



Calcul théorique du bruit de phase dû au dithering dans un oscillateur contrôlé numériquement

Geneviève Baudoin⁽¹⁾, J.-F. Bercher⁽¹⁾, C. Joubert^(1,2)

(1) ESIEE, Equipe systèmes de Communications et microsystèmes, ESYCOM, EA 2552,
2 Bd Blaise Pascal, 93162 Noisy Le Grand cedex

(2) STMicroelectronics, 12 rue Jules Horowitz, BP217, 38019 Grenoble
g.baudoin@esiee.fr, jf.bercher@esiee.fr, joubertc@esiee.fr, cyril.joubert@st.com

Résumé

Ce papier présente le calcul théorique de la densité spectrale de puissance (dsp) de la sortie d'un oscillateur commandé numériquement (DCO Digitally Controlled Oscillator) dont la fréquence de sortie est déterminée par la commutation de condensateurs. La fréquence de sortie du DCO ne peut prendre que certaines valeurs déterminées par les valeurs possibles des capacités. La résolution fréquentielle est améliorée par un procédé de lissage par dithering qui consiste à commuter deux valeurs de capacité à une fréquence élevée. La fréquence générée dépend de la capacité moyenne obtenue qui est fonction des pourcentages de temps respectifs où les capacités sont sélectionnées.

Nous donnons l'expression exacte de la dsp pour un signal de dithering quelconque. Nous montrons en particulier que la dsp décroît en $1/f^4$ et nous donnons les principales caractéristiques sous forme analytique. Nous validons l'expression exacte en la comparant aux résultats obtenus par estimation sur des signaux simulés. La formule exacte permet de comprendre le comportement d'une boucle à verrouillage de phase (PLL) utilisant ce type de DCO.

I. Introduction et principe du DCO

Staszewski et ses collègues [1] ont récemment proposé un nouveau type de PLL totalement numérique potentiellement utilisable dans tous les systèmes radio. L'approche proposée permet une bonne portabilité d'une génération CMOS à l'autre et une synthèse de fréquence fractionnaire inhérente à la structure. Sa capacité à supporter une modulation de phase offre la possibilité de réaliser des émetteurs très intégrés et reconfigurables.

Le principe de cette ADPLL repose sur l'utilisation d'un DCO [2] permettant ainsi que les processus de comparaison de phase et de filtrage de boucle soient numériques. Le DCO proposé en [2] est un oscillateur différentiel de type LC dont la fréquence est déterminée par une commande numérique qui commute des condensateurs choisis dans un ensemble comprenant des valeurs de capacités en pondération binaire, en évitant tout réglage analogique. Le réglage analogique d'un VCO est en effet particulièrement délicat en technologie CMOS submicronique à cause de la forte non-linéarité de la relation tension-fréquence et du gain important du VCO $\Delta f / \Delta V$.

Les performances des procédés de lithographie CMOS actuels permettent de maîtriser la réalisation de très faibles valeurs de capacités (quelques dizaines d'attofarads). La plus faible capacité commutée δC_{\min} conditionne la résolution du DCO. La résolution obtenue n'est cependant pas assez fine (une vingtaine de KHz pour une fréquence centrale de 2,4 GHz et une capacité C totale de 2pF). Cette résolution est améliorée par un procédé de lissage par dithering appliqué sur le LSB (ou plusieurs bits) du mot de contrôle. Ce dithering consiste à commuter une capacité à une fréquence élevée. Le mot de commande du DCO sélectionne alternativement au rythme $1/T$ une capacité C_0 ou une capacité C_1 de façon à obtenir une capacité moyenne C_{moy} . En notant p_0 et p_1 les pourcentages de temps respectifs où C_0 et C_1 sont sélectionnées pendant un cycle de référence T_{ref} (plus long que T), on obtient : $C_{\text{moy}} = p_0 C_0 + p_1 C_1$. Le rapport T_{ref} / T et la différence $\Delta C = |C_0 - C_1|$ conditionnent la résolution fréquentielle.

La résolution obtenue pour la capacité C_{moy} est d'autant meilleure que la vitesse de dithering $1/T$ est grande. Le schéma de dithering entre les valeurs de capacités doit être la plus aléatoire possible pour éviter l'apparition de raies parasites. En pratique, les schémas de dithering sont obtenus avec des modulateurs $\Sigma\Delta$ d'ordre deux ou trois.

Dans [2], Staszewski donne une approximation du spectre de la sortie du DCO dans le cas d'un signal de dithering périodique. Dans [3] nous avons étendu cette approximation au cas d'un signal de dithering aléatoire. Dans ce papier, nous donnons l'expression exacte de la dsp pour un signal de dithering quelconque.

II. Calcul théorique de la densité spectrale de puissance de la sortie d'un DCO avec dithering

Pour établir la formule exacte de la dsp, l'opération de dithering est assimilée à une modulation de fréquence numérique dans laquelle l'horloge des données est la fréquence de dithering $f_{dither}=1/T$ et l'excursion de fréquence Δf est égale à la différence entre les deux valeurs de fréquence f_0 et f_1 correspondant aux deux capacités commutées : C_0 et C_1 .

En notant f_c la fréquence centrale moyenne des deux fréquences synthétisables f_0 et f_1 :

$$\Delta f = \left| \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} - \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}} \right| \approx f_c \frac{\Delta C}{2C}. \quad \text{L'indice de modulation correspondant est égal à : } h = \frac{\Delta f}{f_{dither}} = \Delta f T.$$

On note f_{osc} la fréquence souhaitée en sortie de l'oscillateur. Si la fréquence souhaitée f_{osc} est intermédiaire entre 2 valeurs de fréquences synthétisables par le DCO, par exemple $f_{osc} = f_c + df$, avec $|df| < \Delta f/2$, on peut effectuer un dithering avec des probabilités différentes pour les deux valeurs de capacités, en notant p_0 et p_1 les probabilités de C_0 et C_1 , on obtient alors comme fréquence moyenne f_{osc} :

$$f_{osc} = f_c + df. \quad \text{Avec : } p_1 = \frac{1}{2} + \frac{df}{\Delta f}. \quad \text{On a alors : } f_{osc} = f_c + \frac{\Delta f}{2}(p_1 - p_0).$$

La fréquence instantanée $f_{inst}(t)$ est un signal de type NRZ à deux états $f_c \pm \Delta f/2$. L'impulsion de mise en forme est en théorie de forme rectangulaire $\text{rect}_T(t)$. Par la suite, on normalise cette impulsion de mise en forme et on notera $g(t)$ l'impulsion normalisée telle que :

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) d\tau = \frac{1}{2}$. Dans le cas d'une impulsion rectangulaire $g(t) = \frac{1}{2T} \text{rect}_T(t)$. On note $\text{rect}_T(t)$ un rectangle de durée T , d'amplitude 1 et centrée en $t=0$. On peut écrire la fréquence instantanée sous la forme :

$$f_{inst}(t) = f_c + \sum_k a_k \frac{\Delta f}{2} \text{rect}(t - kT) = f_c + h \sum_k a_k g(t - kT) \quad \text{avec } a_k = \pm 1.$$

Et en mettant en évidence la fréquence moyenne f_{osc} : $f_{inst}(t) = f_{osc} + h \sum_k a_k g(t - kT) - df$

On en déduit que le signal modulé $x(t)$ obtenu à la sortie de l'oscillateur s'écrit :

$$x(t) = A \cos(\omega_{osc} t + \phi(t)) = \Re \left(A e^{j(\omega_{osc} t + \phi(t))} \right) = \Re \left(A e^{j\phi(t)} e^{j\omega_{osc} t} \right). \quad \text{Où } \phi(t) \text{ représente le bruit de phase, avec :}$$

$$\phi(t) = 2\pi h \int_{-\infty}^t \sum_k a_k g(t - kT) - 2\pi df t = \phi(t) - 2\pi df t.$$

L'enveloppe complexe $z(t)$ de $x(t)$ est donnée par : $z(t) = A e^{j\phi(t)} = A e^{-j2\pi df t} e^{j\phi(t)}$.

Les dsp de $x(t)$ et $z(t)$ sont notées $S_x(f)$ et $S_z(f)$. Elles sont liées par : $S_x(f) = \frac{1}{4} S_z(f - f_{osc}) + \frac{1}{4} S_z(f + f_{osc})$.

De même en notant $\tilde{z}(t) = z(t) e^{j2\pi df t} = A e^{j\phi(t)}$, les relations entre les dsp de $x(t)$, $z(t)$ et $\tilde{z}(t)$ sont :

$$S_z(f) = S_{\tilde{z}}(f + df) \quad \text{et} \quad S_x(f) = \frac{1}{4} S_{\tilde{z}}(f - f_{osc} + df) + \frac{1}{4} S_{\tilde{z}}(f + f_{osc} - df) = \frac{1}{4} S_{\tilde{z}}(f - f_c) + \frac{1}{4} S_{\tilde{z}}(f + f_c)$$

En utilisant le principe de la décomposition de Laurent [4] pour les signaux modulés en fréquence à phase continue, on peut réécrire le signal $\tilde{z}(t)$ comme une somme de K signaux PAM (Pulse Amplitude Modulation). Comme l'impulsion élémentaire de fréquence $hg(t)$ ne dure qu'une période T , on peut montrer que $K=1$. Le signal $z(t)$ se réduit donc à un simple signal PAM :

$$\tilde{z}(t) = A e^{j\phi(t)} = \sum_n c_n C(t - nT).$$

Cette décomposition s'applique au cas où h n'est pas entier, ce qui est normalement le cas ici puisque généralement h est très inférieur à 1. Le cas h entier peut cependant être étudié de façon exacte.

L'impulsion de mise en forme $C(t)$ est appelée cloche de Laurent. Elle est définie par : $C(t) = \sin(\psi(t))$. Avec en précisant les expressions pour le cas où $g(t)$ est rectangulaire de durée T :

$$\psi(t) = 2\pi h \int_0^t g(\tau) d\tau = h\pi \frac{t}{T}, \quad \forall t \in [0, T[, \quad \psi(t) = \pi h - \psi(t - T) = h\pi - h\pi \frac{t - T}{T}, \quad \forall t \in [T, 2T[, \quad \psi(t) = 0, \quad \forall t \notin [0, 2T].$$

Les variables aléatoires c_n sont définies par : $c_n = A \exp \left(j\pi h \sum_{k=-\infty}^n a_k \right)$.

La densité spectrale de puissance d'un signal PAM peut se calculer par la formule de Bennett, qui donne ici pour le signal $\tilde{z}(t)$ une dsp $S_{\tilde{z}}(f)$ égale à :

$S_z(f) = \frac{1}{T} |C(f)|^2 \sum_n R_c(n) e^{2\pi jfnT}$. Où $C(f)$ est la transformée de Fourier de $C(t)$ et $R_c(n) = E(c_k c_{k-n}^*)$ est l'autocorrélation de la suite de variables aléatoires c_k . Par la suite on note $S_c(f) : S_c(f) = \frac{1}{T} \sum_n R_c(n) e^{2\pi jfnT}$. Et on écrit $S_z(f)$ comme le produit de 2 termes $|C(f)|^2$ et $S_c(f) : S_z(f) = |C(f)|^2 S_c(f)$.

II.1. Calcul du terme $S_c(f)$

On suppose que les variables a_k sont indépendantes.

$$R_c(n) = A^2 E \left(\exp \left(j\pi h \sum_{i=k-n+1}^k a_i \right) \right) = A^2 \prod_{i=k-n+1}^k E(\exp(j\pi h a_i)) = A^2 \prod_{i=k-n+1}^k (\cos(\pi h) + jE(a_i) \sin(\pi h)), \forall n > 0. R_c(0) = A^2 \text{ et } R_c(-n) = R_c^*(n).$$

La valeur moyenne des variables a_i vaut : $E(a_i) = p_1 - p_0$. D'où en notant $\Delta p = p_1 - p_0$ et pour n positif :

$$R_c(n) = A^2 (\cos(\pi h) + j \Delta p \sin(\pi h))^n. \text{ Soit en notant : } m = \cos(\pi h) + j \Delta p \sin(\pi h), R_c(n) = A^2 m^n.$$

On peut ensuite calculer la transformée de Fourier de $R_c(m)$ et écrire :

$$R_c(n) \xrightarrow{\text{TF}} TS_c(f) = A^2 \frac{1 - |m|^2}{1 + |m|^2 - 2 \cos(\pi h) \cos(2\pi fT) - 2 \Delta p \sin(\pi h) \sin(2\pi fT)} \text{ si } |\Delta p| < 1.$$

Quand $|\Delta p| = 1$, $m = \exp(j\pi h) = \exp(j\pi \Delta f T)$, le module de m est égal à 1 et on obtient :

$$R_c(n) \xrightarrow{\text{TF}} TS_c(f) = \frac{A^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{\Delta f}{2} - \frac{k}{T} \right) \text{ si } \Delta p = 1 \text{ et } R_c(n) \xrightarrow{\text{TF}} TS_c(f) = \frac{A^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f + \frac{\Delta f}{2} - \frac{k}{T} \right) \text{ si } \Delta p = -1.$$

La fonction $S_c(f)$ est périodique de période $1/T$. Pour $|\Delta p| < 1$, ses maxima sont obtenus pour les fréquences f_{\max} données par : $\tan(2\pi f_{\max}) = \Delta p \tan(\pi h)$. Et quand h est petit, on peut approximer f_{\max} par : $f_{\max} \approx \Delta p \frac{\Delta f}{2} + \frac{k}{T} = df + \frac{k}{T}$.

Quand la fréquence souhaitée f_{osc} en sortie de l'oscillateur est égale à f_c , les a_i sont de moyenne nulle ($p_1 = p_0 = 1/2$), $R_c(n) = \cos(\pi h)^n$ et sa transformée de Fourier s'écrit :

$$R_c(n) \xrightarrow{\text{TF}} A^2 \frac{1 - |m|^2}{1 + |m|^2 - 2m \cos(2\pi fT)} = A^2 \frac{1 - \cos(\pi h)^2}{1 + \cos(\pi h)^2 - 2 \cos(\pi h) \cos(2\pi fT)}.$$

Les maxima sont obtenus pour la fréquence nulle et pour les fréquences multiples de $1/T$. Ils sont égaux à :

$$\max \left(A^2 \frac{1 - |m|^2}{1 + |m|^2 - 2m \cos(2\pi fT)} \right) = A^2 \frac{1 + \cos(\pi h)}{1 - \cos(\pi h)} = \frac{A^2}{\tan^2 \left(\frac{\pi h}{2} \right)} \text{ et } \max(S_c(f)) = \frac{1}{T} \frac{A^2}{\tan^2 \left(\frac{\pi h}{2} \right)}.$$

II.2. Calcul du terme $|C(f)|^2$

La transformée de Fourier de $C(t)$ est égale à :

$$|C(f)|^2 = \left(\frac{h}{2\pi T \sin(\pi h)} \frac{\cos(\pi h) - \cos(2\pi fT)}{\left(f^2 - \frac{h^2}{4T^2} \right)} \right)^2 \text{ avec } \left| C \left(\pm \frac{h}{2T} \right) \right|^2 = \left| C \left(\pm \frac{\Delta f}{2} \right) \right|^2 = T^2.$$

La fonction $|C(f)|^2$ est paire. Elle est maximale à l'origine avec $|C(0)|^2 = \frac{4T^2}{\pi^2 h^2} \text{tg}^2 \left(\frac{\pi h}{2} \right)$. Elle s'annule pour les fréquences : $f = \pm \frac{\Delta f}{2} + \frac{k}{T}$ avec $k \neq 0$. Quand h est petit, $|C(f)|^2$ est très proche d'un sinus cardinal au carré.

II.3. Expression des densités spectrales de puissance

Finalement, la dsp de $\tilde{z}(t)$ est le produit d'une fonction $|C(f)|^2$ maximale à l'origine par une fonction périodique $S_c(f)$ présentant des maxima espacés d'une période $1/T$. Les expressions exactes des dsp de $\tilde{z}(t)$ et de $x(t)$ sont données par les expressions suivantes selon que $|\Delta p|$ est égal à 1 ou est strictement inférieur à 1 :

Cas $|\Delta p| = 1$: si $\Delta p = 1$ $S_z(f) = A^2 \delta\left(f - \frac{\Delta f}{2}\right)$ et $S_x(f) = \frac{A^2}{4} \delta\left(f - f_{osc} - \frac{\Delta f}{2}\right) + \frac{A^2}{4} \delta\left(f + f_{osc} + \frac{\Delta f}{2}\right)$

si $\Delta p = -1$ $S_z(f) = A^2 \delta\left(f + \frac{\Delta f}{2}\right)$ et $S_x(f) = \frac{A^2}{4} \delta\left(f - f_{osc} + \frac{\Delta f}{2}\right) + \frac{A^2}{4} \delta\left(f + f_{osc} - \frac{\Delta f}{2}\right)$.

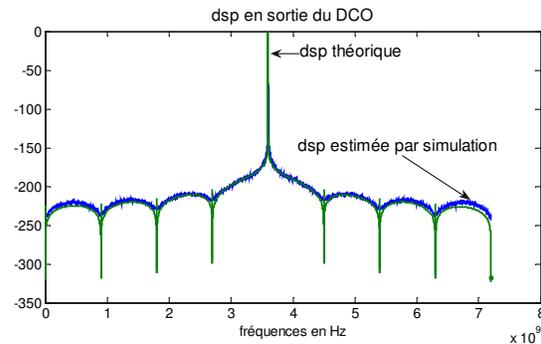
Cas $|\Delta p| < 1$: $S_z(f) = \frac{A^2}{T} \left(\frac{h(\cos(\pi h) - \cos(2\pi fT))}{2\pi T \sin(\pi h) \left(f^2 - \frac{h^2}{4T^2}\right)} \right)^2 \frac{1 - |m|^2}{1 + |m|^2 - 2\cos(\pi h)\cos(2\pi fT) - 2(p_1 - p_0)\sin(\pi h)\sin(2\pi fT)}$.

Avec $S_z(h/(2T)) = A^2 T \frac{1 + \Delta p}{1 - \Delta p}$ et $S_z(-h/(2T)) = A^2 T \frac{1 - \Delta p}{1 + \Delta p}$. Et $S_x(f) = \frac{1}{4} S_z(f - f_c) + \frac{1}{4} S_z(f + f_c)$.

Quand $\Delta p = 0$, la dsp de \tilde{z} est maximale à l'origine et vaut $S_z(0) = \frac{4A^2 T}{\pi^2 h^2}$. Cette amplitude est proportionnelle au rapport $\frac{T}{h^2} = \frac{1}{T\Delta f^2}$ où Δf est proportionnel à ΔC . La largeur de bande à 3dB vaut approximativement $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} T\Delta f^2$. Pour les valeurs de Δp non nulles, on obtient le même type de résultat mais pour la fréquence du maximum df . De plus $S_z\left(\frac{\Delta f}{2}\right) = 0$.

On peut d'autre part remarquer que la dsp décroît en $1/f^4$ quand f tend vers l'infini.

III. Résultats expérimentaux



La figure illustre le résultat obtenu en comparant la dsp obtenue à partir de l'expression théorique exacte et la dsp obtenue par estimation sur un signal simulé, pour $f_c = 3,6\text{GHz}$, $1/T = f_c/4$, $\Delta C = 30\text{aF}$, $\Delta f = 13,846\text{KHz}$. On constate la similitude des résultats.

IV. Conclusion

Nous avons établi l'expression théorique exacte de la densité spectrale de puissance en sortie d'un DCO lissé par dithering. Cette expression permet de caractériser analytiquement les caractéristiques de la dsp et d'analyser une des contributions au bruit de phase en sortie d'une PLL utilisant ce DCO : nous avons en effet constaté lors des simulations que la dsp du signal de sortie de l'ADPLL présentait une décroissance en $1/f^4$ quel que soit le type de filtre de boucle.

On a supposé que le dithering était effectué par une commande binaire. Le cas d'un dithering par un modulateur $\Sigma\Delta$ multi-niveaux peut être obtenu de la même façon, mais le résultat est très complexe et présente moins d'intérêt pratique.

- [1] R. B. Staszewski and P. T. Balsara, « Phase-Domain All-Digital Phase-Locked Loop », *IEEE trans. on circuits and System*, vol. 52, no. 3, March 2005. pp. 159-163.
- [2] R. B. Staszewski et al, « A first multigigahertz digitally controlled oscillator for wireless applications », *IEEE trans. on MTT*, vol 51, N°11, Nov 2003. pp. 2154-2164.
- [3] C. Joubert, J.-F. Bercher, G. Baudoin, T. Diveil, « Time Behavioral Model for Phase Domain ADPLL based frequency synthesizer », *Proc. of IEEE conference RWS 2006*, San Diego, Jan. 2006.
- [4] P. A. Laurent, « Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulses », *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-34, 1986, pp. 150-160.
- [5] U. Mengali, M. Morelli, « Decomposition of M-ary CPM signals into PAM waveforms », *IEEE Transactions on Information Theory* Volume 41, Issue 5, Sep 1995, pp. 1265 - 1275.