précédemment cette fonction sera notée un peu abusivement $H(f)$.

$$H(f) = \frac{1}{1 + a_1 e^{-j2\pi fT_e} + a_2 e^{-j4\pi fT_e}}$$

Le module, la phase et le temps de propagation de groupe de la fonction de transfert en fréquence peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées polaires des pôles, il suffit de reprendre et de modifier correctement les résultats obtenus pour la cellule FIR. Ils valent :

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{|1 - z_1 e^{-j2\pi fT_e}|^2 |1 - \bar{z}_1 e^{-j2\pi fT_e}|^2}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{|1 - r_1 e^{-j(2\pi fT_e - \theta_1)}|^2 |1 - r_1 e^{-j(2\pi fT_e + \theta_1)}|^2}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{(1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(2\pi fT_e - \theta_1)) (1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(2\pi fT_e + \theta_1))}$$

$$\Phi(f) = -\arctg\left(\frac{r_1 \sin(2\pi fT_e - \theta_1)}{1 - r_1 \cos(2\pi fT_e - \theta_1)}\right) - \arctg\left(\frac{r_1 \sin(2\pi fT_e + \theta_1)}{1 - r_1 \cos(2\pi fT_e + \theta_1)}\right)$$

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi(f)}{\partial f}$$

$$\tau(f) = 2r_1 \frac{(1 + r_1^2) [\cos(\theta_1) \cos(2\pi fT_e) - r_1] - r_1 [\cos(4\pi fT_e) + \cos(2\theta_1) - 2r_1 \cos(\theta_1) \cos(2\pi fT_e)]}{[1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(2\pi fT_e - \theta_1)] [1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(2\pi fT_e + \theta_1)]}$$

5.6.2 Etude des extréma du module de la fonction de transfert en fréquence

Les calculs qui ont déjà été faits pour la cellule FIR dans le paragraphe précédent peuvent être repris ici. La dérivée de $|H(f)|$ par rapport à f s'écrit :

$$\frac{\partial |H(f)|^2}{\partial f} = 2 |H(f)| \frac{\partial |H(f)|}{\partial f} = -\frac{4\pi T_e r_1 \sin(2\pi fT_e) [2(1 + r_1^2) \cos(\theta_1) - 2r_1 \cos(2\pi fT_e)]}{(1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(2\pi fT_e - \theta_1))^2 (1 + r_1^2 - 2r_1 \cos(2\pi fT_e + \theta_1))^2}$$

Dans l'intervalle $[0, f_e]$, cette dérivée s'annule lorsque :

- Soit $\sin(2\pi fT_e)$ s'annule, c'est à dire pour $f = 0$ et $f = f_e/2$.
- Soit $2(1 + r_1^2) \cos(\theta_1) - 2r_1 \cos(2\pi fT_e)$ s'annule, c'est à dire pour une fréquence f_R telle que :

$$\cos(2\pi f_R T_e) = \frac{(1 + r_1^2) \cos(\theta_1)}{2r_1} = -\frac{(b_0 + b_2)b_1}{4b_2 b_0}$$

Ce dernier cas n'est possible que si :

$$\left| \frac{(1 + r_1^2) \cos(\theta_1)}{2r_1} \right| \leq 1$$

ou, ce qui revient au même :

$$\left| \frac{(b_0 + b_2)b_1}{4b_2 b_0} \right| \leq 1$$

D'autre part, inversement au cas des FIR la dérivée de $|H(f)|$ par rapport à f est positive pour $f < f_R$ puis négative pour $f > f_R$. La fréquence f_R , quand elle existe, correspond donc forcément à un maximum de $|H(f)|$. Une cellule IIR d'ordre deux ne peut donc présenter qu'une **résonance**, alors qu'une cellule FIR d'ordre deux ne peut présenter qu'une antirésonance. La fréquence f_R est appelée fréquence de résonance.

Si r_1 est proche de 1, la fréquence f_R est proche de $\frac{\theta_1 f_e}{2\pi}$. Il y a égalité si $r_1 = 1$.

La valeur de $|H(f)|$ pour $f = f_R$ vaut :

$$|H(f_R)| = \frac{1}{|(1 - r_1)^2 \sin \theta_1|}$$

Si $r_1 = 1$, la cellule est un résonateur pur ou oscillateur, à la limite de stabilité (cette stabilité étant définie par le fait qu'à une entrée bornée correspond une sortie bornée).

Soit B_R la largeur de bande à mi-hauteur de cette antirésonance :

$$B_R = |f_+ - f_-|$$

où f_- et f_+ sont les fréquences pour lesquelles $|H(f)|^2 = |H(f_R)|^2 / 2$.

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_+ T_e) &= \cos(2\pi f_R T_e) - \frac{(1 - r_1^2) \sin \theta_1}{2r_1} \\ \cos(2\pi f_- T_e) &= \cos(2\pi f_R T_e) + \frac{(1 - r_1^2) \sin \theta_1}{2r_1} \end{aligned}$$

D'où l'on déduit (comme pour les FIR d'ordre 2) que, pour $r_1 \approx 1$:

$$B_R \approx \frac{(1 - r)}{\pi} f_e$$

5.6.3 Inversion du module des zéros, polynôme réciproque de $H(z)$

La cellule IIR d'ordre deux ayant des pôles de même argument et de module $1/r_1$ présentera une résonance pour la même fréquence f_R . En fait cette cellule a une fonction de transfert $H_r(z)$ en z^{-1} qui est le polynôme réciproque de $H(z)$.

$$H_r(z) = \frac{1}{a_2 + a_1 z^{-1} + z^{-2}} = z^{-2} H(z^{-1})$$

$H(f)$ et $H_r(f)$ ont le même module mais :

$$\begin{aligned} \Phi_r(f) &= -4\pi f T_e - \Phi(f) \\ \tau_r(f) &= 2T_e - \tau(f) \end{aligned}$$

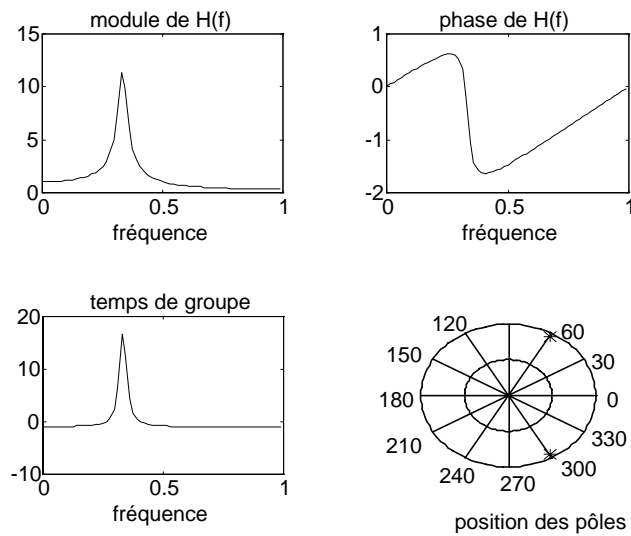
5.6.4 Exemple

Les figures suivantes représentent la fonction de transfert $H(f)$ en module, en phase, en temps de propagation de groupe ainsi que la position des zéros de $H(z)$, pour les valeurs : $r_1 = 0.95$ $\theta_1 = \pi/3$, ce qui correspond à :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.95z^{-1} + 0.9025z^{-2}}$$

La fréquence de résonance f_R est telle que :

$$2\pi f_R T_e = 1.0464, \text{ ce que l'on peut comparer à } \theta_1 = \frac{\pi}{3} = 1.0472$$



5.6.5 Changement du signe du coefficient a_1 , changement de z en $-z$

Si l'on change le signe de a_1 , le filtre change de type, les valeurs de $H(0)$ et de $H(f_e/2)$ sont inversées. Dans l'exemple ci-dessus, le filtre est plutôt un passe-bas (dans le sens que $H(f=0) > H(f=f_e/2)$). Si on remplace $a_1 = -0.95$ par $a_1 = 0.95$, le filtre résultant est un passe-haut. Changer le signe de a_1 revient à remplacer θ_1 par $\pi - \theta_1$. Si les angles des zéros (en valeur absolue) sont inférieurs à $\pi/2$ le filtre est un passe bas. Si les angles des zéros (en valeur absolue) sont supérieurs à $\pi/2$ le filtre est un passe haut. Changer le signe de a_1 , revient à remplacer z par $-z$. Et comme on l'a vu précédemment pour la cellule FIR d'ordre 2, cela revient à effectuer une translation de $-f_e/2$ dans le domaine fréquentiel.

6 Structures des filtres numériques

Il n'est pas dans l'objectif de ce document de présenter de façon très approfondie les structures possibles d'implantation de filtres numériques. On se limite aux approches les plus classiques.

6.1 Structures directes

Les structures directes correspondent à des implantations dans lesquelles les valeurs des coefficients de l'équation de récurrence interviennent explicitement. Pour des raisons de simplicité, on se limite ici à l'ordre 2, mais les concepts présentés s'étendent sans difficulté à un ordre quelconque. Soit l'équation de récurrence d'un filtre numérique IIR d'ordre 2 :

$$y_n = \sum_{k=0}^2 b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^2 a_k y_{n-k}$$

Pour implanter ce filtre, il suffit que le système de traitement soit capable d'effectuer des multiplications, des additions et des retards ou mise en mémoire. Les retards dans le cas d'un système temps réel peuvent être mis en oeuvre par l'intermédiaire de registres à décalage cadencés à la fréquence d'échantillonnage des signaux.

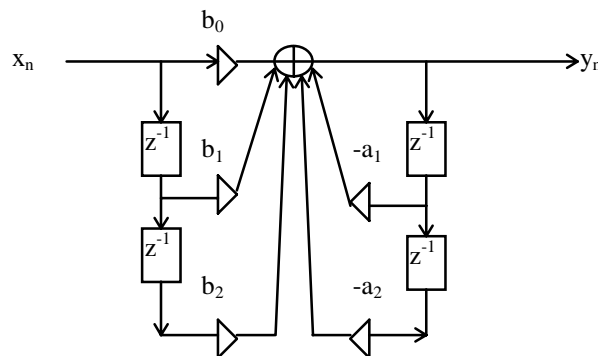
6.2 Structures directes non canoniques

La structure directe la plus simple consiste à mémoriser 4 échantillons : les 2 derniers échantillons des suites d'entrée et de sortie ($x_{n-1}, x_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-2}$) et, pour chaque échantillon x_n de la suite d'entrée effectuer les opérations suivantes, pour calculer l'échantillon correspondant de la suite de sortie y_n :

- effectuer les produits des 3 valeurs x_n, x_{n-1}, x_{n-2} par les coefficients du numérateur de $H(z)$ b_0, b_1, b_2 ,

- effectuer les produits des 2 valeurs y_{n-1}, y_{n-2} par les coefficients du dénominateur de $H(z)$ a_1, a_2 ,
- puis cumuler les 5 produits, avec un signe positif pour les coefficients b_i et un signe négatif pour les coefficients a_i
- enfin mettre à jour les mémoires $x_{n-1}, x_{n-2}, y_{n-1}, y_{n-2}$ pour préparer le calcul de la sortie suivante y_{n+1}

La figure suivante représente cette structure directe :



6.3 structures directes canoniques DN et ND

La structure directe présentée précédemment n'est pas canonique, dans le sens où elle n'utilise pas un nombre minimum de mémoires.

Il est possible de réaliser le même filtre d'ordre 2 avec seulement 2 cases mémoire. Les structures canoniques DN et ND sont des structures directes utilisant explicitement les coefficients a_i, b_i et ne nécessitant que 2 cases mémoire pour 1 filtre d'ordre 2.

Structure canonique DN

La structure canonique DN réalise le filtre en calculant d'abord la sortie du filtre de fonction de transfert $\frac{1}{D(z)}$ puis la sortie du filtre de fonction de transfert $N(z)$. D'où le nom de structure DN.

On peut écrire :

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)}X(z)$$

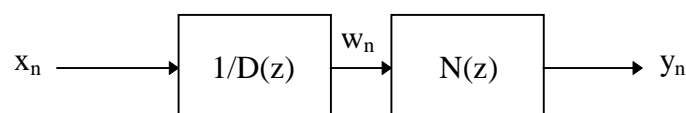
$$Y(z) = \frac{X(z)}{D(z)}N(z)$$

Soit :

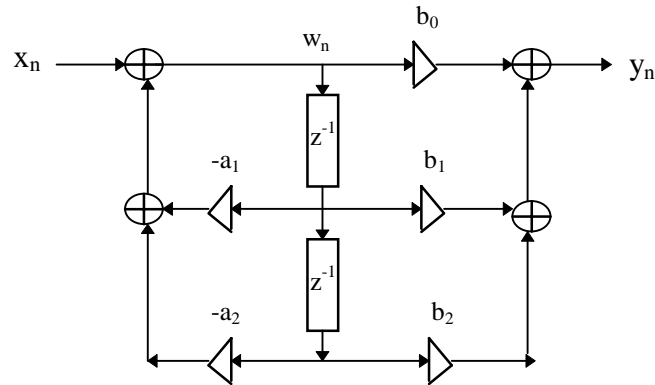
$$W(z) = \frac{X(z)}{D(z)}$$

$$Y(z) = W(z)N(z)$$

Ces relations peuvent se résumer par le schéma suivant :



La structure canonique DN correspond finalement à l'implantation suivante :



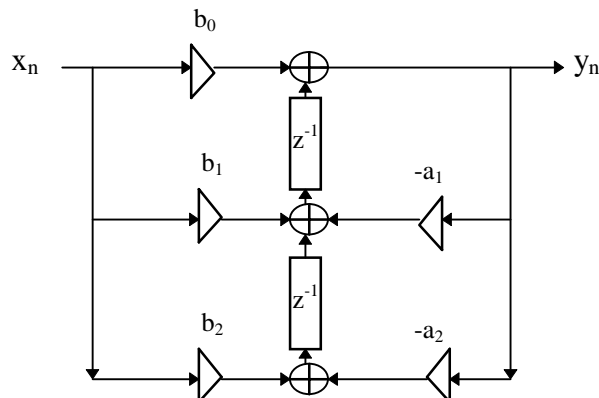
Structure canonique ND

La structure canonique ND est la structure duale (au sens de la théorie des graphes) de la structure DN. Elle doit son nom au fait que les coefficients du numérateur b_i interviennent en amont des coefficients du dénominateur a_i .

Les équations qui caractérisent cette structure sont :

$$\begin{aligned} u_n &= b_1 x_n - a_1 y_n \\ v_n &= b_2 x_n - a_2 y_n \\ y_n &= b_0 x_n + u_{n-1} + v_{n-2} \end{aligned}$$

La structure canonique ND correspond finalement à l'implantation suivante :



Cette structure est la plus fréquemment utilisée dans les circuits intégrés spécifiques pour le filtrage numérique.

6.4 Structures décomposées

Les structures décomposées n'utilisent pas explicitement les coefficients a_i, b_i dans l'implantation du filtre. elles se caractérisent par une décomposition de la fonction de transfert $H(z)$ de degré N , en éléments de degré plus faible, 1 ou 2 en général.

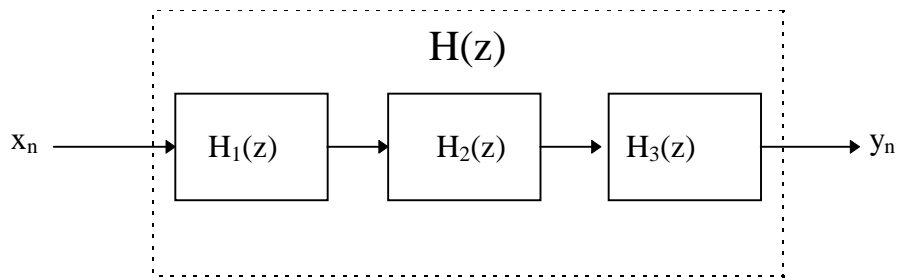
Ces structures peuvent permettre d'obtenir de meilleures performances pour une implantation en précision finie, en terme de sensibilité à la quantification des coefficients ou en terme de bruit de calcul.

6.4.1 Structures cascade

La structure cascade se caractérise par une décomposition de $H(z)$ en un produit de termes $H_i(z)$ d'ordre 1 ou 2, selon que les pôles sont réels ou complexes. La fonction globale de filtrage $H(z)$ est réalisée par une cascade de cellules de filtrage $H_i(z)$ d'ordre 1 ou 2.

$$\begin{aligned} H(z) &= \prod_{i=0}^K H_i(z) \quad \text{avec} \\ H_i(z) &= \frac{b_{i,0} + b_{i,1}z^{-1} + b_{i,2}z^{-2}}{1 + a_{i,1}z^{-1} + a_{i,2}z^{-2}} \end{aligned}$$

Les cellules $H_i(z)$ est implantée sous une forme canonique DN ou ND. La figure suivante représente l'implantation cascade d'un filtre d'ordre 5, dont le dénominateur possède 1 pôle réel et 2 pôles complexes conjugués.



Pour une fonction $H(z)$ donnée, il existe plusieurs implantations cascade possibles, selon la façon dont on groupe les pôles et les zéros pour former les cellules $H_i(z)$ et selon la façon dont on ordonne ces cellules. Ainsi pour la fonction $H(z)$ d'ordre 5 du schéma précédent, existe-t-il 12 réalisations cascade différentes (si on impose de grouper le zéro réel avec le pôle réel). Ces réalisations ne sont pas équivalentes en terme de performances pour une implantation en précision finie.

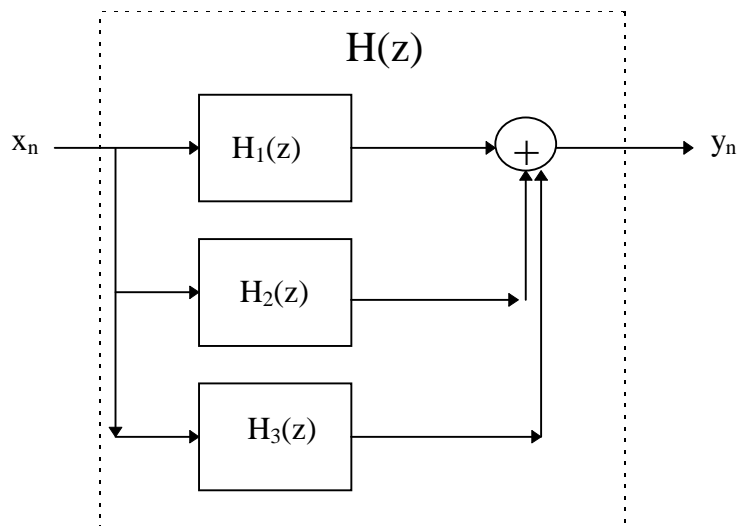
6.4.2 Structures parallèles

La structure parallèle se caractérise par une décomposition de $H(z)$ en une somme d'éléments simples $H_k(z)$ d'ordre 1 ou 2, selon que les pôles sont réels ou complexes. La fonction globale de filtrage $H(z)$ est réalisée par une somme de sortie de cellules de filtrage $H_k(z)$ d'ordre 1 ou 2, attaquées par la même entrée x_n .

$$H(z) = \sum_{k=0}^L H_k(z) \quad \text{avec}$$

$$H_k(z) = \frac{b_{k,0} + b_{k,1}z^{-1}}{1 + a_{k,1}z^{-1} + a_{k,2}z^{-2}}$$

Les cellules $H_k(z)$ est implantée sous une forme canonique DN ou ND. La figure suivante représente l'implantation cascade d'un filtre d'ordre 5, dont le dénominateur possède 1 pôle réel et 2 pôles complexes conjugués.



Les structures cascade et parallèles ont des performances assez proches pour une implantation en précision finie. Toutefois, on peut remarquer que la structure parallèle ne permet pas aussi facilement que la structure cascade conserver les zéros de transmission après quantification des coefficients des cellules $H_k(z)$.

La structure cascade se prête bien à une implantation séquentielle. La structure parallèle permet une implantation parallèle des opérateurs de calcul conduisant à une plus grande vitesse d'exécution.

Ils existent de nombreuses autres structures décomposées, comme la structure treillis, ou les filtres d'ondes. Ces structures ne seront pas développées ici. La théorie de la représentation d'état permet de comprendre le passage d'une structure à une autre et de comparer ces structures.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1 : On considère un système linéaire discret stationnaire de réponse impulsionnelle:

$$h_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq 3 \quad \text{et } h(n)=0 \text{ ailleurs}$$

- Donnez l'équation aux différences permettant de calculer la sortie $y(n)$ pour une entrée quelconque $x(n)$.
- Calculez la sortie du filtre pour $x(n) = a^n$, pour $a=0.5$, $0 \leq n \leq 3$ et $x(n)=0$ ailleurs.
- Calculez la sortie stationnaire correspondant à l'entrée $x(n) = \cos(2\pi n/4)$.

Exercice 2 : Soit les systèmes de fonction de transfert :

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 1.16z^{-1} + 0.92z^{-2}}$$

$$H_2(z) = 1 - 1.16z^{-1} + 0.92z^{-2}$$

Donnez les équations aux différences correspondantes, et calculez les réponses impulsionnelles associées.

Exercice 3 : On considère le système d'équation aux différences :

$$y(n] = x(n) + y(n-1) - 0.5y(n-2)$$

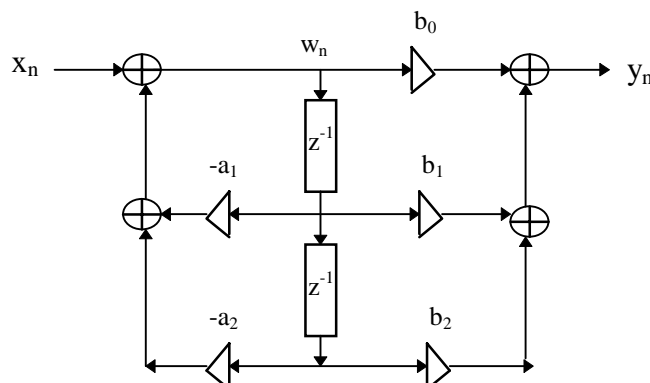
- Calculez la transformée en z $Y(z)$ monolatérale de $y(n)$, et démontrez la relation:

$$Y(z) = H(z)X(z) + P(z)$$

où $P(z)$ dépend des conditions initiales. On posera $y(-1)=a$ et $y(-2)=b$.

- Calculez les pôles et les zéros de $H(z)$. Décomposez $H(z)$ en une somme de deux fractions rationnelles du premier ordre. Déduisez en la réponse impulsionnelle du système (vous supposerez que celui-ci est causal). Le système est-il stable?
- Donnez la sortie $y(n)$ du système soumis à l'entrée $x(n) = \exp(j2\pi f_0 n T_e)$, pour $n \geq 0$ et 0 si $n \leq 0$. Vous commencerez par calculer la TZ $X(z)$ de $x(n)$, puis vous rechercherez la transformée inverse de $H(z)X(z)$ (on supposera les conditions initiales nulles).
- Donnez le module de la réponse en fréquence $H(f)$. Calculez la valeur de la fréquence de résonance et tracez l'allure de la réponse en fréquence.
- Donnez une structure d'implantation de ce filtre.

Exercice 4 : Donnez l'équation aux différences réalisée par la structure suivante. Vous utiliserez pour cela la variable intermédiaire $w(n)$.



Problème I :

Question 1 : On considère l'équation aux différences

$$y(n) = x(n-1) + x(n) + x(n+1).$$

- 1-a Mettre cette équation aux différences sous la forme d'une convolution discrète, donnez la réponse impulsionnelle $h(n)$ du filtre d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$.
- 1-b Donnez la fonction de transfert $H(z)$ de ce filtre.
- 1-c Donnez la réponse en fréquence $H(f)$. Vous pourrez chercher à faire apparaître un cosinus.
- 1-d Déduisez en le module de $H(f)$ et sa phase $\phi(f)$. Représentez $|H(f)|$, en précisant clairement le domaine de variation de f .

Question 2 : Si l'entrée est

$$x(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \phi), \text{ avec } f_0 = 1/3,$$

quelle est la sortie du filtre ?

Question 3 : L'entrée est maintenant un bruit blanc à temps discret, centré, d'autocorrélation

$$\begin{cases} R_{XX}(k) = P_B & \text{si } k = 0, \\ R_{XX}(k) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 3-a Quelle est la moyenne statistique m_Y de la sortie $y(n)$ du filtre ?
- 3-b Calculez l'autocorrélation de la sortie $R_{YY}(k)$.

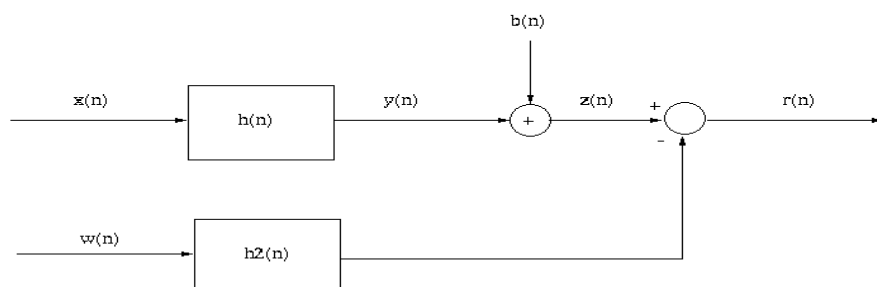
Question 4 : La sortie du filtre $y(n)$ est maintenant bruitée par un bruit additif $b(n)$, centré et d'autocorrélation $R_{BB}(k)$, indépendant de $x(n)$, et par conséquent de $y(n)$

$$z(n) = y(n) + b(n).$$

On dispose par ailleurs d'un signal de référence (sortie d'un capteur) $w(n)$, centré, corrélé à $b(n)$ et indépendant de $y(n)$. On peut donc interpréter $b(n)$ comme la sortie d'un filtre $h_2(n)$ d'entrée $w(n)$:

$$b(n) = (h_2 * w)(n).$$

- 4-a Donnez la relation qui relie l'intercorrélation $R_{BW}(k)$, l'autocorrélation $R_{WW}(k)$ et la réponse impulsionnelle $h_2(k)$ (cours).
- 4-b Calculez l'intercorrélation R_{ZW} , et montrez que si $w(n)$ est blanc centré de variance 1, on en déduit alors la réponse impulsionnelle $h_2(n)$.
- 4-c Expliquez alors à quoi sert le dispositif



et donnez l'expression de $r(n)$.

4-d On a considéré ci-dessus que $w(n)$ était un bruit blanc. Si tel n'est pas le cas, et si sa densité spectrale de puissance $S_{WW}(f)$ est connue, montrez que le signal $w'(n)$ obtenu comme la sortie d'un filtre de fonction de transfert en fréquence $G(f) = 1/\sqrt{S_{WW}(f)}$ (on notera $g(n)$ sa réponse impulsionnelle) est un bruit blanc de variance unité. Comment faut-il alors modifier le dispositif précédent ?

Index

<p>Échantillonnage, 33, 34 Théorème de Shannon, 34</p> <p>Aliasing, 48</p> <p>Anticausalité, 102</p> <p>Bruit blanc, 79 à temps discret, 87</p> <p>Causalité, 102, 107</p> <p>Convolution, 21, 21 Convolution graphique, 24 Définition, 22 Relation de PARSEVAL, 26 Théorème de PLANCHEREL, 25 Théorème de PLANCHEREL-PARSEVAL, .. 26</p> <p>Convolution circulaire, 57</p> <p>Convolution discrète, 57 Convolution circulaire, 57</p> <p>Convolution rapide, 68</p> <p>Densités spectrale, 28 (déterministes) , 28</p> <p>Densité spectrale de puissance, 84, 87</p> <p>Ergodisme, 74</p> <p>Fenêtres de pondération, 51 Fenêtre cosinoïde, 53 Fenêtre de Blackman, 54 Fenêtre de Dolph-Chebyshev, 55 Fenêtre de Gauss, 54 Fenêtre de Hamming, 54 Fenêtre de Hanning, 53 Fenêtre de Kaiser, 55 Fenêtre parabolique, 52 Fenêtre rectangulaire, 52 Fenêtre triangulaire, 52</p> <p>FFT, 59 Algorithme de Cooley-Tukey, 59 Bit reversal, 64 Convolution rapide, 68 Entrelacement fréquentiel, 59, 62 Entrelacement temporel, 59 Papillon, 60, 61, 63, 64</p> <p>Filtrage adapté, 88</p> <p>Filtres, 21, 21 Causalité, 23 Définition, 21</p>	<p>Fonction de transfert, 25</p> <p>Fonctions propres, 25</p> <p>Réponse impulsionnelle, 22</p> <p>Stabilité, 23</p> <p>Filtres Numériques, 97, Réponse impulsionnelle 98 Atténuation, 100 Convolution discrète, 99 Déphasage, 101 Fonction de transfert en fréquence, 100 Fonction de transfert en z, 101 Invariance en temps, 98 Linéarité, 98 Réponse en fréquence, 99 Retard de groupe, 101 Transformée en z, 101</p> <p>Filtres numériques Étude des extréma, 112 Antirésonance, 113 Causalité, 107 Cellule IIR D'ordre 2, 117 Cellule IIR ordre 1, 115 Cellules élémentaires, 108 Extréma de la cellule d'ordre 2, 118 FIR, 104 Fréquence de résonance, 118 IIR, 104 Largeur de bande à la résonance, 113 Stabilité, 107 Structures, 120 Structures canoniques, 121 Structures cascade, 122 Structures décomposées, 122 Structures directes, 120 Structures DN, 121 Structures ND, 122 Structures parallèles, 123 Zéros de transmission, 108</p> <p>FIR, 104 Étude des extréma, 112 Antirésonance, 113 FIR D'ordre 1, 110 FIR dd'ordre 2, 111</p> <p>Fonction de covariance, 72</p> <p>Fonction de transfert en z, 101</p> <p>Fonctions de corrélation, 26, 77 (déterministes) $R_{xx}(0)$, 28 (déterministes) Définition, 27</p>
--	---

(déterministes) Introduction,	26	Théorème de la convolution,	103
(déterministes) Propriétés,	27	Transformée de FOURIER, 7	
Définitions (signaux aléatoires),	77	Définitions,	7
Relation convolution-corrélation,	28	Lien avec les séries de FOURIER,	18
Formule d'interpolation,	37	Transformée de Fourier Discrète	
Formule de Poisson,	36	Théorème de la convolution,	58
Formule des interférences,81,	84	Théorème de Parseval,	56
IIR,	104	Théorème du retard circulaire,	58
Étude des extréma de la cellule d'ordre2		Visualisation,	56
fin, 118		Zero-padding,	56
Cellule d'ordre 1,	115	Transformée de Fourier discrète	
Cellule d'ordre 2,	117	Fenêtres de pondération ,	51
Fréquence de résonance,	118	FFT,	59
Impulsion de DIRAC,	15, 15	Inversion de la TFD,	48
Applications,	16	Recouvrement de spectre,	48
Définition,	15	Transformée de Fourier rapide,	59
Moments,72,	74	transformée de Fourier discrète,	47
Quantification,33,	39	Transformée de Fourier rapide,	59
Erreur de quantification,	40	Algorithme de Cooley-Tukey,	59
Logarithmique,	42	Bit reversal,	64
Non uniforme,	42	Convolution rapide,	68
uniforme,	40	Entrelacement fréquentiel,59,	62
R'esidu,	106	Entrelacement temporel,	59
Réponse impulsionnelle,	98	Papillon,61,63, 64	
Résidu		Transformée en z,	101, 102
Théorème des résidus,	106	Domaine de convergence,	102
Recouvrement de spectre,	48	Inversion,	104
Relations d'incertitude,	20	Monolatérale,	102
Retard circulaire,	58	Série de Laurent,	101
Réponse impulsionnelle,	22	Théorème de la valeur initiale et de la valeur	
Signal aléatoire,	71	finale,	103
Caractérisation à l'ordre 2,	72	Théorème de Parseval,	103
Description,	71		
Filtrage,	80		
gaussien,	75		
à temps discret,	77		
Signaux aléatoires			
Ergodisme,	74		
Stationnarité,	73		
Stabilité,	107		
Stationnarité,	73		
Systèmes linéaires discrets invariants en temps, 98			
TFD,	47		
Théorème de Parseval,	56		
Théorème de Shannon			
Formule d'interpolation,	37		
Théorème de Shannon,	34		
Transformée en z			
Théorème du retard,	103		
Transformé en z			