

SIGNAUX ALÉATOIRES

J.-F. BERCHER

École Supérieure d'Ingénieurs en Électrotechnique et Électronique

Novembre 2001 – version 0.8

CHAPITRE I

Table des matières

I	Table des matières	3
I	Signaux aléatoires	5
1	Description d'un signal aléatoire	5
1.1	Description complète	5
1.2	Description partielle	6
1.2.1	Description à un instant	6
1.2.2	Description à deux instants	6
2	Propriétés fondamentales	7
2.1	Stationnarité	7
2.2	Ergodisme	8
2.3	Le syndrome gaussien	9
2.4	Signaux aléatoires à temps discret	11
3	Propriétés énergétiques des signaux aléatoires stationnaires de puissance moyenne finie	11
3.1	Analyse dans le domaine temporel	11
3.1.1	Définitions et propriétés	11
3.1.2	Notion de bruit blanc	13
3.2	Transformation des fonctions aléatoires par filtrage	14
3.2.1	Rappel	14
3.2.2	Transformation de la moyenne	14
3.2.3	Théorème, ou formule des interférences	15
3.3	Analyse dans le domaine fréquentiel	17
3.4	La représentation de Cramér	20
3.5	Bruit blanc à temps discret	21
4	Un exemple d'application : le filtrage adapté	21
4.1	Contexte	21
4.2	Maximisation du rapport signal-à-bruit	21
4.3	Approche probabiliste	23
4.4	Notes sur le choix du signal test, signaux pseudo-aléatoires	24
	Exercices et problèmes	26

CHAPITRE I

SIGNAUX ALÉATOIRES

DE LA MÊME MANIÈRE qu'une variable aléatoire est un ensemble de valeurs caractérisé par une loi de probabilité, on appellera *signal aléatoire*, ou *processus aléatoire* un ensemble de *fonctions* auquel on adjoint une loi de probabilité.

Existe-il des signaux naturels qui soient intrinsèquement aléatoires ? La plupart des phénomènes non-quantiques peuvent être décrits à l'aide d'équations de la physique : le jeu de pile ou face, si l'on connaît les caractéristiques physiques de la pièce, l'impulsion donnée, la densité et la composition de l'air, la température, la pression atmosphérique, la gravité locale, est un jeu dont le résultat est parfaitement prévisible. De même pour le tirage du loto. Simplement le système dépendant d'un trop grand nombre de variables et de paramètres devient trop compliqué à décrire. D'autres exemples sont le signal de parole, l'électromyogramme ou la mesure de l'activité cérébrale, dont on peut espérer qu'ils ne résultent pas de « tirages au hasard », sont caractérisés comme des signaux aléatoires. D'autres signaux sont impossibles à caractériser « *a priori* ». Il s'agit en particulier d'un message transmis sur une ligne téléphonique (ou autre) : du point de vue du récepteur, ce signal est aléatoire jusqu'à sa réception. En effet si ce signal était déjà connu du récepteur, son contenu informationnel serait nul et il serait inutile de le transmettre. Ainsi, on pourra modéliser comme des signaux aléatoires les signaux dont le processus de production est trop compliqué à décrire, ou méconnu, ou des signaux pour lesquels l'aléa provient de la propre incertitude de l'observateur. À partir d'une modélisation probabiliste, il faut alors espérer que l'on pourra aboutir à une caractérisation intéressante et à des outils de traitement qui pourront permettre d'extraire de l'information des signaux aléatoires.

Notation :

On notera $X(t, \omega)$ un signal aléatoire X . Il s'agit d'un ensemble de fonctions de la variable t , cet ensemble étant indexé par la variable ω . Un signal aléatoire est une quantité bivariée, dépendant à la fois du temps t et de l'épreuve ω . Lorsque l'épreuve est fixée, par exemple $\omega = \omega_i$, on obtient une *réalisation* du processus aléatoire que l'on notera $X(t, \omega_i)$ ou plus simplement $x_i(t)$. Lorsque la variable t est fixée, le processus aléatoire se réduit alors à une simple variable aléatoire. En considérant le processus pour $t = t_i$, on obtient ainsi une variable aléatoire $X(t_i, \omega)$, que l'on notera $X_i(\omega)$, ou X_i . Enfin, on notera x_i les valeurs prises par la variable aléatoire X_i .

1 Description d'un signal aléatoire

Les signaux aléatoires pourront être caractérisés par le biais de deux types de description : une description complète qui permet de caractériser complètement le processus, mais qui nécessite une connaissance énorme, et une caractérisation partielle, à partir des moments du processus aléatoire.

1.1 Description complète

$X(t, \omega)$ est connu si $\forall t_1, t_2, \dots, t_k$, et $\forall k$, on connaît la loi conjointe

$$P_{X_1, X_2, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

où X_1, X_2, \dots, X_k sont les variables aléatoires associées aux k instants : $X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_k, \omega)$. En fait, ceci est équivalent à dire que l'on connaît $X(t, \omega)$ si l'on connaît les lois de toutes les variables aléatoires

$X(t_i, \omega)$, ainsi que toutes les interactions entre ces variables, et ceci $\forall i \dots$. La connaissance à avoir est donc gigantesque, et le plus souvent inaccessible, et l'on devra se contenter d'une *description partielle*.

1.2 Description partielle

1.2.1 Description à un instant

On dit que $X(t, \omega)$ est connu à un instant, si, $\forall t_1$, on connaît la loi de la variable aléatoire $X(t_1, \omega)$. Celle-ci est simplement une variable aléatoire au sens habituel, que l'on peut en général (si ceux-ci existent et hors quelques cas de figures exceptionnels) caractériser à l'aide des *moments*.

Moments : on notera

$$m_X(t_1) = E \{X(t_1, \omega)\} = \int x_1 p_{X_1}(x_1) dx_1 \quad (\text{I.1})$$

$$\vdots$$

$$m_X^{(n)}(t_1) = E \{X(t_1, \omega)^n\} = \int x_1^n p_{X_1}(x_1) dx_1 \quad (\text{I.2})$$

Rappelons avec force que $E \{ \}$ désigne l'espérance mathématique, que l'intégrale est prise sur le domaine de variation de l'« amplitude » de X_1 , c'est-à-dire de $X(t, \omega)$ considéré à l'instant fixé t_1 . L'écriture

$$E \{X(t, \omega)\} = \int X(t) p(X(t, \omega)) dt,$$

(trop) souvent rencontrée dans des copies, indique une incompréhension attristante et constitue une erreur impardonnable.

1.2.2 Description à deux instants

On dit que $X(t, \omega)$ est connu à deux instants, si, $\forall t_1, t_2$, on connaît la loi conjointe des variables aléatoires $X(t_1, \omega)$ et $X(t_2, \omega)$:

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \quad \text{est connue } \forall t_1, t_2.$$

La connaissance à deux instants nécessite donc de connaître le *lien statistique* entre $X(t_1, \omega)$ et $X(t_2, \omega)$.

Notion de covariance :

On appelle

$$C_X(t_1, t_2) = E \{X(t_1)X(t_2)^*\} = \int \int x_1 x_2^* p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

fonction de covariance.¹ Il s'agit dans le cas général d'une fonction bivariée qui permet de quantifier un certain « lien statistique » entre les variables aléatoires X_1 et X_2 . Dans la mesure où l'argument de l'espérance mathématique fait intervenir le produit de deux variables aléatoires, et est donc homogène à un « carré », on parlera de caractérisation à l'ordre 2.

Remarque : En général, on ne peut pas exprimer la distribution conjointe $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ en fonction des distributions $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$, sauf dans le cas où les variables sont *indépendantes*. On a alors

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2),$$

et la fonction de covariance s'écrit simplement

$$C_X(t_1, t_2) = E \{X(t_1)X(t_2)^*\} = E \{X(t_1)\} E \{X(t_2)^*\},$$

soit $C_X(t_1, t_2) = m_X(t_1) m_X(t_2)^*$.

Lorsqu'un tel signal est *centré*, c'est-à-dire de valeur moyenne nulle, alors $C(t_1, t_2) = 0$, pour $t_1 \neq t_2$. Ce type de signal aléatoire est appelé *bruit blanc* (au sens strict).

¹En toute rigueur, il faudrait réserver le terme de *covariance* à la formule précédente appliquée à des signaux *centrés*, pour lesquels on a alors simplement une extension de la notion de variance d'une variable à deux variables aléatoires. Il s'agit ici d'une *fonction* puisque ces deux variables dépendent respectivement de t_1 et t_2 . Lorsque les signaux ne sont pas centrés, on pourrait parler de moment d'ordre 2 croisé.

2 Propriétés fondamentales

2.1 Stationnarité

La stationnarité est une propriété particulièrement importante pour l'analyse des signaux aléatoires.

Définition 1 On dit qu'un signal aléatoire est stationnaire si ses propriétés statistiques sont invariantes par translation dans le temps.

En ce qui concerne la description complète, ceci se traduit par

$$P_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)} = P_{X(t_1 - \tau), X(t_2 - \tau), \dots, X(t_k - \tau)},$$

et si $\tau = t_k$,

$$P_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)} = P_{X(t_1 - t_k), X(t_2 - t_k), \dots, X(0)}.$$

La distribution conjointe ne dépend plus alors que de $k - 1$ paramètres, au lieu des k paramètres initiaux. Ceci va se prolonger à la description partielle : les moments, qui dépendent dans le cas général de l'instant considéré, deviennent des quantités indépendantes du temps dans le cas stationnaire. La fonction de covariance $C_X(t_1, t_2)$ devient quant-à-elle une quantité dépendant uniquement de l'écart entre t_1 et t_2 .

Pour la description partielle à un instant, on a ainsi

$$P_{X(t_1)} = P_{X(t_1 - \tau)} = \dots = P_{X(0)}.$$

Toutes les variables $X(t_i, \omega)$ possèdent ainsi la même loi à un instant. Par suite,

$$E \{X(t_1)^n\} = E \{X(t_1 - \tau)^n\} = \dots = m_X^{(n)}.$$

On en déduit donc que tous les moments sont indépendants du temps.

À deux instants, la distribution conjointe ne dépend que de l'écart entre les deux instants et non des instants eux-mêmes :

$$P_{X(t_1), X(t_2)} = P_{X(t_1 - t_2), X(0)}.$$

On en déduit donc que

$$C_X(t_1, t_2) = E \{X(t_1)X(t_2)^*\} = E \{X(t_1 - t_2)X(0)^*\} = E \{X(0)X(t_2 - t_1)^*\} = E \{X(t)X(t - \tau)^*\},$$

avec t quelconque et $\tau = t_1 - t_2$. La covariance devient une fonction de corrélation, qui ne dépend que de l'écart de temps. On pose

$$R_X(\tau) = E \{X(t)X(t - \tau)^*\}.$$

On peut vérifier la stationnarité en calculant tous les moments, à tous les ordres. Ceci n'est pas forcément utilisable, et on se contentera souvent d'étudier une stationnarité *au sens faible* (par opposition à la stationnarité *stricte*), en définissant une stationnarité à l'ordre 1 — le moment d'ordre 1 est indépendant du temps, et une stationnarité à l'ordre 2 — moment d'ordre 1 et fonction de covariance invariants par translation dans le temps.

Exercice 1 : Si

$$X(t, \omega) = A(\omega) \cos(2\pi f_0 t),$$

où $A(\omega)$ est une variable gaussienne centrée et de variance σ^2 , vérifiez que $X(t, \omega)$ est stationnaire à l'ordre 1 mais pas à l'ordre 2.

2.2 Ergodisme

L'ergodisme est une propriété très souvent employée, mais non vérifiable, à l'exception de quelques domaines de la physique. En traitement du signal, l'ergodisme sera le plus souvent un *postulat*, nécessaire pour travailler.

On considère un signal aléatoire $X(t, \omega)$. On note $x_i(t)$ les différentes réalisations de ce signal. On définit

$$\langle x_i^n \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} x_i(t)^n dt,$$

la *moyenne temporelle* prise sur la réalisation i , durant toute son histoire. De la même manière, on définit les *moyennes temporelles* du signal aléatoire $X(t, \omega)$ par

$$\langle X(t, \omega)^n \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)^n dt.$$

Dans le cas général, cette moyenne **est** une variable aléatoire, $\mu^{(n)}(\omega)$ dont les réalisations sont les $\langle x_i^n \rangle$. De la même façon, on définit des moyennes temporelles croisées, comme

$$\langle X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) dt.$$

Définition 2 Le signal $X(t, \omega)$ est dit *ergodique* si les moyennes temporelles sont des nombres certains.

Cette propriété entraîne donc, puisque $\langle \cdot \rangle$ est une variable certaine, que toutes les « réalisations » prennent la même valeur. En ce qui concerne les moments, on a ainsi $\langle X(t, \omega)^n \rangle$ qui est un nombre certain, ce qui entraîne $\langle x_1^n \rangle = \langle x_2^n \rangle = \dots = \langle x_k^n \rangle$. On notera $\mu^{(n)}$ ce nombre.

Il est d'une grande importance pratique d'avoir à la fois stationnarité et ergodisme. En effet, dans ce cas de figure, les moyennes d'ensemble (les espérances mathématique) et les moyennes temporelles sont égales.

Exemple (moments).

On a

$$\langle X(t, \omega)^n \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)^n dt.$$

Si le signal aléatoire est ergodique, alors $\langle X(t, \omega)^n \rangle$ est un nombre certain et

$$E \{ \langle X(t, \omega)^n \rangle \} = \langle X(t, \omega)^n \rangle = \mu^{(n)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mu^{(n)} = \langle X(t, \omega)^n \rangle &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} E \{ X(t, \omega)^n \} dt, \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} E \{ X(t, \omega)^n \} dt, \\ &= E \{ X(t, \omega)^n \} = m_X^{(n)}, \end{aligned}$$

où la dernière ligne a été écrite en utilisant le fait que $E \{ X(t, \omega)^n \}$ ne dépend pas du temps si $X(t, \omega)$ est stationnaire.

Dans le cas stationnaire et ergodique, on a donc

$$E \{ X(t, \omega)^n \} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)^n dt,$$

ce qui signifie que l'on peut calculer les espérances mathématiques en effectuant des moyennes temporelles sur des réalisations quelconques du signal. Ceci est d'une grande importance pratique, car il est rare que l'on dispose de plusieurs réalisations du processus (et encore moins d'une infinité), et de sa distribution de probabilité. Notons cependant qu'il est au moins aussi rare que l'on dispose de réalisations du signal de $-\infty$ à $+\infty$;

on ne pourra donc pas calculer exactement la valeur des moyennes par la formule précédente. On se contentera d'*approcher* le résultat par des moyennes temporelles sur la durée où est connu une réalisation du processus. On parle alors d'*estimation*.

Exemple (covariance).

On a

$$\langle X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) dt.$$

Si le signal est ergodique, il vient

$$\langle X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} E \{X(t, \omega)X(t - \tau, \omega)\} dt,$$

et par stationnarité,

$$E \{X(t, \omega)X(t - \tau, \omega)\} = R_X(\tau)$$

est indépendant du temps t . Dans ce cas, on obtient

$$\langle X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) \rangle = E \{X(t, \omega)X(t - \tau, \omega)\} = R_X(\tau),$$

soit finalement

$$R_X(\tau) = E \{X(t, \omega)X(t - \tau, \omega)\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)X(t - \tau, \omega) dt.$$

2.3 Le syndrome gaussien

Le signal aléatoire gaussien est déduit de la variable aléatoire gaussienne. Le signal aléatoire gaussien est très important en traitement du signal en raison de sa facilité d'emploi, de l'optimalité des méthodes du second ordre pour les signaux gaussiens, et par son omniprésence liée au(x) théorème(s) central limite.

On rappelle que $X(t, \omega)$ est connu, au sens de la description complète, si l'on connaît la distribution conjointe

$$P_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad \forall t_1, t_2, \dots, t_k \text{ et } \forall k.$$

Le signal est un processus gaussien si tous les $X(t, \omega)$ sont des variables aléatoires gaussiennes. Or on sait qu'une variable aléatoire gaussienne est entièrement caractérisée par ses deux premiers moments. La description à un instant nécessitera donc de connaître $m_X(t) \forall t$, tandis que la description à deux instants impose de connaître $C_X(t_1, t_2) \forall t_1, t_2$. dans le cas d'un processus stationnaire, ceci se réduit à la connaissance de la moyenne m_X et de la fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$.

En introduisant le vecteur $X(\omega)$ de dimension k

$$X(\omega)^t = [X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_k, \omega)],$$

la distribution du vecteur gaussien $X(\omega)$ est

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det R}} \exp - \left\{ \frac{1}{2} (x - m_X)^t R^{-1} (x - m_X) \right\},$$

où

$$\begin{aligned} m_X = E \{X(\omega)\} &= [m_X(t_1), m_X(t_2), \dots, m_X(t_k)]^t, \\ &= m_X [1, 1, \dots, 1]^t \text{ dans le cas stationnaire,} \end{aligned}$$

et

$$R = E \{X_c(\omega)X_c^*(\omega)\} = \begin{bmatrix} E \{X_c(t_1, \omega)X_c(t_1, \omega)^*\} & E \{X_c(t_1, \omega)X_c(t_2, \omega)^*\} & \dots & E \{X_c(t_1, \omega)X_c(t_k, \omega)^*\} \\ E \{X_c(t_2, \omega)X_c(t_1, \omega)^*\} & E \{X_c(t_2, \omega)X_c(t_2, \omega)^*\} & \dots & E \{X_c(t_2, \omega)X_c(t_k, \omega)^*\} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ E \{X_c(t_k, \omega)X_c(t_1, \omega)^*\} & E \{X_c(t_k, \omega)X_c(t_2, \omega)^*\} & \dots & E \{X_c(t_k, \omega)X_c(t_k, \omega)^*\} \end{bmatrix},$$

où X_c désigne le signal centré : $X_c = X - m_X$. On obtient finalement

$$R = \begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(t_2 - t_1) & \dots & R_X(t_k - t_1) \\ R_X(t_1 - t_2) & R_X(0) & \dots & R_X(t_k - t_2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_X(t_1 - t_k) & R_X(t_2 - t_k) & \dots & R_X(0) \end{bmatrix}$$

dans le cas stationnaire. Le terme m_X est la moyenne du vecteur gaussien $X(\omega)$, et R est la matrice de corrélation. La distribution $p(X(\omega))$ n'est autre que la distribution conjointe des k variables aléatoires $X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_k, \omega)$. Par conséquent, si l'on connaît la moyenne $m_X(t)$ et la fonction de covariance $C_X(t_1, t_2)$, ou la moyenne m_X et la fonction de corrélation $R_X(\tau)$ du processus (dans le cas stationnaire), on est capable d'écrire la distribution conjointe, et ceci quelque soient les t_i et pour n'importe quelle dimension k . Ainsi, *dans le cas gaussien, la connaissance de la moyenne et de la fonction de covariance suffit à caractériser entièrement le processus.*

Une autre définition du processus gaussien est

Définition 3 *Le processus $X(t, \omega)$ est un processus gaussien si, quelque soit la fonction $g(t)$,*

$$Z(\omega) = \int g(t)X(t, \omega)dt$$

est une variable gaussienne.

On peut déduire de cette définition une propriété fondamentale des processus gaussiens : *le caractère gaussien se conserve par transformation linéaire.* En d'autres termes, si l'entrée d'un filtre linéaire est gaussienne, alors la sortie du filtre est également gaussienne.

Supposons donc que $Y(t, \omega)$ est la sortie d'un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et d'entrée $X(t, \omega)$. Cette sortie s'exprime donc sous la forme du produit de convolution

$$Y(t, \omega) = (X * h)(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)X(\tau, \omega)d\tau.$$

À partir de la sortie $Y(t, \omega)$, on forme la variable aléatoire Z selon

$$Z = \int g(t)Y(t, \omega)dt.$$

En écrivant $Y(t, \omega)$ en fonction de $X(t, \omega)$ et $h(t)$, il vient alors

$$Z = \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(t - \tau)X(\tau, \omega)dtd\tau,$$

et en intégrant par rapport à t et en posant alors

$$w(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(t - \tau)dt,$$

il reste simplement

$$Z = \int w(\tau)X(\tau, \omega)d\tau.$$

Si $X(\tau, \omega)$ est, par hypothèse, un signal aléatoire gaussien, alors Z est une variable gaussienne, par définition et d'après la relation précédente. Z ayant été introduit comme une transformation de $Y(t, \omega)$, avec g quelconque, on en déduit que $Y(t, \omega)$ est un processus aléatoire gaussien.

Ainsi, puisque le filtrage d'un processus gaussien conserve le caractère gaussien, il nous restera à examiner comment se transforment la moyenne et la fonction de corrélation, ces deux quantités suffisant à décrire un processus gaussien stationnaire. Nous examinerons ces points dans quelques paragraphes.

L'importance des signaux aléatoires gaussiens, outre leur facilité d'utilisation liée à la manipulation de seulement deux moments, provient également de l'importance quantitative des signaux gaussiens, liée au(x) théorème(s) central limite. Il existe en effet un certain nombre de théorèmes qui indiquent qu'un mélange de variables aléatoires, tend, lorsque le nombre de variables dans le mélange augmente, vers une distribution gaussienne. Ces théorèmes se distinguent par les hypothèses faites sur les lois des variables, leurs liens statistiques ou des hypothèses sur les conditions de mélange. Une formulation simple est la suivante :

Thorème 1 Soit

$$Y_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i,$$

où X_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Alors, lorsque $N \rightarrow +\infty$, la variable Y_N tend vers une variable aléatoire gaussienne de moyenne m et de variance σ^2/N , si m et σ^2 sont les moyenne et variance commune des variables X_i .

Ceci indique, que comme c'est souvent le cas en pratique, lorsqu'un signal aléatoire est composé par la superposition d'un grand nombre de « signaux élémentaires », alors le signal résultant est bien approximé par une distribution gaussienne. Rappelons qu'il existe d'autres théorèmes limite qui prennent en compte des combinaisons linéaires quelconques de variables, qui peuvent être liés, et dont les distributions peuvent être différentes.

2.4 Signaux aléatoires à temps discret

À partir des signaux aléatoires précédemment définis « à temps continu », c'est-à-dire que la variable d'évolution t prend ses valeurs dans \mathbf{R} , on définit des signaux aléatoires « à temps discret », ou la variable d'évolution n prend ses valeurs dans un ensemble discret, \mathbf{N} , par exemple. Rappelons que s'il est commode d'appeler t et n des variables temporelles, celles-ci ne sont pas nécessairement homogènes à un temps : t et n peuvent représenter une distance, un évolution d'une intensité de stimulation ou autre.

On note $X(n, \omega)$ un signal aléatoire X , un ensemble de fonctions de la variable n , cet ensemble étant indexé par la variable ω . On notera $x(n)$ une réalisation du processus aléatoire et on désignera par $\tilde{x}(n)$ ou $X(n, \omega_i)$ une réalisation particulière, obtenue pour $\omega = \omega_i$. Lorsque n est fixé, le processus aléatoire se réduit alors à une simple variable aléatoire. Le processus aléatoire à temps discret ne se réduit pas à une collection de variables aléatoires indépendantes ; ces variables aléatoires peuvent être liées les unes aux autres, par le biais d'une fonction de la variable d'évolution n .

Un signal aléatoire à temps discret peut être construit directement à temps discret, ou être intrinsèquement de nature discrète, ou peut résulter de l'échantillonnage d'un signal aléatoire à temps continu.

Les notions de description complète et partielles, les définitions des moments et covariance, les propriétés de stationnarité, d'ergodisme se transposent directement à partir du cas continu, à un très faible aménagement de notation près. Nous poursuivrons donc la présentation en donnant les résultats pour ces deux classes de signaux aléatoires, et en donnant les argumentations et exemples en se plaçant tantôt dans un cas, tantôt dans l'autre.

3 Propriétés énergétiques des signaux aléatoires stationnaires de puissance moyenne finie

Les propriétés énergétiques des signaux aléatoires stationnaires sont décrites à l'aide des moments d'ordre deux, c'est-à-dire des fonctions d'auto et d'intercorrélation, dans le domaine temporel, et à l'aide des densités spectrales de puissance, dans le domaine de Fourier.

3.1 Analyse dans le domaine temporel

Les notions importantes sont ici les notions de fonctions de corrélation et leurs propriétés.

3.1.1 Définitions et propriétés

Définition 4 Si $X(t, \omega)$ et $Y(t, \omega)$ sont deux processus aléatoires conjointement stationnaires, les fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation sont définies par

$$R_{XY}(\tau) \triangleq E \{X(t, \omega)Y^*(t - \tau, \omega)\} = \lim_{\text{erg } T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)Y^*(t - \tau, \omega)dt,$$

$$R_{XX}(\tau) \triangleq E \{X(t, \omega)X^*(t - \tau, \omega)\} = \lim_{\text{erg } T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} X(t, \omega)X^*(t - \tau, \omega)dt,$$

et, à temps discret, par

$$R_{XY}(k) \triangleq E \{X(n, \omega)Y^*(n-k, \omega)\} = \lim_{\text{erg } N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N X(n, \omega)Y^*(n-k, \omega),$$

$$R_{XX}(k) \triangleq E \{X(n, \omega)X^*(n-k, \omega)\} = \lim_{\text{erg } N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N X(n, \omega)X^*(n-k, \omega).$$

Notons que si on note Ech l'opérateur d'échantillonnage et Corr l'opérateur de corrélation, alors on a

$$\text{Corr}[\text{Ech}[X(t, \omega)]] = \text{Ech}[\text{Corr}[X(t, \omega)]];$$

et c'est bien heureux, car les corrélateurs analogiques ne courent pas les rues.

Les fonctions de corrélation jouissent d'un certain nombre de propriétés que nous rappelons ci-dessous.

1. (Symétrie hermitienne)

$$R_{YX}(\tau) = E \{Y(t, \omega)X^*(t-\tau, \omega)\} = E \{Y(t+\tau, \omega)X^*(t, \omega)\} = E \{X(t, \omega)Y^*(t+\tau, \omega)\}^* = R_{XY}^*(-\tau).$$

On dit que l'intercorrélation est à symétrie hermitienne.

2. (Parité). En appliquant la propriété de symétrie hermitienne à l'autocorrélation, on obtient

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}^*(-\tau).$$

3. (Centrage). Si m_X est la moyenne de $X(t, \omega)$, en définissant par $X_c(t, \omega) = X(t, \omega) - m_X$ le signal centré, on a

$$R_{XX}(\tau) = R_{X_c X_c}(\tau) + m_X^2.$$

4. (Autocorrélation et puissance). Pour un retard τ nul, on a

$$R_{XX}(0) = E \{|X(t, \omega)|^2\} = \lim_{\text{erg } T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} |X(t, \omega)|^2 dt = P_X.$$

La fonction d'autocorrélation prise pour le retard nul, $R_{XX}(0)$, est simplement la puissance du signal. On en déduit d'ailleurs que $R_{XX}(0) > 0$.

5. (Maximum). À partir de l'inégalité de Schwartz,

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

et en utilisant $\langle x_1, x_2 \rangle = E \{X_1(t)X_2^*(t)\}$ comme produit scalaire, on déduit que

$$(a) |R_{YX}(\tau)|^2 \leq R_{XX}(0)R_{YY}(0), \quad \forall \tau,$$

$$(b) |R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0), \quad \forall \tau,$$

Exercice 2 : Au sens du produit scalaire défini ci-dessus, démontrez l'inégalité de Schwartz en développant $E \{|X + \lambda Y|^2\}$ en un polynôme en λ et en notant que ce polynôme est toujours positif. À partir de cette inégalité, retrouvez les deux propriétés de maximum.

6. La fonction d'autocorrélation est *définie non négative* :

$$\sum_i \sum_j \lambda_i R_{XX}(\tau_i - \tau_j) \lambda_j \geq 0, \quad \forall i, j.$$

Ceci s'établit en développant $E \{|\sum_i \lambda_i X(\tau_i)|^2\}$, qui est une quantité positive.

En reprenant cette démarche, on peut étudier

$$E \left\{ \left| \int X(t, \omega) \exp(-j2\pi ft) dt \right|^2 \right\},$$

expression qui nécessiterait quelques précautions d'écriture (la transformée de Fourier d'un processus aléatoire stationnaire n'a pas de sens). En développant tout de même, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \int X(t, \omega) \exp(-j2\pi ft) dt \int X^*(t', \omega) \exp(j2\pi ft') dt' \right\} \\ &= \int \int \mathbb{E} \{ X(t, \omega) X^*(t', \omega) \} \exp(-j2\pi f(t-t')) dt dt' \\ &= \int \int R_{XX}(t-t') \exp(-j2\pi f(t-t')) dt dt', \end{aligned}$$

soit, en posant $t-t' = \tau$,

$$S_{XX}(f) \triangleq \int R_{XX}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \geq 0.$$

On en déduit donc que *la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est toujours positive*. On dit aussi que le caractère défini non négatif se conserve par transformée de Fourier. Ce résultat constitue le théorème de Bochner.

7. (Mémoire). On a vu que $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$. On appelle

$$\rho_c(\tau) \triangleq \frac{R_{XX}(\tau)}{R_{XX}(0)} = \frac{\mathbb{E} \{ X(t, \omega) X^*(t-\tau, \omega) \}}{\sqrt{\mathbb{E} \{ |X(t, \omega)|^2 \} \mathbb{E} \{ |X^*(t-\tau, \omega)|^2 \}}}$$

le coefficient de corrélation, dont on vérifie aisément qu'il est compris entre -1 et 1. Il s'agit en fait de la fonction d'autocorrélation normalisée par rapport à son maximum. Lorsqu'au bout d'un temps ℓ le coefficient de corrélation devient nul, le processus est dit à *mémoire finie*.

3.1.2 Notion de bruit blanc

Un bruit blanc est un modèle de signal aléatoire « limite » que l'on rencontrera très souvent. Le bruit blanc est un bruit à *corrélation microscopique*, c'est-à-dire qu'entre deux instants, si proches soient-ils, $\rho(\tau) = 0$. On pose, par définition,

$$R_{XX}(\tau) \triangleq \frac{N_0}{2} \delta(\tau),$$

où $\delta(\tau)$ est la distribution de Dirac. On peut noter dès à présent que la transformée de Fourier de cette fonction d'autocorrélation, que l'on a déjà notée $S_{XX}(f)$, est une *constante*, d'amplitude $N_0/2$.

$$S_{XX}(f) = TF[R_{XX}(\tau)] = \frac{N_0}{2}.$$

Par ailleurs, en se souvenant que $R_{XX}(0)$ représente la puissance moyenne du signal, on constate que le bruit blanc possède une puissance moyenne infinie... Il s'agit donc d'un modèle délicat à manipuler.

On peut distinguer plusieurs types de bruit blanc : si toutes les variables aléatoires que l'on peut extraire du signal sont indépendantes, le bruit est blanc, puisque l'indépendance entraîne la décorrélation. Par contre, toutes les variables peuvent être décorrélées sans être nécessairement indépendantes. On parlera alors de bruit blanc au sens fort (ou au sens strict), dans le premier cas et de bruit blanc à l'ordre deux dans le second. Notons qu'il existe un certain nombre de situations intermédiaires.

Exercice 3 : Montrez qu'un bruit blanc est nécessairement de valeur moyenne nulle.

Exercice 4 : On considère un signal aléatoire $U(t, \omega)$ n'existant que sur l'intervalle de temps $[0, T]$; et on s'intéresse au signal périodique

$$X(t, \omega) = \text{Rep}_T[U(t, \omega)] = \sum_k U(t - kT, \omega).$$

1. Montrez que $R_{UU}(\tau) = 0$ pour $\tau \notin [-T, T]$.
2. Montrez que $R_{XX}(\tau)$ est une fonction périodique de période T et exprimez $R_{XX}(\tau)$ en fonction de $R_{UU}(\tau)$.

Exercice 5 : On considère le signal aléatoire à temps discret $X(n, \omega)$, d'autocorrélation $R_{XX}(k)$, et on définit

$$Z(n, \omega) = X(n, \omega) + aX(n - n_0, \omega).$$

Calculez la fonction d'autocorrélation de $Z(n, \omega)$.

3.2 Transformation des fonctions aléatoires par filtrage

On étudie ici comment sont transformés les signaux aléatoires, ou plus exactement leurs caractéristiques, lors d'un filtrage linéaire. On s'intéressera d'abord à la représentation temporelle, transformation de la moyenne et des fonctions de corrélation, et établirons la formule des interférences et ses conséquences, puis nous examinerons la transformation des caractéristiques du signal dans le domaine fréquentiel.

3.2.1 Rappel

On rappelle qu'un filtre est un système linéaire invariant dans le temps (stationnaire), que l'on peut décrire par une équation différentielle à coefficients constants ou par une intégrale de convolution. À temps continu, si $X(t, \omega)$ est l'entrée du filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, on a

$$Y(t, \omega) = (X * h)(t, \omega) = \int X(u, \omega)h(t - u)du = \int h(u)X(t - u, \omega)du.$$

À temps discret, si $X(n, \omega)$ est l'entrée du filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, on a

$$Y(n, \omega) = (X * h)(n, \omega) = \sum_m X(m, \omega)h(n - m) = \sum_m h(m)X(n - m, \omega).$$

3.2.2 Transformation de la moyenne

On note m_Y la moyenne de la sortie du filtre, et on effectue le calcul à temps discret.

$$m_Y = E\{Y(n, \omega)\} = E\left\{\sum_m h(m)X(n - m, \omega)\right\} = \sum_m h(m)E\{X(n - m, \omega)\} = m_X \sum_m h(m).$$

La moyenne de la sortie est donc simplement la moyenne du signal d'entrée affectée du facteur $\sum_m h(m)$. Or si l'on considère la transformée de Fourier $H(f)$ de $h(m)$,

$$H(f) = \sum_m h(m) \exp\{j2\pi fm\}$$

(transformée de Fourier à fréquence continue), on note que pour la fréquence nulle, on retrouve

$$H(0) = \sum_m h(m).$$

Ainsi, la moyenne en sortie s'écrit

$$m_Y = m_X H(0) = m_X \sum_m h(m).$$

La moyenne de la sortie du filtre est la moyenne de l'entrée, multipliée par le gain complexe (la fonction de transfert) pour la fréquence nulle.

Exercice 6 : Montrez que pour un signal aléatoire à temps continu, on a les formules analogues :

$$m_Y = m_X H(0) = m_X \int h(u)du.$$

3.2.3 Théorème, ou formule des interférences

La très importante formule des interférences permet de relier l'intercorrélation entre les sorties de deux filtres, aux intercorrélations des entrées de ces filtres. La figure I.1 décrit le dispositif expérimental.

$$\begin{cases} Y_1(n, \omega) = (X_1 * h_1)(n, \omega), \\ Y_2(n, \omega) = (X_2 * h_2)(n, \omega), \end{cases}$$

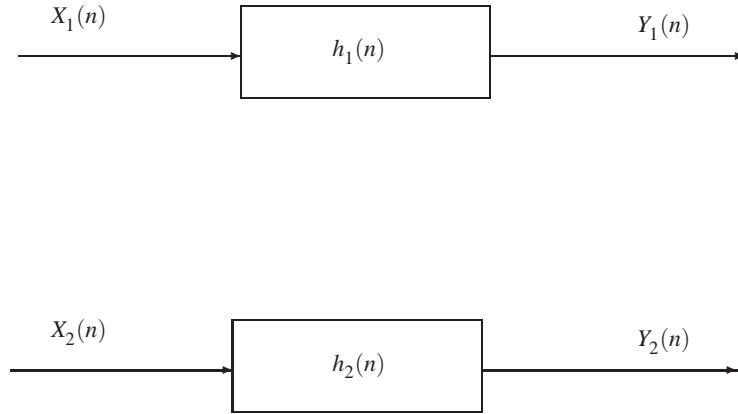


FIG. I.1: Dispositif pour la formule des interférences

Calculons l'intercorrélation entre $Y_1(n)$ et $Y_2(n)$:

$$R_{Y_1 Y_2}(m) = E \{ Y_1(n, \omega) Y_2^*(n - m, \omega) \} = E \{ (X_1 * h_1)(n, \omega) (X_2^* * h_2^*)(n - m, \omega) \}.$$

Les deux produits de convolution s'écrivent

$$\begin{aligned} (X_1 * h_1)(n, \omega) &= \sum_u X_1(u, \omega) h_1(n - u) = \sum_u h_1(u, \omega) X_1(n - u, \omega), \\ (X_2 * h_2)(n - m, \omega) &= \sum_v X_2(v, \omega) h_2(n - m - v) = \sum_v h_2(v, \omega) X_2(n - m - v, \omega), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_{Y_1 Y_2}(m) &= E \left\{ \sum_u X_1(n - u, \omega) h_1(u) \sum_v X_2^*(n - m - v, \omega) h_2^*(v) \right\} \\ &= E \left\{ \sum_u \sum_v X_1(n - u, \omega) h_1(u) X_2^*(n - m - v, \omega) h_2^*(v) \right\} \\ &= \sum_u \sum_v h_1(u) R_{X_1 X_2}(m + v - u) h_2^*(v). \end{aligned}$$

En effectuant la somme sur u , on voit apparaître un produit de convolution entre h_1 et $R_{X_1 X_2}$, exprimé en $(m + v)$:

$$\begin{aligned} R_{Y_1 Y_2}(m) &= \sum_v (h_1 * R_{X_1 X_2})(m + v) h_2^*(v) \\ &= \sum_v (h_1 * R_{X_1 X_2})(m + v) h_2^{*(-)}(-v), \end{aligned}$$

où l'on a posé $h_2^{*(-)}(v) = h_2^*(-v)$. Dans cette relation apparaît à nouveau un produit de convolution, cette fois-ci entre $(h_1 * R_{X_1 X_2})$ et $h_2^{*(-)}$:

$$\begin{aligned} R_{Y_1 Y_2}(m) &= \sum_v (h_1 * R_{X_1 X_2})(m + v) h_2^{*(-)}(-v) \\ &= \sum_{v'} (h_1 * R_{X_1 X_2})(m - v') h_2^{*(-)}(v') \\ &= \left(h_1 * R_{X_1 X_2} * h_2^{*(-)} \right)(m). \end{aligned}$$

On en déduit donc la formule des interférences :

$$R_{Y_1 Y_2}(m) = \left(h_1 * R_{X_1 X_2} * h_2^{*(-)} \right) (m).$$

Exercice 7 : Établir la même relation en continu.

Conséquences

1. Considérons non plus deux filtres, mais un filtre unique (voir figure I.2). On peut appliquer la formule des interférences, en prenant

$$\begin{cases} X_1 = X_2 = X, \\ h_1 = h_2 = h. \end{cases}$$

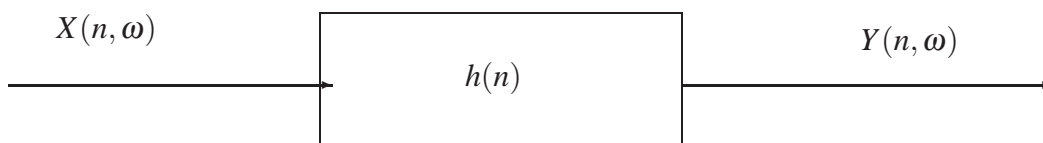


FIG. I.2: Filtre unique

Les deux sorties sont évidemment égales, $Y_1 = Y_2 = Y$, et l'on obtient

$$R_{YY}(m) = \left(h * R_{XX} * h^{*(-)} \right) (m).$$

2. On cherche maintenant à établir l'expression de l'intercorrélacion sortie-entrée d'un filtre $R_{YX}(m)$. Pour cela, on peut appliquer la formule des interférences avec un premier filtre d'entrée $X(n, \omega)$, de réponse impulsionnelle $h(n)$ et de sortie $Y(n, \omega)$, et un second filtre unitaire, c'est-à-dire d'entrée $X(n, \omega)$ de réponse impulsionnelle $\delta(n)$ et donc de sortie $X(n, \omega)$. On considère ainsi :

$$\begin{cases} X_1 = X_2 = X, \\ Y_1 = Y, \\ Y_2 = X, h_1 = h, \\ h_2 = \delta. \end{cases}$$

Dans ce cas, l'application de la formule des interférences fournit :

$$R_{YX}(m) = \left(h * R_{XX} \right) (m).$$

L'intercorrélacion sortie-entrée s'exprime donc comme un filtrage de l'autocorrélacion de l'entrée, ce filtrage étant analogue à celui qui lie la sortie et l'entrée du filtre.

Application : identification de réponse impulsionnelle

La manière classique d'identifier une réponse impulsionnelle consiste à recueillir la sortie du filtre à une impulsion de Dirac... Ceci nécessite donc d'être capable de générer une impulsion de Dirac ; or il n'est évidemment pas possible de générer une telle impulsion, qui devrait être de largeur nulle et d'amplitude infinie. Par ailleurs, si la sortie du filtre est bruitée, la réponse impulsionnelle ainsi identifiée sera inexploitable.

Si l'on prend pour $X(t, \omega)$ un bruit blanc, il est possible d'identifier la réponse impulsionnelle : en effet, si $X(t, \omega)$ est blanc, $R_{XX}(\tau, \omega) = N_0/2\delta(\tau)$, et

$$R_{YX}(\tau) = \left(h * \frac{N_0}{2} \delta \right) (\tau) = \frac{N_0}{2} h(\tau).$$

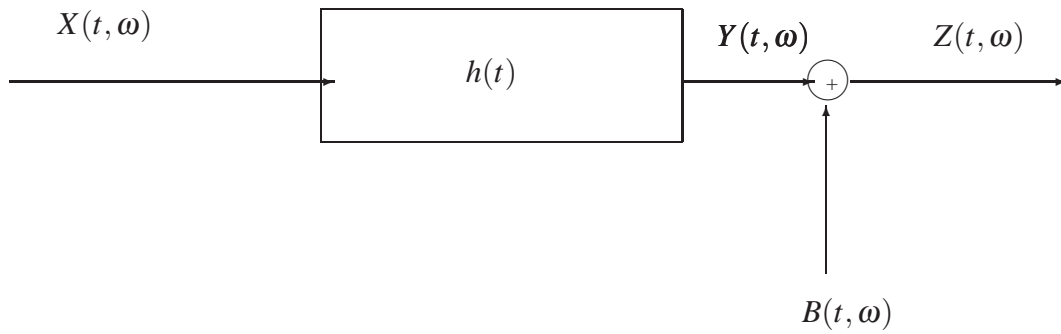


FIG. I.3: Mesure de la réponse impulsionnelle d'un filtre bruité

Lorsque la sortie est bruitée, par exemple par un bruit $B(t, \omega)$ tel que

$$Z(t, \omega) = Y(t, \omega) + B(t, \omega),$$

où l'on supposera $B(t, \omega)$ non corrélé à l'entrée $X(t, \omega)$ (ces deux quantités n'ont pas de raison particulière d'être corrélées entre elles, d'autant plus qu'on est maître de l'entrée), on peut appliquer la même démarche :

$$\begin{aligned} R_{ZX}(\tau) &= E\{Z(t, \omega)X^*(t - \tau, \omega)\} = E\{(Y(t, \omega) + B(t, \omega))X^*(t - \tau, \omega)\} \\ &= R_{YX}(\tau) + R_{BX}(\tau) = \left(h * \frac{N_0}{2}\delta\right)(\tau) = \frac{N_0}{2}h(\tau); \end{aligned}$$

puisque $R_{BX}(\tau) = 0$ (non corrélation). Les résultats restent donc inchangés en dépit de la présence d'un bruit additif non corrélé à l'entrée. La méthode d'identification de réponse impulsionnelle par intercorrélation sortie-entrée est insensible à un bruit d'observation. Par ailleurs, elle ne nécessite pas l'application d'une impulsion de Dirac impossible à réaliser. Il restera cependant à générer un bruit blanc, ce qui peut être aussi difficile (*i.e.* impossible) que la génération d'une impulsion de Dirac. Il est possible de se contenter d'un *bruit blanc dans la bande* du filtre (nous donnerons plus loin la signification de cette expression), où on peut travailler à temps discret, où, comme nous le verrons également, il est possible de générer un bruit blanc discret.

Exercice 8 : Considérez le problème de l'identification d'un filtre dans lequel la sortie et l'entrée sont perturbées par un bruit additif : si on applique $X(t, \omega)$ au filtre, l'entrée réelle est $X_1(t, \omega) = X(t, \omega) + B_1(t, \omega)$, et la sortie observée est $Z(t, \omega) = Y(t, \omega) + B_2(t, \omega)$, où $Y(t, \omega)$ est la sortie liée à $X_1(t, \omega)$ et $B_2(t, \omega)$ est un bruit d'observation. Vous supposerez que $X(t, \omega)$ est blanc, que $X(t, \omega)$, $B_1(t, \omega)$ et $B_2(t, \omega)$ sont non corrélés. Dans ces conditions, montrez que l'identification de la réponse impulsionnelle par intercorrélation est possible.

3.3 Analyse dans le domaine fréquentiel

En repartant de la formule des interférences

$$R_{Y_1Y_2}(m) = \left(h_1 * R_{X_1X_2} * h_2^{*(-)}\right)(m),$$

on obtient simplement, après transformée de Fourier,

$$\boxed{S_{Y_1Y_2}(f) = H_1(f)S_{X_1X_2}(f)H_2^*(f)},$$

où $S_{Y_1Y_2}(f)$, $S_{X_1X_2}(f)$, $H_1(f)$ et $H_2(f)$ sont respectivement les transformées de Fourier de $R_{Y_1Y_2}(m)$, $R_{X_1X_2}(m)$, $h_1(m)$ et $h_2(m)$.²

Conséquences :

²La transformée de FOURIER de $h^*(-t)$ vaut $H^*(f)$.

1. En prenant $Y_1 = Y_2 = Y$, $X_1 = X_2 = X$ et $H_1 = H_2 = H$, c'est-à-dire que l'on considère un seul filtre, il vient

$$\boxed{S_{YY}(f) = S_{XX}(f)|H(f)|^2}.$$

2. Si $H_1(f)$ et $H_2(f)$ sont deux filtres *disjoints* en fréquence, alors

$$S_{Y_1Y_2}(f) = 0.$$

On en déduit que

$$R_{Y_1Y_2}(\tau) = \text{TF}[S_{Y_1Y_2}(f)]^{-1} = \text{TF}[0]^{-1} = 0.$$

si les filtres sont disjoints en fréquence, l'intercorrélacion des sorties est nulle.

Application Considérons deux filtres parfaits autour de deux fréquences pures f_1 et f_2 , de même entrée $X(t, \omega)$. On a $Y_1(t, \omega) = X(f_1, \omega) \exp(-j2\pi f_1 t)$, et $Y_2(t, \omega) = X(f_2, \omega) \exp(-j2\pi f_2 t)$ ³. Dans ces conditions,

$$R_{Y_1Y_2}(0) = E \{X(f_1, \omega)X^*(f_2, \omega)\} \exp(-j2\pi(f_1 - f_2)t) = 0,$$

soit

$$E \{X(f_1, \omega)X^*(f_2, \omega)\} = 0.$$

On dit que les composantes spectrales sont décorréliées.

Notion de densité spectrale de Puissance

La densité spectrale de puissance représente la répartition de la puissance du signal dans le domaine fréquentiel. Il s'agit exactement de la même notion que celle de densité de probabilité : lorsque l'on veut calculer probabilité qu'une variable aléatoire X appartienne à un certain intervalle $[x_1, x_2]$, il suffit d'intégrer la densité de probabilité de la variable entre ces deux bornes :

$$\Pr(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x) dx.$$

Si on appelle $D_{XX}(f)$ la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire $X(t, \omega)$, alors la puissance du signal portée par les composantes fréquentielles comprises entre f_1 et f_2 s'écrit

$$P_{XX}(f \in [f_1, f_2]) = \int_{f_1}^{f_2} D_{XX}(f) df.$$

Dès lors, la puissance totale du signal s'écrit

$$P_{XX} = \int_{-\infty}^{+\infty} D_{XX}(f) df.$$

Or on sait que, pour un signal stationnaire et ergodique,

$$P_{XX} = E \{|X(t, \omega)|^2\} = R_{XX}(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |X(t, \omega)|^2 dt.$$

Par ailleurs,

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) \exp(j2\pi f \tau) df,$$

soit, pour $\tau = 0$,

$$R_{XX}(0) = P_{XX} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) df.$$

La transformée de Fourier $S_{XX}(f)$ de la fonction d'autocorrélacion est ainsi une bonne candidate pour être la densité spectrale de puissance. Notons cependant, cette dernière relation ne prouve pas qu'elle le soit.

³Cette écriture n'est pas rigoureuse, car la transformée de Fourier n'est pas définie pour des signaux aléatoires stationnaires. Il faudrait ici utiliser la représentation de CRAMÉR — voir §3.4.

Considérons un filtre parfait, dont le module de la fonction de transfert est d'amplitude un dans une bande Δf centrée sur une fréquence f_0 , et nul ailleurs :

$$\begin{cases} |H(f)| = 1 & \text{pour } f \in [f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}] \\ |H(f)| = 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Notons $Y(t, \omega) = (h * X)(t, \omega)$ la réponse de ce filtre à une entrée $X(t, \omega)$. La puissance de la sortie est donnée par

$$P_{YY} = R_{YY}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(f) df,$$

or la formule des interférences fournit

$$S_{YY}(f) = S_{XX}(f) |H(f)|^2,$$

avec les conditions sur le module de $H(f)$ données précédemment. On obtient donc

$$P_{YY}(f \in [f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}]) = \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_{XX}(f) df,$$

ce qui correspond bien à la définition de la densité spectrale de puissance : la puissance pour les composantes spectrales comprises dans un intervalle est bien égale à l'intégrale de la densité spectrale de puissance sur cet intervalle. Si Δf est suffisamment faible, on pourra considérer la densité spectrale de puissance $S_{XX}(f)$ comme approximativement constante sur l'intervalle, et

$$P_{YY}(f \in [f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}]) \simeq S_{XX}(f_0) \Delta f.$$

Cette dernière relation indique que la densité spectrale de puissance doit s'exprimer en Watts par Hertz. Par ailleurs, lorsque Δf tend vers 0, la puissance recueillie est de plus en plus faible. Pour $\Delta f = 0$, la puissance obtenue est ainsi normalement nulle, sauf si la densité spectrale elle-même est constituée par une « masse » de Dirac (de largeur nulle mais d'amplitude infinie) à la fréquence considérée.

Notons que le filtre que nous avons défini ci-dessus n'est défini, par commodité de présentation, que pour les fréquences positives. Sa fonction de transfert ne vérifie donc pas la propriété de symétrie hermitienne des signaux réels : la réponse impulsionnelle associée est donc complexe et la sortie $Y(t, \omega)$ également complexe. En restaurant cette symétrie, c'est-à-dire en imposant $H(f) = H^*(-f)$, ce qui entraîne (notez le module de f)

$$\begin{cases} |H(f)| = 1 & \text{pour } |f| \in [f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}] \\ |H(f)| = 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

la puissance en sortie est

$$P_{YY} = \int_{-f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{-f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_{XX}(f) df + \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_{XX}(f) df.$$

La densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire réel est une fonction paire, ce qui conduit enfin à

$$P_{YY} = 2 \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_{XX}(f) df,$$

relation qui indique que la puissance se partage équitablement dans les fréquences positives et négatives.

Exemple :

Considérons le cas d'une sinusoïde à amplitude et phase aléatoire

$$X(t, \omega) = A(\omega) \sin(2\pi f_0 t + \phi(\omega)),$$

où $A(\omega)$ est une variable aléatoire centrée de variance σ^2 et $\phi(\omega)$ uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$, indépendante de $A(\omega)$. La fonction d'autocorrélation de ce signal vaut

$$R_{XX}(\tau) = \frac{\sigma^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau).$$

Par transformée de Fourier, on obtient la densité spectrale :

$$S_{XX}(f) = \frac{\sigma^2}{4} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)].$$

Enfin, en intégrant la densité spectrale

$$\int \frac{\sigma^2}{4} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] df = \frac{\sigma^2}{2},$$

on retrouve la puissance de la sinusoïde, $\sigma^2/2$, comme il se doit.

Les fonctions de corrélation et les densités spectrales de puissance forment des paires de transformées de Fourier :

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{XX}(f) \xrightarrow{\quad} R_{XX}(\tau), \\ S_{XY}(f) \xrightarrow{\quad} R_{XY}(\tau), \end{array}}$$

où $S_{XX}(f)$, $S_{XY}(f)$ sont les densités spectrale de puissance et de puissance d'interaction, respectivement. Ces relations constituent le théorème de Wiener-Kintchine-Einstein.

3.4 La représentation de Cramér

Un processus aléatoire stationnaire $X(t, \omega)$ n'admet pas de transformée de Fourier. En effet, si le processus est stationnaire, il est défini sur tout \mathbf{R} , et $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t, \omega)| dt$ ne converge pas. Il est ainsi impossible de définir la transformée de Fourier d'un processus stationnaire au sens habituel. Il est cependant possible d'associer aux signaux aléatoires stationnaires au sens large une représentation spectrale : c'est la représentation de Cramér. Cette représentation fait intervenir la théorie de la mesure. On peut représenter un processus aléatoire selon la transformée de Fourier inverse

$$X(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi ft) dZ(f, \omega).$$

La quantité $dZ(f, \omega)$ est appelée *incrément spectral*. On notera qu'il s'agit d'un signal aléatoire dépendant de la variable f . Lorsque le processus est stationnaire au sens large, l'incrément spectral possède les propriétés suivantes :

1. l'incrément est moyenne nulle

$$E \{dZ(f, \omega)\} = 0,$$

2. les incréments à des fréquences différentes sont décorrélés

$$E \{dZ(f_1, \omega)dZ(f_2, \omega)^*\} = 0 \quad \text{si } f_1 \neq f_2,$$

3. la densité spectrale de puissance est liée à la valeur moyenne du module carré de l'incrément spectral

$$E \{|dZ(f, \omega)|^2\} = S_{XX}(f)df.$$

L'incrément spectral $dZ(f, \omega)$ est ainsi un processus de moyenne nulle et décorrélé. On peut le considérer comme un bruit blanc (à l'ordre 2) dans le domaine fréquentiel (pas de corrélation, sauf pour le « retard » nul). La seconde propriété constitue la formulation rigoureuse indiquant la propriété de décorrélation des composantes spectrales.

On retrouve le lien entre puissance et densité spectrale de puissance en calculant $E\{|X(t, \omega)|^2\}$ en terme des incréments spectraux :

$$\begin{aligned} E \{|X(t, \omega)|^2\} &= E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi f_1 t) dZ(f_1, \omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi f_2 t) dZ(f_2, \omega)^* \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi(f_1 - f_2)t) E \{dZ(f_1, \omega)dZ(f_2, \omega)^*\}. \end{aligned}$$

En tenant compte de la propriété de décorrélation, l'intégrande n'est non nul que pour $f = f_1 = f_2$, et

$$E \{|X(t, \omega)|^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E \{|dZ(f, \omega)|^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f)df.$$

3.5 Bruit blanc à temps discret

Nous avons déjà noté l'impossibilité de disposer d'un bruit blanc théorique à temps continu, puisqu'un tel signal devrait être à corrélation microscopique, présenter une densité spectrale de puissance constante pour toutes les fréquences, et par suite une puissance infinie. Notons aussi que ce signal serait aussi à variance infinie... Il s'agit donc d'un modèle mathématique commode mais irréaliste.

Il est par contre possible de générer sans difficulté un bruit blanc à temps discret. Pour illustrer ceci (ce n'est pas une méthode de construction), considérons un signal aléatoire dont la bande est constante sur la zone de fréquence $[-B/2, B/2]$ et nulle ailleurs. Ce sera par exemple un signal de bande suffisamment large que l'on aura limité entre $-B/2$ et $B/2$. Notons N_0 l'amplitude de la densité spectrale de puissance. Ce signal a pour fonction de corrélation la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale de puissance que nous venons de définir, soit

$$R_{XX}(\tau) = \text{TF}^{-1}\left[\frac{N_0}{2}\text{rect}_B(f)\right] = N_0B\frac{\sin(\pi B\tau)}{\pi B\tau}.$$

Le signal $X(t, \omega)$ étant à bande limitée par construction, il est possible de l'échantillonner, ce que l'on effectue à la fréquence de Shannon, c'est-à-dire avec $F_e = B$. Dans ces conditions, la fonction de corrélation du signal après échantillonnage $X(n, \omega)$, est la fonction de corrélation du signal à temps continu, échantillonnée au rythme F_e :

$$R_{XX}(kT_e) = N_0B\frac{\sin(k\pi)}{k\pi}.$$

Il est aisé de voir que cette fonction de corrélation n'est non nulle que pour $k = 0$, et que l'on a

$$R_{XX}(0) = N_0B.$$

On notera aussi

$$R_{XX}(k) = N_0B\delta(k),$$

où $\delta(k)$ représente cette fois-ci le symbole de Kronecker, le « Dirac à temps discret », qui vaut un lorsque son argument est nul, et est nul sinon. Le signal que nous venons de définir possède donc des échantillons décorrelés, présente une variance finie N_0B . Du point de vue spectral, l'échantillonnage a périodisé le spectre initial tous les $F_e = B$. Le spectre de départ étant constant dans la bande $[-B/2, B/2]$, cette périodisation, à la limite du recouvrement, conduit à un spectre constant pour toutes les fréquences. Ce signal présente ainsi toutes les caractéristiques du bruit blanc.

4 Un exemple d'application : le filtrage adapté

4.1 Contexte

En sonar ou en radar, on cherche à localiser une « cible » (vocabulaire consacré) – cette cible peut être le sol, un bâtiment, une interface (en sismique réflexion) ou un avion ennemi (pour les guerriers). Pour cela, on procède de la façon suivante : on émet un signal $s(t)$, qui parcourt la distance d jusqu'à la cible, sur laquelle il est réfléchi en direction d'un récepteur. Le récepteur est souvent couplé à l'émetteur, et reçoit alors le signal atténué, retardé et bruité

$$Y(t, \omega) = as(t - t_0) + B(t, \omega).$$

L'atténuation a est supposée connue ; le bruit additif est en général supposé gaussien, pas nécessairement blanc, et il s'agit de déterminer le retard t_0 , correspondant au temps d'aller-retour, $t_0 = 2d/c$.

4.2 Maximisation du rapport signal-à-bruit

Considérons simplement pour le moment le modèle

$$Y(t, \omega) = x(t) + B(t, \omega).$$

L'approche habituelle consiste à rechercher à minimiser l'effet du bruit d'observation. On cherche alors à construire un filtre $h(t)$ tel que le rapport signal-à-bruit en sortie soit maximal, à un instant T , appelé instant de décision. Cet instant T devra être défini pour que l'observation ait été effectuée et que le filtre ait agi.

Notons $Z(t, \omega)$ la sortie du filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. On a alors

$$Z(t, \omega) = (h * Y)(t, \omega) = (h * x)(t) + (h * B)(t, \omega).$$

On écrit ainsi la sortie comme la somme de la sortie non-bruitée et de la contribution du bruit. Le rapport signal-à-bruit vaut ainsi

$$\rho(t) = \frac{|(h * x)(t)|^2}{\mathbb{E} \{|(h * B)(t, \omega)|^2\}},$$

où le numérateur représente la puissance instantanée de la sortie non bruitée et le dénominateur la puissance liée au bruit. On évalue ce rapport signal-à-bruit à l'instant de décision T .

$$\rho(T) = \frac{|(h * x)(T)|^2}{\mathbb{E} \{|(h * B)(T, \omega)|^2\}}.$$

En développant les produits de convolution, on obtient

$$\rho(T) = \frac{|\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(T-u)du|^2}{\mathbb{E} \{|\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)B(T-u, \omega)du|^2\}}.$$

En ce qui concerne tout d'abord le dénominateur, il s'agit là de la puissance d'un signal aléatoire à la sortie d'un filtre, et l'on a donc

$$\mathbb{E} \{|(h * B)(t, \omega)|^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{B'B'}(f)df = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df,$$

où σ^2 est la puissance du bruit d'entrée.

L'inégalité de Schwartz permet de majorer le numérateur :

$$|\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(T-u)du|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|^2 du \int_{-\infty}^{+\infty} |x^*(T-u)|^2 du,$$

avec égalité lorsque les vecteurs $h(u)$ et $x^*(T-u)$ sont colinéaires. L'égalité de Parseval-Plancherel, qui exprime la conservation du produit scalaire entraîne que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df.$$

On en déduit donc que le rapport signal-à-bruit est majoré selon

$$\rho(T) \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |x^*(T-u)|^2 du}{\sigma^2} = \frac{E_x}{\sigma^2},$$

où E_x est l'énergie du signal $x(t)$. L'égalité est atteinte lorsque $h(u)$ et $x^*(T-u)$ sont colinéaires, c'est-à-dire

$$\boxed{h(u) = kx^*(T-u)},$$

où k est une constante arbitraire. Le filtre optimal maximisant le rapport signal-à-bruit en sortie, à l'instant T , est ainsi le filtre dont la réponse impulsionnelle la copie retournée et décalée dans le temps du signal que l'on cherche à retrouver. En ce sens, le filtre est adapté au signal.

La relation de filtrage de $Y(t, \omega)$ avec une « copie retournée » équivaut en fait à effectuer une intercorrélacion (au sens déterministe). En effet,

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)y(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(T-u)y(t-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(T+v)y(t+v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(T-t+v)y(v)dv, \end{aligned}$$

soit

$$z(t) = R_{yx}(T-t).$$

Le récepteur optimal consiste donc à calculer l'intercorrélation entre le signal reçu $y(t)$ et le signal attendu $x(t)$. On parle alors souvent de récepteur à corrélation.

Application en Sonar-Radar

Dans le développement précédent, on a supposé connaître $x(t)$. Or, dans le contexte sonar-radar, le signal à détecter est $as(t - t_0)$, où a et t_0 sont inconnus. On utilisera alors comme filtre adapté le filtre adapté à $s(t)$, soit

$$h(t) = ks^*(T - t).$$

Dans ce cas, la sortie du filtre est, en terme d'intercorrélation, $R_{ys}(T - t)$. En reprenant avec

$$y(t) = as(t - t_0) + b(t),$$

on obtient

$$z(t) = R_{ys}(T - t) = aR_{ss}(T + t_0 - t) + R_{bs}(T - t).$$

L'effet du filtrage est alors de minimiser le terme de « bruit » $R_{bs}(T - t)$. Par ailleurs, on sait que l'autocorrélation est maximale en 0. Dans notre cas de figure, la sortie $z(t)$ sera maximale pour $t = T + t_0$. À partir de ce maximum, on peut alors déduire la valeur du retard t_0 et la valeur du facteur d'échelle a . Le choix du signal s est important : on cherchera à ce qu'il présente un pic d'autocorrélation R_{ss} très prononcé, afin de localiser facilement le maximum et permettre éventuellement la détection simultanée de plusieurs échos.

4.3 Approche probabiliste

Il n'est pas forcément nécessaire de rechercher une maximisation du rapport signal-à-bruit pour faire apparaître le filtre adapté. On peut poser le problème en termes probabilistes et rechercher la distribution *a posteriori* du retard t_0 compte tenu des observations.

Les données du problème sont alors l'équation d'observation

$$y(n) = as(n - n_0) + b(n). \quad (\text{I.3})$$

et le signal émis $s(n)$.

On rappelle la règle de BAYES qui lie la probabilité *a priori* $p(x)$, la vraisemblance $p(y|x)$ et la distribution *a posteriori* $p(x|y)$:

$$p(x|y) \propto p(y|x)p(x). \quad (\text{I.4})$$

Dans ce problème de réception, on s'intéresse à déterminer le retard r à partir des observations $y(n)$ et de la connaissance du signal émis $s(n)$. On cherchera donc à établir l'expression de la distribution *a posteriori* $p(r|y(n))$.

On suppose que le bruit additif est gaussien, centré, de variance σ^2 . La probabilité d'observer y si le retard τ est connu (c'est-à-dire alors que $s(n - r)$ est connu), est alors donnée par

$$p(y|r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y(n) - s(n - r))^2}{2\sigma^2}\right). \quad (\text{I.5})$$

En prenant pour r une distribution uniforme entre 1 et N , la distribution *a posteriori* est simplement

$$p(r|y) \propto \exp\left(-\frac{(y(n) - s(n - r))^2}{2\sigma^2}\right), \quad (\text{I.6})$$

avec $y(n) = [y(n), y(n - 1), \dots, y(n - N + 1)]^t$.

Il ne reste plus qu'à développer l'argument de l'exponentielle pour obtenir le résultat que nous souhaitons établir :

$$(y(n) - s(n - r))^t (y(n) - s(n - r)) = y^t(n)y(n) - 2y^t(n)s(n - r) + s^t(n - r)s(n - r); \quad (\text{I.7})$$

Les termes $y^t(n)y(n)$ et $s^t(n - r)s(n - r)$ représentent l'énergie du signal reçu et du signal émis, et ne dépendent pas du retard r (sous réserve qu'on ait une durée d'observation N suffisante pour avoir un motif complet de s dans les deux vecteurs $y(n)$ et $s(n - r)$). Développons le troisième terme :

$$y^t(n)s(n - r) = \sum_{i=0}^{N-1} y(n - i)s(n - i - r). \quad (\text{I.8})$$

On reconnaît dans cette dernière relation l'expression de l'intercorrélation entre y et s , pour le retard r .

La distribution *a posteriori* du retard s'exprime donc comme

$$p(r|y) \propto \exp\left(\frac{R_{ys}(r)}{\sigma^2}\right). \quad (\text{I.9})$$

La distribution du retard, compte tenu des observations, est donc l'exponentielle de l'intercorrélation, pondérée par l'inverse de la variance du bruit additif gaussien. Pour tracer cette distribution *a posteriori*, il faudra donc calculer cette intercorrélation pour tous les retards possibles, puis en prendre l'exponentielle.

On peut aller un peu plus loin. En effet, dans une expérience de sonar, on répète l'émission avec une période $T = MT_e$, où M est le nombre de points obtenus sur la durée T avec un échantillonnage à la période T_e . En collectant les données sous la forme de K vecteurs de M points, on peut penser intuitivement que l'on améliorera le résultat de l'estimation en moyennant les intercorrélations calculées sur les différentes tranches. Ceci se formule ainsi :

$$p(y_1, y_2, \dots, y_K | r) = p(y_1 | r) p(y_2 | r) \dots p(y_K | r), \quad (\text{I.10})$$

en supposant que les « bruits » sont indépendants de tranche à tranche. On en déduit alors que

$$p(r | y_1, y_2, \dots, y_K) \propto p(y_1 | r) p(y_2 | r) \dots p(y_K | r) p(r) \quad (\text{I.11})$$

Compte tenu de la forme exponentielle de $p(y_i | r)$, on obtient finalement

$$p(r | y_1, y_2, \dots, y_K) \propto \exp\left(\sum_{i=1}^K \frac{R_{y_i s}(r)}{\sigma^2}\right), \quad (\text{I.12})$$

relation qui indique bien que l'on a intérêt à moyennner, ou plus exactement sommer les intercorrélations calculées sur les différentes tranches. Le processus est constructif, et la distribution *a posteriori* devient alors de plus en plus piquée.

4.4 Notes sur le choix du signal test, signaux pseudo-aléatoires

Il n'est pas possible, à l'aide d'un ordinateur, de générer une suite *aléatoire*. Même avec la montée en puissance des processeurs, *etc*, un ordinateur n'en reste pas moins foncièrement déterministe, et heureusement... Il est cependant possible de générer des suites pseudo-aléatoires, qui présentent en pratique, du point de vue de l'utilisateur, les caractéristiques d'un signal aléatoire.

Un tel générateur peut être réalisé en utilisant un registre à décalage bouclé sur lui-même. ce générateur fournit alors des suites pseudo-aléatoires de 0 et de 1. On définit les bouclages du registre de manière à ce que la suite obtenue soit de longueur maximale. Pour un registre de n bits, on obtient ainsi une suite de longueur $2^n - 1$.

Les bouclages optimaux sont donnés par des polynômes particuliers. Le polynôme $P(x) = x^4 + x + 1$ est l'un de ceux-ci. Les suites obtenues sont périodiques, et permettent de parcourir tous les états possibles du registre. La valeur initiale du registre à décalage est la « graine ». Les coefficients des premiers polynômes sont donnés ci-dessous :

- (1,0)
- (2,1,0)
- (3,1,0)
- (4,1,0)
- (5,2,0)
- (6,1,0)
- (7,1,0)
- (8,4,3,2,0)
- (9,4,0)
- (10,3,0)
- (11,2,0)
- (12,6,4,1,0)

(13,4,3,1,0)

...

On montre que la corrélation calculée sur *une période complète* vaut $R_{xx}(0) = \frac{A^2}{N}$, et $R_{xx}(k) = \frac{N+1}{N^2}A^2$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1 :

On considère le processus aléatoire $x(t)$ défini par $x(t) = B(\omega) + A(\omega) \cos(2\pi f_0 t + \phi(\omega))$ où $A(\omega), B(\omega)$, et $\phi(\omega)$ sont des variables aléatoires indépendantes, $\phi(\omega)$ est une variable uniformément distribuée entre 0 et 2π , et on note $E\{A\} = m_A$, $E\{A^2\} = e_A^2$, $E\{B\} = m_B$, $E\{B^2\} = e_B^2$. Calculez la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $x(t)$. Le signal $x(t)$ est-il faiblement stationnaire à l'ordre 2 ?

Exercice 2 :

Soit $x(n)$ un signal aléatoire à temps discret faiblement stationnaire du second ordre. On définit

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) \cos(2\pi f_0 n + \phi(\omega)), \\ z(n) &= x(n) \cos(2\pi(f_0 + \lambda)n + \phi(\omega)) \end{aligned}$$

où $\phi(\omega)$ est une variable uniformément distribuée entre 0 et 2π , indépendante de $x(n)$. On note m_x et $R_{xx}(k)$ la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $x(n)$.

Montrez que $y(n)$ et $z(n)$ sont faiblement stationnaires d'ordre deux, et que $y(n) + z(n)$ n'est par contre pas stationnaire d'ordre 2.

Exercice 3 :

On cherche à prédire l'évolution d'un signal stationnaire discret $x(n)$ à partir de ses valeurs précédentes $x(n-1)$, en formant l'estimation $\hat{x}(n) = ax(n-1)$.

Déterminez la valeur optimale de a qui minimise l'erreur quadratique moyenne $E\{|\hat{x}(n) - x(n)|^2\}$?. De la même manière, on pourra chercher à prédire $x(n)$ à partir de p valeurs précédentes selon $\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^p a_i x(n-i)$.

Exercice 4 : Soit un filtre RC passif passe-bas du premier ordre, avec R la résistance et C la capacité. L'entrée du filtre est un signal aléatoire blanc, centré, de densité spectrale de puissance $No/2$. Calculez la moyenne, la densité spectrale de puissance, et la puissance du signal de sortie $y(t)$. Donnez également la bande de bruit équivalente.

On utilisera le fait que la primitive de $1/(a^2 + x^2)$ est $\frac{1}{a} \arctg(x/a)$.

Exercice 5 :

Soit un processus aléatoire discret $x(n)$ blanc et centré, de variance σ^2 . On définit deux nouveaux signaux aléatoires $y(n)$ et $z(n)$ par les relations

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) + bx(n-1), \\ z(n) &= x(n) + az(n-1), \end{aligned}$$

avec $a < 1$. Calculez les moments d'ordre 1 et 2 de $y(n)$ et $z(n)$. On pourra admettre que $E\{x(n)z(n-k)\} = 0$ pour $k > 0$.

Exercice 6 : Soit un filtre passe-bas idéal de fonction de transfert $H(f)$, $H(f) = 1$ pour $|f| \leq B/4$ et 0 ailleurs. L'entrée du filtre est un processus aléatoire gaussien $x(t)$ de moyenne m_x et de densité spectrale de puissance $S_{XX}(f)$, avec $S_{XX}(f) = 1$ pour $|f| \leq B/2$ et 0 ailleurs. Calculez la variance de $x(t)$, la moyenne, la variance et la fonction d'autocorrélation de la sortie du filtre $y(t)$. Donnez la loi de $y(t)$.

Problème I : Soit le signal, défini pour $n \in [0, N - 1]$

$$x(n) = A \cos(2\pi m_o n / N + \phi),$$

où

- A est une variable aléatoire gaussienne, centrée, de variance σ^2 ,
- ϕ est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$
- A et ϕ sont indépendantes.

1) Montrez que

$$\text{TFD} \left\{ e^{j2\pi m_o n / N} \right\} = \delta(m - m_o),$$

où $\delta(u) = 1$ si $u = 0$, et 0 sinon.

2) Calculez la moyenne de $x(n)$.

3) Calculez la fonction d'autocorrélation $R_{XX}(k)$ de $x(n)$.

4) Calculez la transformée de Fourier discrète $X(m)$ de $x(n)$.

5) Le signal $X(m)$ est-il certain ou aléatoire ? Calculez la moyenne de $X(m)$.

6) Donnez $|X(m)|^2$.

7) Calculez la moyenne de $|X(m)|^2$.

8) Calculez la TFD de $R_{XX}(k)$, et comparez la au résultat précédent.

9) On considère maintenant le signal

$$x(n) = g(n) \cos(2\pi m_o n / N + \phi),$$

avec $n \in [0, N - 1]$, et où $g(n)$ est une fonction aléatoire, indépendante de ϕ .

a) Calculez l'autocorrélation de $x(n)$,

b) déduisez en sa densité spectrale de puissance, en fonction de la densité spectrale de puissance de g , $S_g(f)$.

Rappels :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$$

Problème II :

On considère le schéma de la figure 1, où $X(t, \omega)$ est un signal aléatoire stationnaire et ergodique, $f_T(t)$ une fonction déterministe (certaine), et $h(t)$ la réponse impulsionnelle du système. On notera $X_T(t, \omega)$ le produit $f_T(t)X(t, \omega)$.

Question 1 :

1-a) Donnez l'autocorrélation de la sortie, $R_{YY}(\tau)$, et l'intercorrélacion sortie-entrée $R_{YX}(\tau)$ en fonction de l'autocorrélation de l'entrée R_{XX} et de la réponse impulsionnelle h .

1-b) Dans le cas où $h(t) = \exp(j2\pi f_0 t)$, donnez l'expression de la sortie $Y(t, \omega)$, et montrez que $Y(0, \omega) = X_T(f_0, \omega)$, la transformée de Fourier de $X_T(t, \omega)$ à la fréquence f_0 .

1-c) Toujours dans le cas où $h(t) = \exp(j2\pi f_0 t)$, donnez l'expression de l'autocorrélation de la sortie, $R_{YY}(\tau)$ et montrez que $R_{YY}(0) = E \{ |X_T(f_0)|^2 \}$.

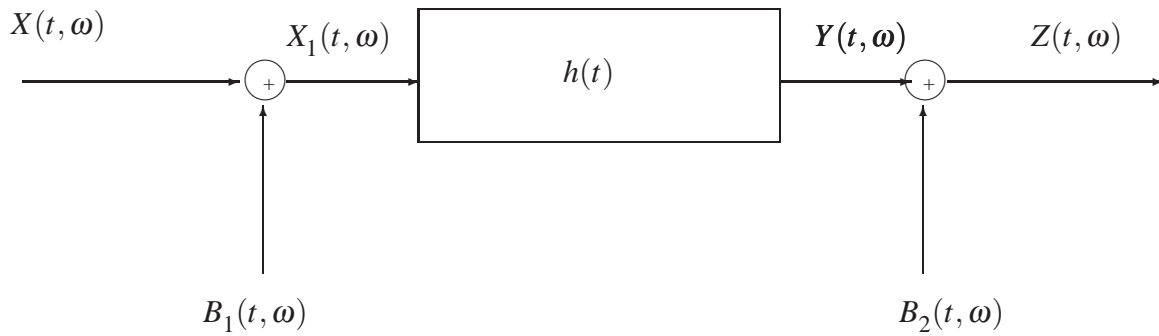


FIG. I.4: Filtre bruité en entrée et en sortie

Question 2 :

En notant toujours $X_T(t, \omega) = f_T(t)X(t, \omega)$, et en définissant

$$\hat{R}_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t, \omega) X_T^*(t - \tau, \omega) dt,$$

2-a montrez que

$$E \{ \hat{R}_{XX}(\tau) \} = g(\tau) R_{XX}(\tau),$$

où $g(\tau)$ est une fonction dont vous donnerez l'expression. Représentez $g(\tau)$ lorsque $f_T(t) = \text{rect}_T(t/T)$.

2-b En utilisant l'égalité de Plancherel-Parseval, montrez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) e^{j2\pi f \tau} df,$$

et déduisez en que la transformée de Fourier de $R_{xy}(\tau)$ vaut $X(f)Y^*(f)$, où $X(f)$ et $Y(f)$, sont respectivement les transformées de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$.⁴

2-c Déduisez en que

$$\hat{S}_{XX}(f) = \text{TF} [\hat{R}_{XX}(\tau)] = |X_T(f)|^2.$$

2-d Montrez que

$$E \{ \hat{S}_{XX}(f) \} = \text{TF} [E \{ \hat{R}_{XX}(\tau) \}] = G(f) * S_{XX}(f),$$

où $G(f)$ est la transformée de Fourier de $g(\tau)$ et $S_{XX}(f)$ la densité spectrale de l'entrée $X(t, \omega)$.

Question 3 :

Dans le cas où $f_T(t) = \text{rect}_T(t/T)$, donnez $G(f)$, et représentez $S_{YY}(f)$, si

- $X(t, \omega)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance $N_0/2$,
- $X(t, \omega)$ est une sinusoïde à phase aléatoire, uniforme sur $[0, 2\pi[$, de fréquence f_0 .

Question 4 :

4-a Donnez la densité spectrale de la sortie, $S_{YY}(f)$, en fonction de la densité spectrale de l'entrée, $S_{XX}(f)$, de $G(f)$, et de la fonction de transfert $H(f)$.

4-b Considérons maintenant

$$f_T(t) = \text{rect}_T(t/T) \exp(j2\pi f_1 t).$$

On notera dans la suite $X_T(f, \omega)$ la transformée de Fourier du produit $\text{rect}_T(t/T)X(t, \omega)$.

- Montrez que $S_{YY}(f) = S_{X_T X_T}(f_0 - f_1)$, (cf 1-b)
- exprimez $S_{YY}(f)$ en fonction de $S_{XX}(f)$,
- donnez $Y(t, \omega)$ et $Y(0, \omega)$,
- montrez enfin que $\hat{S}_{YY}(f) = |X_T(f_0 - f_1, \omega)|^2 = |Y(t, \omega)|^2$, (cf 2-c)

5 À quoi peut servir le dispositif

dans lequel on peut faire varier la fréquence f_1 ? Quel serait l'intérêt d'ajouter une intégration supplémentaire en sortie ?

⁴Les x et y donnés dans les deux dernières relations sont des signaux « généraux » : ce ne sont *pas nécessairement* $X(t, \omega)$ et $Y(t, \omega)$.

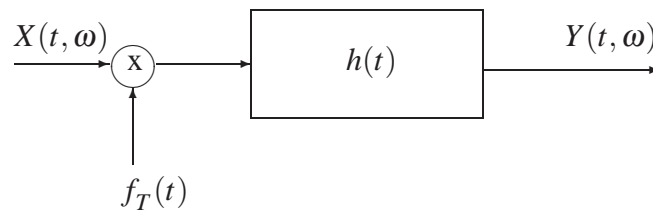


FIG. I.5: Système considéré

Problème III : (Séquence aléatoire binaire)

Soit une série de variables aléatoires binaires indépendantes $\{a_k\}$, pour $k = -\infty.. \infty$. On a

$$\begin{cases} \Pr(a_k = 0) = 1/2, \\ \Pr(a_k = 1) = 1/2, \end{cases}$$

c'est-à-dire une densité de probabilité

$$p(a_k) = \frac{1}{2} [\delta(a_k) + \delta(a_k - 1)],$$

où $\delta(\bullet)$ est l'impulsion de Dirac.

1 – Calculez

$$\begin{aligned} & E\{a_k\}, \\ & \text{Var}\{a_k\} \end{aligned}$$

où $E\{\bullet\}$ désigne l'espérance mathématique, et $\text{Var}\{\bullet\}$ la variance.

2 – On définit un signal aléatoire $x(t)$ selon

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT_b),$$

où T_b est la « période bit ». On supposera que les a_k sont indépendants entre eux.

Représentez une réalisation (quelconque) de ce signal aléatoire.

3 – On considère un filtre de réponse impulsionnelle $s(t)$, où $s(t)$ est une fonction déterministe définie sur $[0, T_b]$. On note $y(t)$ la sortie de ce filtre soumis à l'entrée $x(t)$.

Donnez l'expression générale de $y(t)$.

À titre d'illustration, on considèrera $s(t) = \text{rect}_{T_b/2}(t - T_b/4) - \text{rect}_{T_b/2}(t - 3T_b/4)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} s(t) = 1 & \text{pour } t \in [0, T_b/2] \\ s(t) = -1 & \text{pour } t \in [T_b/2, T] \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Représentez graphiquement la sortie du filtre pour la réalisation

$$\{\dots a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1, \dots\}.$$

4 – Calculez la moyenne statistique de $y(t)$, $E\{y(t)\}$ (on demande ici l'expression générale en fonction de $s(t)$). Représentez $E\{y(t)\}$ dans le cas particulier (I.13). Ce signal est-il stationnaire ? Dans le cas particulier, donnez également la moyenne temporelle de $y(t)$.

5 – Lorsqu'on le système n'est pas synchrone, on ne connaît pas les instants d'apparition du signal, et on modélise le signal comme

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k s(t - kT_b + \theta),$$

où θ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, T_b]$. On considèrera que les $\{a_k\}$ et θ sont indépendants. On notera qu'une somme infinie d'intégrales définies sur des intervalles consécutifs est une intégrale définie sur $[-\infty, \infty]$, et on notera $m_a = E\{a_k\}$, et $m_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)du$. Calculez la moyenne statistique de $x(t)$. Ce signal est-il stationnaire ?

6 – En utilisant le même modèle de signal que pour la question précédente, montrez que

$$R_{YY}(\tau) = \frac{1}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{aa}(k)R_{SS}(\tau - kT_b),$$

où $R_{aa}(k)$ représente la l'autocorrélation éventuelle des a_k . Cette expression de la fonction de corrélation pour un « code en ligne » rendu stationnaire par l'introduction de la variable θ , est appelé formule de BENETT.

plain

plain