Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris ——— E.S.I.E.E.	Unité : EL301 TD Signaux aléatoires Date : janvier 2003	Classe I3

Remis par M. J.-F. BERCHER

ÉNONCÉ

Exercice 1 : On considère le processus aléatoire $x(t)$ défini par $x(t) = B(\omega) + A(\omega)\cos\big(2\pi f_0 t + \phi(\omega)\big)$ où $A(\omega), B(\omega)$, et $\phi(\omega)$ sont des variables aléatoires indépendantes, $\phi(\omega)$ est une variable uniformément distribuée entre 0 et 2π, et on note $\mathrm{E}\left\{A\right\} = m_A$, $\mathrm{E}\left\{A^2\right\} = e_A^2$, $\mathrm{E}\left\{B\right\} = m_B$, $\mathrm{E}\left\{B^2\right\} = e_B^2$. Calculez la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $x(t)$. Le signal $x(t)$ est-il faiblement stationnaire à l'ordre 2 ?

Exercice 2 : Soit $x(n)$ un signal aléatoire à temps discret faiblement stationnaire du second ordre. On définit

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n)\cos\left(2\pi f_0 n + \phi(\omega)\right), \\ z(n) &= x(n)\cos\left(2\pi (f_0+\lambda) n + \phi(\omega)\right) \end{aligned}$$

où $\phi(\omega)$ est une variable uniformément distribuée entre 0 et 2π, indépendante de $x(n)$. On note m_X et $R_{XX}(k)$ la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $x(n)$.

Montrez que $y(n)$ et $z(n)$ sont faiblement stationnaires d'ordre deux, et que $y(n)+z(n)$ n'est par contre pas stationnaire d'ordre 2.

Exercice 3 : On cherche à prédire l'évolution d'un signal stationnaire discret $x(n)$ à partir de ses valeurs précédentes $x(n-1)$, en formant l'estimation $\hat{x}(n) = ax(n-1)$.

Déterminez la valeur optimale de a qui minimise l'erreur quadratique moyenne $\mathrm{E}\left\{|\hat{x}(n) - x(n)|^2\right\}$?. De la même manière, on pourra chercher à prédire $x(n)$ à partir de p valeurs précédentes selon $\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)$.

Exercice 4 : Soit un filtre RC passif passe-bas du premier ordre, avec R la résistance et C la capacité. L'entrée du filtre est un signal aléatoire blanc, centré, de densité spectrale de puissance $No/2$. Calculez la moyenne, la densité spectrale de puissance, et la puissance du signal de sortie $y(t)$. Donnez également la bande de bruit équivalente.

On utilisera le fait que la primitive de $1/(a^2+x^2)$ est $\frac{1}{a}\mathrm{arctg}(x/a)$.

Exercice 5 : Soit un processus aléatoire discret $x(n)$ blanc et centré, de variance σ^2. On définit deux nouveaux signaux aléatoires $y(n)$ et $z(n)$ par les relations

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) + bx(n-1), \\ z(n) &= x(n) + az(n-1), \end{aligned}$$

avec $a < 1$. Calculez les moments d'ordre 1 et 2 de $y(n)$ et $z(n)$. On pourra admettre que $\mathrm{E}\left\{x(n)z(n-k)\right\} = 0$ pour $k > 0$.

Exercice 6 : Soit un filtre passe-bas idéal de fonction de transfert $H(f)$, $H(f) = 1$ pour $|f| \leq B/4$ et 0 ailleurs. L'entrée du filtre est un processus aléatoire gaussien $x(t)$ de moyenne m_X et de densité spectrale de puissance $S_{XX}(f)$, avec $S_{XX}(f) = 1$ pour $|f| \leq B/2$ et 0 ailleurs. Calculez la variance de $x(t)$, la moyenne, la variance et la fonction d'autocorrélation de la sortie du filtre $y(t)$. Donnez la loi de $y(t)$.