Remis par M. J.-F. BERCHER

ÉNONCÉ

Exercice 1 : On considère le processus aléatoire $X(t,\omega)$ défini par $X(t,\omega) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \phi(\omega)\right)$ où $\phi(\omega)$ est une variable uniformément distribuée entre 0 et 2π. Calculez la moyenne et la fonction d'autocorrélation de $X(t,\omega)$. Le signal $x(t)$ est-il stationnaire (à l'ordre 2) ? Montrez que le signal est ergodique (à l'ordre 2) en calculant les moyennes temporelles.

Exercice 2 : On cherche à prédire l'évolution d'un signal stationnaire discret $x(n)$ à partir de ses valeurs précédentes $x(n-1)$, en formant l'estimation $\hat{x}(n) = ax(n-1)$.
Déterminez la valeur optimale de a qui minimise l'erreur quadratique moyenne $\mathrm{E}\left\{|\hat{x}(n) - x(n)|^2\right\}$. De la même manière, on pourra chercher à prédire $x(n)$ à partir de p valeurs précédentes selon

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i).$$

Exercice 3 : On dispose d'un mélange bruité d'un signal d'intérêt $s(n)$ et d'un bruit $b(n)$ supposé blanc gaussien de variance σ^2. Le problème est de déterminer l'amplitude A et le retard n_0 dans le mélange

$$x(n) = As(n-n_0) + b(n).$$

On montre que le rapport signal-à-bruit est maximum en sortie du filtre adapté de réponse $h(k) = s(-k)$. Vérifiez que la sortie $y(n)$ de ce filtre s'exprime comme la somme de deux fonctions de corrélation. Calculez la variance σ^2_{out} du bruit de sortie. On prend pour $s(n)$ une impulsion rectangulaire de largeur L. Tracez un exemple de signal observé et de sortie du filtre adapté. Quelle doit être l'amplitude A minimale pour que l'on obtienne la position après un seuillage à $3\sigma_{out}$ (correspondant à une proba d'erreur de 1%) ?

Exercice 4 : On considère N points d'un signal aléatoire $x(n,\omega)$, pour lequel on peut définir la TF $X_N(f,\omega)$ (définie sur ces N points). Calculer la moyenne (statistique) de $X(f,\omega)$. Montrez que son moment d'ordre 2 s'écrit comme le produit de convolution de la densité spectrale de puissance $S_{XX}(f)$ avec une fonction $G(f)$ que l'on précisera. Que devient ce résultat lorsque N tend vers l'infini ?

Exercice 5 : Trouver la réponse impulsionnelle $h(k)$ d'un filtre FIR d'ordre p permettant de débruiter au mieux (au sens de l'erreur quadratique) un signal $x(n) = s(n) + b(n)$.

Exercice 6 : Soit un filtre RC passif passe-bas du premier ordre, avec R la résistance et C la capacité. L'entrée du filtre est un signal aléatoire blanc, centré, de densité spectrale de puissance $N_o/2$. Calculez la moyenne, la densité spectrale de puissance, la fonction d'autocorrélation et la puissance du signal de sortie $y(t)$. Si le signal d'entrée est blanc gaussien, quelle est la loi (à un instant) de la sortie ?