

# TRAITEMENT D'ANTENNE AVEC ADÉQUATION DE MODÈLE

J.-F. BERCHER<sup>(\*)</sup> et P. LARZABAL<sup>(\*\*)</sup>

<sup>(\*)</sup> *Laboratoire des Signaux et Systèmes,  
Plateau de Moulon 91192 Gif sur Yvette Cedex*

<sup>(\*\*)</sup> *Laboratoire d'Électricité Signaux et Robotique,  
61, av. du Président Wilson 94235 Cachan Cedex*

## Résumé

Cet article constitue une introduction aux problèmes de traitement d'antenne analysés dans ce numéro spécial. Il a un double objet : d'une part donner un modèle mathématique simple et un formalisme unique couvrant l'ensemble des applications présentées dans ce document ; et d'autre part donner quelques éléments sur plusieurs méthodes « classiques » en traitement d'antenne, classiques dans le sens où elles ne tiennent pas compte des problèmes d'erreurs de modèle.

**Mots-clé** Traitement d'antenne, hypothèses classiques, formation de voie, imagerie, méthodes haute résolution, maximum de vraisemblance.

## Abstract

This paper is an introduction to the array processing problems analysed in this special issue. The objective is twofold. First, to give a simple mathematical model and a formalism ranging the applications presented in the issue. Second, to give some elements on several “classic” methods of array processing, classic in the sense that they do not take into account model errors problems.

**Keywords** Array processing, classic hypothesis, beamforming, imaging, high resolution methods, maximum likelihood.

## 1 Introduction

Dans de nombreux domaines comme l'acoustique, la géophysique, l'astronomie, les télécommunications, l'imagerie médicale, ..., les signaux fournis par un réseau de capteurs, formant une *antenne*, sont utilisés afin de caractériser un ou plusieurs émetteurs potentiels appelés *sources*. L'objectif du *traitement d'antenne* est ainsi de décrire une ou plusieurs caractéristiques d'un environnement physique à partir de mesures dépendant de l'espace et du temps. D'une manière générale, c'est un traitement particulier des signaux issus des capteurs qui livre les informations recherchées sur le champ d'ondes créé par les sources. Ce traitement constitue ce qu'on appelle le traitement d'antenne ou, plus généralement le traitement spatial. Il recouvre aussi bien la détection de sources, la sé-

paration de sources et l'imagerie de champ de sources [Munier75, Mermoz76]. La *détection* de sources consiste à dénombrer les sources. La *séparation* vise à restituer les signaux issus des sources, sans recourir à une paramétrisation spatiale. L'*imagerie*, quant à elle, a pour objet de donner une image du milieu en détectant et caractérisant l'ensemble — fini ou infini — des sources (nombre, position spatiale, amplitude, spectre, polarisation, retard de groupe, décalage Doppler...).

L'antenne réalise donc une *interface* entre l'environnement naturel et les signaux mesurables. Les capteurs sont des transducteurs de toute nature : on trouve des capteurs acoustiques, électromagnétiques, de vibration, de torsion, d'effort... Parmi ceux-ci, les capteurs acoustiques et électromagnétiques peuvent fonctionner en mode *actif*, c'est à dire qu'ils peuvent générer une

« stimulation » d'une ou plusieurs caractéristiques du milieu, et enregistrer une réponse spécifique. Par opposition, les capteurs utilisés en simple « écoute » sont qualifiés de *passifs*.

## 2 Introduction du modèle et des notations

L'établissement d'un modèle mathématique simple requiert les hypothèses physiques suivantes : le champ est stationnaire, le milieu de propagation est homogène et isotrope. Le milieu se comporte alors comme un *filtre* linéaire, et le champ au point  $\mathbf{r}$  s'écrit

$$e(\mathbf{r}, t) = \iint G(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}, t - t')s(\boldsymbol{\sigma}, t') d\boldsymbol{\sigma} dt', \quad (1)$$

où  $s(\boldsymbol{\sigma}, t)$  représente le champ imagé et  $G$  est la fonction de Green décrivant les caractéristiques du milieu. Lorsque le champ est recueilli par l'intermédiaire d'un capteur placé en  $\mathbf{r}_i$ , il faut tenir compte de la directivité et du gain du capteur, et la relation précédente devient

$$x_i(t) = x(\mathbf{r}_i, t) = \iint h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, t - t')s(\boldsymbol{\sigma}, t') d\boldsymbol{\sigma} dt' + b_i(t), \quad (2)$$

où  $h_i$  inclue maintenant les caractéristiques du capteur. Le terme  $b_i(t)$  représente quant à lui un bruit additif.

Notons que la relation précédente correspond à des sources immobiles. La situation est un peu différente lorsque les sources sont en mouvement : l'effet Doppler qui en résulte ne s'interprète évidemment pas comme un effet linéaire. Cependant, l'exploitation de l'hypothèse « bande étroite » développée au paragraphe suivant permet d'aboutir à une formulation commune.

Le but de cette section est de dégager et d'expliquer les hypothèses fondamentales en traitement d'antenne. Ce faisant, les buts du traitement d'antenne sont soulignés, et deux situations distinctes sont mises en exergue : l'imagerie d'un champ continu et le modèle de sources ponctuelles.

### 2.1 L'hypothèse bande étroite

Cette hypothèse permet de séparer la contribution énergétique du champ des effets de la propagation. Il s'agit par conséquent d'une hypothèse fondamentale pour obtenir un modèle mathématique simple à manipuler.

La transformée de Fourier de la partie utile de (2) s'écrit

$$\int h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, \nu)s(\boldsymbol{\sigma}, \nu) d\boldsymbol{\sigma}, \quad (3)$$

où  $h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, \nu)$  et  $s(\boldsymbol{\sigma}, \nu)$  désignent respectivement les transformées de Fourier de  $h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, t)$  et  $s(\boldsymbol{\sigma}, t)$ .

Lorsque le champ est bande étroite, c'est-à-dire lorsque la fréquence varie peu autour d'une fréquence porteuse  $\nu_0$ , on a

$$s(\boldsymbol{\sigma}, t) \approx s(\boldsymbol{\sigma}, \nu_0)e^{-j2\pi\nu_0 t} = s(\boldsymbol{\sigma})e^{-j2\pi\nu_0 t}, \quad (4)$$

et la relation (2) se réduit à

$$x_i(t) = e^{-j2\pi\nu_0 t} \int h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, \nu_0)s(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma} + b_i(t). \quad (5)$$

En introduisant maintenant le vecteur d'observation rassemblant les mesures sur les  $M$  capteurs

$$\mathbf{x}^T(t, \nu_0) = [x_1(t, \nu_0), \dots, x_M(t, \nu_0)], \quad (6)$$

on obtient

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t, \nu_0) = e^{-j2\pi\nu_0 t} \int s(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}(t, \nu_0), \\ \text{avec } \mathbf{a}^T(\boldsymbol{\sigma}) = [h_1(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_1, \nu_0), \dots, h_M(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_M, \nu_0)]. \end{cases} \quad (7)$$

Rappelons que  $h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, \nu_0)$  dépend bien sûr du *trajet* et de la direction définis par  $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i$ , mais intègre également les caractéristiques du milieu de propagation et du capteur considéré. On peut ainsi poser

$$h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, \nu_0) = |h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, \nu_0)|e^{j2\pi\nu_0 T(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, \nu_0) + j\phi_i(\nu_0)}, \quad (8)$$

où  $|h_i(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, \nu_0)|$  mêle une atténuation due à la propagation et le gain du capteur,  $T(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, \nu_0)$  représente le *temps de propagation* entre l'élément de champ situé en  $\boldsymbol{\sigma}$  et le capteur positionné en  $\mathbf{r}_i$ . Enfin,  $\phi_i(\nu_0)$  est un déphasage supplémentaire lié au capteur. Il sera également souvent commode de faire apparaître le *retard de propagation*  $\tau_{ik}$  entre deux capteurs :

$$\tau_{ik} = T(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_i, \nu_0) - T(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_k, \nu_0).$$

Lorsque les signaux sources ne sont pas bande étroite, l'utilisation de ce modèle requiert un *filtrage préalable* des données. Ce filtrage est souvent opéré en prenant pour  $\mathbf{x}$  la *transformée de Fourier* de  $\mathbf{x}(t)$  en une fréquence particulière  $\nu_0$ . Il est enfin possible d'omettre la dépendance temporelle et le rappel de la fréquence  $\nu_0$  en notant simplement

$$\mathbf{x} = \int s(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}. \quad (9)$$

Cette dernière relation est obtenue soit après démodulation complexe des signaux observés, soit en ne collectant dans  $\mathbf{x}$  que les amplitudes complexes de la transformée de Fourier de  $\mathbf{x}(t)$  en  $\nu_0$ .

## 2.2 Paramétrisation

La connaissance du modèle de propagation et des caractéristiques du réseau (géométrie, gains) permet de relier, par une fonction *connue*, le vecteur  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma})$  à un ensemble de paramètres physiques pertinents résumés dans un vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ , et l'on note par  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$  la dépendance *explicite* du vecteur  $\mathbf{a}$  en  $\boldsymbol{\theta}$ . Le vecteur ainsi paramétré  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$  est appelé *vecteur directionnel* (« steering vector ») ou *vecteur source*, et l'on réserve le terme de *signature* au vecteur non paramétré  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma})$ .

Considérons à titre d'exemple un champ d'onde sphérique sur une antenne linéaire (figure 1), dont les capteurs, supposés *neutres* (gain unitaire), sont séparés d'une distance  $d$ . Les paramètres pertinents sont ici la distance  $D$  de la source au premier capteur et la distance  $H$  de la source au plan de l'antenne. La distance intercapteurs  $d$  et la célérité  $c$  dans le milieu à la fréquence  $\nu_0$  étant supposés connues, on pose  $\boldsymbol{\theta} = [D, H]$ . Le vecteur  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$  s'écrit alors

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) = \left[ 1/R_1 e^{j2\pi\nu_0 R_1/c}, \dots, 1/R_M e^{+2\pi\nu_0 R_M/c} \right], \quad (10)$$

avec

$$R_m = (H^2 + (D + md)^2)^{1/2}. \quad (11)$$

Notons que  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$  est indépendant d'une rotation de la source autour de l'axe formé par l'antenne, ce qui entraîne, *avec une antenne linéaire*, une *ambiguïté* sur la position des sources.

Lorsque  $R$  devient très grand devant les dimensions de l'antenne, le front d'onde apparent est *plan*. Ce modèle est très utilisé en raison de sa pertinence dans nombre de problèmes physiques et de sa simplicité.<sup>1</sup>

En effet, dans le cas d'un modèle de propagation par ondes planes, il est possible d'exprimer le retard de propagation entre deux capteurs comme le produit scalaire

$$\tau_{ik} = \mathbf{r}_{ik}^* \mathbf{k}, \quad (12)$$

où  $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$  est le vecteur caractérisant le couple formé par les deux capteurs considérés, et  $\mathbf{k}$  le *vecteur d'onde*, orthogonal aux fronts d'onde.

Pour illustrer plus avant cette paramétrisation, considérons à nouveau un réseau linéaire (figure 2). Lorsque le front d'onde incident est *plan*, le vecteur paramètre  $\boldsymbol{\theta}$  se réduit à l'azimut  $\theta$  et on peut relier le retard de propagation  $\tau$  entre deux capteurs successifs à l'azimut par

$$\tau = \mathbf{r}^* \mathbf{k} = \frac{d \sin(\theta)}{c}. \quad (13)$$

Le retard  $\tau_k$  entre les capteurs 1 et  $k$  est ainsi simplement  $\tau_k = (k-1)\tau$ , et les phases sont en progression

arithmétique le long de l'antenne. Dans ce cas le vecteur source est proportionnel à

$$\mathbf{a}(\theta)^T = \left[ 1 e^{j2\pi\nu_0 \frac{d \sin(\theta)}{c}} \dots e^{j2\pi\nu_0 (M-1) \frac{d \sin(\theta)}{c}} \right], \quad (14)$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}(\theta)^T = [1 e^{j2\pi u(\theta)} \dots e^{j2\pi (M-1) u(\theta)}], \\ \text{où l'on a noté } u(\theta) = \frac{d \sin(\theta)}{\lambda}. \end{array} \right. \quad (15)$$

Le vecteur source décrit une variété monodimensionnelle quand l'azimut décrit son domaine de définition. La collection de toutes les réponses sur le domaine de définition est appelé *variété d'antenne*.

Le vecteur source défini en (15) est à nouveau insensible à une rotation autour de l'axe de l'antenne. De plus, il est indépendant des effets de la propagation (atténuation, retard) jusqu'au premier capteur. L'utilisation de ce vecteur source ne permet donc pas de remonter à l'amplitude ou la puissance émise en  $\boldsymbol{\sigma}$  mais simplement aux caractéristiques énergétiques du signal recueilli sur l'antenne *en provenance* du champ situé dans les directions définies par  $\theta$ .

Dans ces deux exemples, nous avons constaté que la paramétrisation du vecteur source (modèle de propagation, géométrie de l'antenne) peut être insuffisante pour décrire complètement la position  $\boldsymbol{\sigma}$  des sources. En décomposant alors le vecteur position  $\boldsymbol{\sigma}$  en  $\boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ , où  $\boldsymbol{\alpha}$  désigne les paramètres de position dont dépend  $\boldsymbol{\theta}$ , l'intégrale (9) se réduit à

$$\mathbf{x} = \int s(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b}, \quad (16)$$

où  $s(\boldsymbol{\alpha})$  intègre maintenant les paramètres de position et de propagation qui ne sont pas pris en compte par la paramétrisation  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$ . Pour le modèle d'ondes sphériques, on a ainsi

$$s([D, H]) = \int s([D, H, \psi]) d\psi, \quad (17)$$

où  $\psi$  est l'angle de rotation autour de l'antenne; et pour le modèle d'ondes planes,

$$s(\theta) = \int s([R, \theta, \psi]) G(R) dR d\psi, \quad (18)$$

où  $R$  est la distance des sources au premier capteur. Notons que dans ces deux exemples, les vecteurs  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\theta}$  coïncident, ce qui ne sera pas le cas si  $\boldsymbol{\theta}$  intègre des paramètres inconnus (ou malconnus) indépendants de la position des sources.

Pour terminer ce paragraphe, intéressons nous au cas de capteurs actifs illuminant une source en mouvement. On s'intéresse alors au retard entre l'instant d'émission de l'onde et de réception de l'onde réfléchi.

1. Le modèle d'ondes planes sur une antenne rectiligne à capteurs équiespacés, revêt en outre une importance considérable pour réaliser une analogie entre certaines méthodes de traitement d'antenne et l'estimation spectrale.

Si la cible est en mouvement à la vitesse  $v(\boldsymbol{\sigma})$ , la fréquence apparente  $\nu_0$  est liée à la fréquence émise  $\nu$  par

$$\nu = \nu_0[1 + v(\boldsymbol{\sigma})/c], \quad (19)$$

et le retard entre l'émission et la réception s'écrit

$$T_i(\boldsymbol{\sigma}) = 2(R_i(\boldsymbol{\sigma}) - v(\boldsymbol{\sigma})t)/c, \quad (20)$$

où  $R_i(\boldsymbol{\sigma})$  désigne la distance au  $i^e$  capteur. On en déduit donc l'expression de  $\mathbf{a}$  en fonction de la *position*  $\boldsymbol{\sigma}$ .

### 2.3 L'imagerie d'un champ continu

L'imagerie d'un champ continu consiste à étudier la répartition spatiale d'une ou plusieurs propriétés d'un milieu. En général, on recherche la *distribution spatiale d'intensité*  $I_s(\boldsymbol{\sigma})$ , ou la distribution d'intensité  $I_s(\mathbf{n})$  dans la direction  $\mathbf{n}$ , où  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire porté par  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Considérons l'intercorrrelation  $\gamma(\mathbf{r}_{ik})$  entre les mesures sur les capteurs  $i$  et  $k$  :

$$\gamma(\mathbf{r}_{ik}) = E\{x_i(t)x_k^*(t)\}. \quad (21)$$

Plaçons nous dans le cadre d'un modèle de propagation par ondes planes. Supposons de plus que les capteurs sont identiques et de même gain  $f(\nu)$  sur la région  $\mathcal{D}$  étudiée. Dans ces conditions, l'intercorrrelation  $\gamma(\mathbf{r}_{ik})$  ne dépend plus que de la direction d'arrivée  $\mathbf{n}$  de l'onde émise en  $\boldsymbol{\sigma}$ , et, en utilisant de plus l'hypothèse bande étroite,

$$\gamma(\mathbf{r}_{ik}) = \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} |f(\nu_0)|^2 E\{s(\mathbf{n})s^*(\mathbf{n}')\} e^{-j2\pi\nu_0(\mathbf{r}_{ik}^* \mathbf{n}/\lambda)} d\mathbf{n} d\mathbf{n}'. \quad (22)$$

Si le champ est incohérent, c'est-à-dire si

$$E\{s(\mathbf{n})s^*(\mathbf{n}')\} = I_s(\mathbf{n}) \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}'), \quad (23)$$

on obtient

$$\gamma(\mathbf{r}_{ik}) = \int_{\mathcal{D}} |f(\nu_0)|^2 I_s(\mathbf{n}) e^{-j2\pi \mathbf{r}_{ik}^* \mathbf{n}/\lambda} d\mathbf{n}. \quad (24)$$

Ce lien entre la distribution d'intensité  $\gamma_s(\mathbf{n})$  et l'ensemble des corrélations  $\gamma(\mathbf{r}_{ik})$  est l'une des formes du théorème de *Van Cittert-Zernike*.

Lorsque le domaine imagé est de faible extension autour d'une direction principale  $\mathbf{n}_0$ , on peut négliger la contribution au retard dans la direction de référence, et l'expression précédente se réduit à une simple transformée de Fourier bidimensionnelle :

$$\gamma(\mathbf{r}_{ik}) = \int_{\mathcal{D}'} |f(\nu_0)|^2 I_s(\mathbf{u}) e^{-j2\pi \mathbf{r}_{ik}^* \mathbf{u}/\lambda} d\mathbf{u}. \quad (25)$$

Dès lors, la recherche de la distribution d'intensité se résume à une inversion de Fourier

$$I_s(\mathbf{u}) \propto \sum_{\mathbf{r}} \gamma(\mathbf{r}) e^{-j2\pi \mathbf{r}^* \mathbf{u}}. \quad (26)$$

Cette inversion « théorique » fait intervenir des sommations infinies sur des quantités exactes. On pressent déjà que les dimensions nécessairement limitées du réseau vont affecter la résolution en limitant les sommations. D'autre part, l'estimation des corrélations va introduire des fluctuations statistiques. Enfin, l'inversion peut être rendue difficile par l'absence de certaines données (jeu lacunaire).

Sous forme discrète et vectorielle, (25) se met sous forme du système linéaire

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A}\mathbf{I} + \mathbf{b}, \quad (27)$$

où  $\boldsymbol{\gamma}$  est ici l'ensemble des corrélations disponibles,  $\mathbf{I}$  est la distribution d'intensité discrétisée,  $\mathbf{A}$  est la matrice de Fourier, et  $\mathbf{b}$  est un bruit additif rendant compte des difficultés d'estimation.

En relaxant l'hypothèse d'ondes planes, une autre solution est d'utiliser un *filtre spatial*  $\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}_0)$  afin d'estimer la fraction  $x(\boldsymbol{\theta}_0)$  caractérisée par les paramètres  $\boldsymbol{\theta}_0$  selon

$$x(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{w}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{x}. \quad (28)$$

En supposant à nouveau le champ incohérent, la puissance est donnée par

$$E\{|x(\boldsymbol{\theta}_0)|^2\} = \int_{\mathcal{D}} I_s(\boldsymbol{\alpha}) |\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})|^2 d\boldsymbol{\alpha} + \sigma_b^2(\boldsymbol{\theta}_0), \quad (29)$$

où  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$  est le vecteur  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma})$  paramétré. Cette puissance sera d'autant plus proche de  $I_s(\boldsymbol{\sigma})$  que le produit scalaire

$$\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$$

sera sélectif. Nous observerons de plus que cette approche se ramène à l'inversion de Fourier précédente dans le cas d'un modèle d'ondes planes. Enfin, notons que si l'on pose maintenant

$$\mathbf{s} = \int_{\mathcal{D}} s(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\alpha}, \quad (30)$$

la relation (28) devient

$$x(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}_0), \quad (31)$$

où la matrice  $\mathbf{A}$  est réduite au vecteur ligne  $\mathbf{w}^*(\boldsymbol{\theta}_0)$ .

### 2.4 Le modèle de sources ponctuelles

Lorsque le champ est composé d'un nombre fini de sources ponctuelles, on a

$$s(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{p=1}^P s_p \delta(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_p), \quad (32)$$

où  $P$  est le nombre de sources.

La discrétisation du modèle obtenu en (16), utilisant l'hypothèse bande étroite et une paramétrisation  $\boldsymbol{\theta}$  conduit alors à

$$\mathbf{x} = \sum_{p=1}^P s_p \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_p) + \mathbf{b}. \quad (33)$$

Cette relation indique que l'observation non bruitée appartient à un espace vectoriel de dimension  $P$  (si les vecteurs directionnels  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_p)$  sont linéairement indépendants). Cette remarque fondamentale est à l'origine du développement de *méthodes à haute résolution*.

L'expression précédente peuvent être compactée dans l'écriture matricielle

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{b}, \quad (34)$$

où l'élément  $a_{p,m}$  de la matrice  $\mathbf{A}$  est alors la fonction de transfert entre la source d'indice  $p$  et la sortie du capteur d'indice  $m$ , à la fréquence  $\nu_0$ .

À l'issue de cette discussion, nous avons vu apparaître deux classes d'applications et modèles distincts selon la nature, continue ou discrète du champ étudié. Dans les deux cas, le modèle a été formalisé comme la résolution d'un système linéaire bruité, que l'on écrira dans tous les cas

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{b}, \quad (35)$$

où la matrice  $\mathbf{A}$  et le vecteur  $\mathbf{s}$  contiennent la paramétrisation du problème.

Lorsque le champ est continu, la matrice  $\mathbf{A}$  est connue et c'est  $\mathbf{s}$ , ou une fonction de  $\mathbf{s}$  qui est recherchée. Au contraire, pour un modèle de sources ponctuelles, ce sont les colonnes de la matrice  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire les vecteurs sources ou les signatures, qui sont recherchées.

Par ailleurs, on a déjà aperçu en filigrane les difficultés pratiques de calibration : les développements précédents supposent la connaissance parfaite de la géométrie de l'antenne (positions  $\mathbf{r}_i$  des capteurs), des caractéristiques des capteurs et la pertinence du modèle de propagation utilisé.

### 3 Méthodes classiques en traitement d'antenne

Dans cette section nous présentons les fondements des principales méthodes utilisées en traitement d'antenne. Il ne s'agira pas ici d'une présentation exhaustive, mais simplement d'indications permettant au lecteur de mieux situer les approches les plus populaires utilisées dans la suite du document.

D'un point de vue historique, on peut distinguer trois étapes dans l'évolution du traitement d'antenne. Les méthodes d'imagerie d'un champ continu ne font d'hypothèse ni sur la nature des sources ni sur la corrélation du bruit. Il en résulte une grande *robustesse*, bien entendu au détriment des performances en *résolution*. Parmi celles-ci, les méthodes d'inversion de (25) sont présentées en (3.1.1) dans le cadre de la *synthèse de Fourier*. La formation de voies, basée sur l'utilisation d'un filtre spatial (28), est présentée en (3.1.2). La recherche d'une meilleure résolution a conduit au « traitement adaptatif de Capon » et ses dérivées. Cette amélioration en résolution est obtenue en minimisant les contributions du champ qui ne sont pas situées dans la direction scrutée. Cette méthode sera exposée en (3.1.3). Une analogie avec les méthodes d'estimation spectrale, dans le cas d'un modèle de propagation par ondes planes, permet également d'utiliser les techniques de modélisation spectrale, rappelées au (3.1.4). Des méthodes « à haute résolution », présentées au (3.2.1), ont été introduites à la suite des travaux de Ligett et Pisarenko [Ligett72, Pisarenko73]. Elles reposent sur une hypothèse de sources ponctuelles, et sur la connaissance de la matrice de corrélation du bruit. Ces hypothèses supplémentaires permettent d'obtenir un pouvoir de résolution asymptotique illimité. Enfin, des méthodes fondées sur l'utilisation du maximum de vraisemblance sont décrites en (3.2.2)

### 3.1 Méthodes classiques en imagerie d'un champ continu

#### 3.1.1 Synthèse de Fourier

Dans cette section, on donne quelques éléments sur l'inversion de (25). Ce problème est appelé *synthèse de Fourier*. Il est rencontré en particulier en radioastronomie.

En synthèse de Fourier, les données sont des points de la transformée de Fourier de l'objet (la distribution d'intensité). La matrice  $\mathbf{A}$  est alors une matrice de Fourier et  $\mathbf{s}$  est l'objet bidimensionnel, une collection de pixels, codé sous la forme d'un vecteur. Les données forment un jeu lacunaire, c'est à dire que toutes les fréquences ne sont pas mesurables. Le problème est alors de reconstruire l'objet à partir d'une mesure incomplète de sa transformée de Fourier<sup>2</sup>. Nous ne donnerons ici que les méthodes les plus classiques en synthèse de Fourier. L'idée la plus naturelle pour inverser l'équation (35) est d'appliquer la transformée de Fourier inverse aux données  $\mathbf{x}$ . On obtient alors, à un facteur de normalisation près, ce que les radio-astronomes nomment, de façon éloquente, la *dirty map* :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}^* \mathbf{x} \simeq \mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathbf{s}. \quad (36)$$

2. Notons que ce problème se complique d'un bruit additif et de perturbations de phase : la *synthèse d'ouverture* en astronomie est un double problème de synthèse de Fourier et de *calibration de phase*. Ceci est développé dans (Partie I, chap. 4) et (Partie III, chap. 7).

La matrice normale  $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$  est de rang déficient en raison de la couverture fréquentielle incomplète. Ainsi, dans (36), les valeurs inconnues sont implicitement prises à zéro, ce qui peut conduire à des valeurs négatives dans la *dirty map*. De plus, le bruit d'observation n'est pas pris en compte. Une autre possibilité est d'utiliser l'inverse généralisée  $\mathbf{A}^\#$  de  $\mathbf{A}$  pour obtenir

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{A}^\# \mathbf{x}. \quad (37)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  est le plus souvent *mal conditionnée* (les mesures ne coïncident pas avec la grille d'échantillonnage, et certaines lignes de  $\mathbf{A}$  sont presque colinéaires), et transmet ce caractère à son inverse généralisée. Il s'en suit une amplification du bruit, qui peut excéder un niveau acceptable. Notons que cette solution correspond à la solution des moindres carrés sous contrainte de norme minimale (si  $\mathbf{b}$  est gaussien centré).

Une alternative maintenant classique pour traiter ce problème est la *régularisation*. L'idée fondamentale est d'abandonner le souhait d'obtenir la solution exacte à partir de données imparfaites, et éventuellement incomplètes, et de définir une classe de solutions *acceptables* en complétant l'équation (27) par une information supplémentaire, ou *a priori*, caractérisant ce que l'on considère comme une solution « raisonnable » [Demoment89]. Ceci est réalisé en choisissant comme solution régularisée le minimum d'un critère hybride conçu pour

- (i) exprimer une *fidélité* aux données,
- (ii) renforcer certaines propriétés désirables, qui résument les connaissances *a priori* sur la solution.

La majorité des critères employés en régularisation peuvent être reliés à des notions probabilistes, ou peuvent avoir une interprétation d'un point de vue probabiliste. En particulier, les méthodes du « Maximum d'Entropie » reposent sur la minimisation de l'entropie croisée entre l'objet et un objet *a priori* (reflétant les connaissances ou les contraintes *a priori*). Ceci conduit à minimiser un critère composé d'un terme quadratique (fidélité aux données) et d'un terme « entropique » (fidélité à l'*a priori*). La construction de tels critères, prenant en compte des informations très fines, peut également être menée en utilisant la méthode du maximum d'entropie sur la moyenne (MEM). Cette méthode est décrite en [Le Besnerais93a, Le Besnerais93b] et [Partie III, Chap. 7] de ce document.

L'algorithme CLEAN [Högbom74], très utilisé en radioastronomie, peut être interprété comme une méthode de déconvolution régularisée par critère d'arrêt. CLEAN opère sur la *dirty map* en supposant que l'objet originel peut être représenté par un nombre fini de points source bien séparés. Il enchaîne alors les étapes suivantes :

1. recherche du maximum de l'image,

2. convolution de l'impulsion ainsi localisée par la réponse de l'instrument, pour donner la contribution théorique d'un point source à l'image,
3. mise à jour de l'image en soustrayant cette contribution, pour obtenir une image résiduelle.

Ces étapes sont renouvelées jusqu'à ce que l'image résiduelle atteigne le niveau du bruit, ce qui constitue le critère d'arrêt. L'image reconstruite est alors constituée de la somme de toutes les contributions isolées au cours de l'algorithme. Elle est en général lissée *a posteriori* pour tenir compte de la résolution maximale qu'on peut espérer du réseau utilisé.

### 3.1.2 La formation de voies

La technique de formation de voies vise à estimer la puissance émise pour une valeur particulière du vecteur paramètre  $\boldsymbol{\theta}$ . Notons qu'il est ici sous entendu que la géométrie de l'antenne et le modèle de propagation sont connus, de sorte à pouvoir relier les paramètres physiques au retard de propagation. Pour cela, on oriente électroniquement l'antenne en retardant les signaux  $\mathbf{x}$  délivrés par les capteurs, de façon à compenser les retards entre capteurs dus aux positions de réception différentes (focalisation). On obtient alors

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})^* \mathbf{x}, \quad (38)$$

soit

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})^* \mathbf{s} + \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}), \\ \text{où } \mathbf{s} \text{ représente ici les mesures non bruitées,} \\ \text{et où } \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) \text{ joue le rôle d'un } \textit{filtre spatial}. \end{cases} \quad (39)$$

Il s'agit donc d'une première mise en œuvre du filtre spatial introduit en (28) avec

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}). \quad (40)$$

La puissance est alors donnée par

$$\sigma_{FV}^2(\boldsymbol{\theta}) = E\{|\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})|^2\} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})^* \boldsymbol{\Gamma}_x \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}), \quad (41)$$

où  $\boldsymbol{\Gamma}_x$  est la matrice de corrélation des observations  $\mathbf{x}$  définie par

$$\boldsymbol{\Gamma}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^*\} = \boldsymbol{\Gamma}_s + \boldsymbol{\Gamma}_b. \quad (42)$$

Considérons une antenne linéaire à capteurs équi-spacés et un modèle de propagation par ondes planes. Dans ce cas, le champ imagé est situé dans le plan perpendiculaire à l'antenne prenant celle-ci pour base, et  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$  est de la forme (15). Le champ est parcouru par l'intermédiaire de la variable  $\sigma$  qui représente maintenant un azimut. Enfin, l'intégrale (29) est réexprimée en fonction de  $u(\sigma) = \frac{d \sin(\sigma)}{\lambda}$ . Il reste alors

$$\sigma_{FV}^2(\boldsymbol{\theta}) = \int I_s(u(\sigma)) \left| \sum_{m=1}^M e^{-j2\pi m[u(\boldsymbol{\theta}) - u(\sigma)]} \right|^2 du(\sigma) + \sigma_b^2(\boldsymbol{\theta}), \quad (43)$$

soit

$$\sigma_{FV}^2(\theta) = \int I_s(u(\sigma) g(u(\theta) - u(\sigma)) du(\sigma) + \sigma_b^2(\theta). \quad (44)$$

On reconnaît alors dans cette relation la convolution

$$\sigma^2(\theta) = g(u(\theta)) * I_s(u(\theta)) + \sigma_b^2(\theta) \quad (45)$$

avec

$$g(u(\theta)) = \left[ \frac{\sin(\pi M u(\theta))}{M \sin(\pi u(\theta))} \right]^2, \quad (46)$$

relation qui exhibe une limitation en résolution, liée à la largeur du lobe principal de  $g(u(\theta))$ . De plus, les lobes secondaires de  $g(u(\theta))$  collectent de l'énergie hors de la direction visée.

On notera encore que cette relation peut encore s'écrire simplement comme

$$\sigma(\theta)^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(m) \gamma_x(m) e^{-j 2\pi m u(\theta)}, \quad (47)$$

où  $g(m)$  est l'autocorrélation du réseau,

$$g(m) = 1 - \frac{|m|}{M} \text{ pour } m = -M + 1 \dots M - 1. \quad (48)$$

et  $\gamma_x(m)$  la séquence de corrélation des observations. Ainsi, et avec les hypothèses que nous avons indiqué, la formation de voies est équivalente à la transformation de Fourier de la séquence de corrélation apodisée par une fenêtre de Bartlett.

Il est possible de pondérer cette formation de voies afin d'obtenir un *diagramme de directivité* (module de la fonction de transfert du filtrage spatial effectué), avec des lobes secondaires plus bas, mais au détriment d'un élargissement du lobe principal. Le traitement d'antenne par formation de voies est ainsi caractérisé par un diagramme de directivité, fixé *a priori* pour chaque direction d'observation.

### 3.1.3 La méthode de CAPON

La méthode de Capon permet de tenir compte de l'ensemble des sources présentes pour pallier à la limitation en résolution de la formation de voies et réduire l'amplitude des lobes secondaires : c'est une méthode adaptative. Le filtre spatial est ajusté afin d'orienter l'antenne tout en minimisant les contributions des sources qui ne sont pas situées dans la direction scrutée. Ceci conduit à rechercher le filtre spatial qui minimise la puissance globale

$$\sigma^2(\theta) = \mathbf{w}^*(\theta) \mathbf{\Gamma}_x \mathbf{w}(\theta) \quad (49)$$

sous la contrainte de normalisation

$$\mathbf{w}^*(\theta) \mathbf{a}(\theta) = 1. \quad (50)$$

Le filtre spatial est alors

$$\mathbf{w}(\theta) = \frac{\mathbf{\Gamma}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^*(\theta) \mathbf{\Gamma}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta)}, \quad (51)$$

et la puissance s'écrit

$$\sigma_{CAP}(\theta)^2 = \frac{1}{\mathbf{a}^*(\theta) \mathbf{\Gamma}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta)}. \quad (52)$$

Ce traitement adaptatif est caractérisé par un pouvoir de résolution dépendant cette fois du rapport signal à bruit : plus le rapport est élevé, meilleure est la résolution.

### 3.1.4 Modélisation spectrale

Dans le paragraphe sur la formation de voies, nous avons noté que sous les hypothèses d'ondes planes et d'antenne rectiligne uniforme, la recherche de la distribution d'intensité en fonction de la direction est équivalente à un problème d'estimation du spectre de puissance (en fréquences spatiales). Dès lors, il est possible d'utiliser les méthodes paramétriques [Johnson82, Haykin92] ARMA. Les méthodes basées sur modélisation autorégressive (AR) sont les plus utilisées, car elle conduisent à la résolution d'un système linéaire, et peuvent être justifiées par leur lien avec la prédiction linéaire et, pour une caractérisation au second ordre, parce qu'elles sont la solution à maximum d'entropie du problème d'estimation spectrale. Enfin, les méthodes paramétriques permettent une « extrapolation spectrale », et possèdent par suite des capacités de résolution théoriquement parfaites. Les paramètres autorégressifs sont obtenus en résolvant l'équation normale d'ordre  $q$

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma}_{q,x} \mathbf{a} = \sigma_b^2 \mathbf{e}, \\ \text{avec } \mathbf{e}^T = [1 \ 0, \dots, 0]. \end{cases} \quad (53)$$

et où  $\mathbf{\Gamma}_{q,x}$  désigne la matrice de corrélation de  $\mathbf{x}$  d'ordre  $q$ . Le spectre AR s'exprime alors comme

$$\sigma_{AR}(\theta)^2 = \frac{\sigma_b^2}{\left| \sum_{n=1}^q a_n e^{-j 2\pi n u(\theta)} \right|^2}, \quad (54)$$

pour  $u(\theta)$  quelconque. Signalons simplement ici que les paramètres AR modélisent le signal et le bruit, et que le spectre obtenu est alors le spectre du signal composite. D'autre part, la qualité de l'estimation est liée au choix d'un ordre optimal pour le modèle AR.

## 3.2 Méthodes classiques sous l'hypothèse de sources ponctuelles

Sous l'hypothèse de sources ponctuelles, des méthodes à très hautes performances ont été proposées. Soulignons toutefois que les méthodes « champ continu » présentées ci-dessus s'appliquent sans restriction à un modèle de champ discret.

### 3.2.1 Les méthodes à haute résolution

Les méthodes à haute résolution sont fondées sur les propriétés de la matrice de corrélation de l'observation qui ont été mises en exergue par les travaux de Pisarenko et Ligett [Ligett72, Pisarenko73]. Nous avons déjà noté que (à partir de la relation (33)) l'observation non bruitée reste confinée à un espace vectoriel de dimension  $P$ . Par suite, toute matrice de corrélation non bruitée de dimension supérieure à  $P$  est de rang  $P^3$ . On peut alors distinguer deux sous-espaces vectoriels en somme directe : un sous-espace signal, l'image de  $\mathbf{\Gamma}_s$ , et son complémentaire appelé le sous-espace bruit. On les note respectivement :  $\mathbf{E}_S$  et  $\mathbf{E}_B$ . A partir de l'équation (35), on obtient

$$E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^*\} = \mathbf{A}E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^*\}\mathbf{A}^* + E\{\mathbf{b}\mathbf{b}^*\}, \quad (55)$$

soit

$$\mathbf{\Gamma}_x = \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}_s\mathbf{A}^* + \mathbf{\Gamma}_b = \mathbf{\Gamma}_y + \mathbf{\Gamma}_b, \quad (56)$$

avec des notations évidentes. Lorsque la matrice de covariance du bruit  $\mathbf{\Gamma}_b$  est proportionnelle à l'identité, ce qui advient quand le bruit est stationnaire et blanc spatialement, les vecteurs propres de  $\mathbf{\Gamma}_x$  sont inchangés (par rapport au cas non bruité), et permettent de définir les sous-espaces signal et bruit. Par contre, si le bruit est corrélé, il faut soustraire de la matrice d'observation  $\mathbf{\Gamma}_x$  une estimée de la matrice bruit.

Les sous-espaces signal et bruit étant complémentaires, tout vecteur du sous espace bruit est orthogonal au sous-espace signal. D'après (33), les vecteurs sources  $\mathbf{a}(\theta)$  appartiennent au sous-espace signal, et dans ces conditions on a

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{v}_b = 0, \\ \text{où } \mathbf{v}_b \text{ est un vecteur du sous-espace bruit.} \end{cases} \quad (57)$$

Dès lors, il suffit de sélectionner un ou plusieurs vecteurs du sous-espace bruit pour tester cette orthogonalité pour tous les paramètres  $\theta$ . Pour cela, on introduit la fonction de détection, ou fonction discriminante

$$d(\theta) = \frac{1}{|\mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{v}_b|^2} \quad (58)$$

qui est maximale lorsque  $\theta$  prend pour valeur l'un des vecteurs paramètres d'une des sources. Ceci est exact quelque soit le vecteur  $\mathbf{v}_b$  du sous espace bruit. En pratique, (estimation en présence de bruit) cette fonction est seulement maximale au voisinage de la solution. La qualité statistique de la détection dépendra alors directement du choix du vecteur  $\mathbf{v}_b$ . Ce choix arbitraire donne lieu à plusieurs variantes.

On peut choisir comme vecteur une combinaison linéaire particulière de tous les  $\mathbf{v}_b$ . Tufts et Kumaresan

[Tufts82, Tufts83] préconisent de choisir le vecteur du sous-espace bruit de norme minimale et dont la première composante vaut 1, car ce choix assure une estimée de variance minimale. Cette solution est donnée par

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{TK} = \mathbf{\Pi}_b \mathbf{e}, \\ \text{avec } \mathbf{\Pi}_b = \sum_{p=P+1}^M \mathbf{v}_p \mathbf{v}_p^* \\ \text{et } \mathbf{e}^T = [1, 0, \dots, 0]. \end{cases} \quad (59)$$

Notons que  $\mathbf{\Pi}_b$  est simplement le *projecteur* sur le sous-espace bruit. On définit de manière analogue le projecteur  $\mathbf{\Pi}_s$  sur le sous-espace signal, et on a alors

$$\mathbf{\Pi}_s + \mathbf{\Pi}_b = \mathbf{I}. \quad (60)$$

L'amélioration de la stabilité statistique de l'estimée conduit naturellement à tester une orthogonalité « moyenne » avec tous les vecteurs du sous-espace bruit. Il s'agit alors de la méthode MUSIC introduite par Schmidt [Schmidt79, Schmidt86], et indépendamment par Bienvenu et Kopp [Bienvenu80] sous le nom de *goniomètre* :

$$d(\theta) = \frac{1}{\sum_{p=P+1}^M |\mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{v}_p|^2} \quad (61)$$

soit

$$d(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{\Pi}_b \mathbf{a}(\theta)}. \quad (62)$$

Dans le cas d'une antenne rectiligne uniforme et d'un modèle de propagation par ondes planes, le vecteur directionnel est un vecteur de Vandermonde donné en (15). On peut alors donner une solution *explicite* à la relation d'orthogonalité (57) en recherchant les racines d'un polynôme. En effet, (57) s'écrit alors

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^P v_b(i) z^i = 0, \\ \text{avec } z = e^{-j2\pi u(\theta)} \end{cases} \quad (63)$$

- lorsque l'espace bruit est de dimension 1, on a la méthode de Pisarenko<sup>4</sup>,
- quand le vecteur est le vecteur de Tufts-Kumaresan, on a la méthode « Root-TK »,
- de manière analogue, on peut rechercher les racines du polynôme engendré par  $\mathbf{a}(\theta)^* \mathbf{\Pi}_b \mathbf{a}(\theta)$ , ce qui donne la méthode « Root-MUSIC ».

La définition des sous-espaces signal et bruit repose sur une décomposition de la matrice de covariance en ses éléments propres, dont le coût peut s'avérer très lourd en pratique. Une autre démarche pour définir une base du sous-espace bruit,  $\mathbf{q}_i$ , pour  $i = 1$  à  $M - P$ , a été présentée dans [Munier91]. Il s'agit d'une base non orthogonale qui se déduit des propriétés algébriques de

3. Sous l'hypothèse qu'il n'existe pas de sources *cohérentes*. Dans ce cas de figure, la matrice signal est de rang inférieur à  $P$  et les sources cohérentes apparaissent comme une seule source. Cette situation intervient en particulier en présence de trajets multiples.

4. Dans ce cas, les composantes  $v_b(i)$  peuvent s'interpréter comme les coefficients  $a_i$  du modèle autorégressif singulier (le bruit générateur est nul), caractérisant le signal :  $\mathbf{F}_s \mathbf{a} = 0$ .

la matrice  $\mathbf{A}$ . Elle mène à la méthode dite du Propagateur:

$$d(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{M-P} |\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})^* \mathbf{q}_i|^2} \quad (64)$$

Le calcul des vecteurs de la base se fait, à partir de  $\boldsymbol{\Gamma}_x$ , par un simple processus des moindres carrés et nécessite simplement l'inversion d'une matrice  $(P, P)$ . De nombreux affinements de cette méthode ont été donnés dans [Marcos89, Marcos90, Marsal91].

Dans la plupart des estimateurs que nous venons de présenter, on trace un pseudo spectre dont on vient rechercher les coordonnées (azimut, site, distance, ...) des  $P$  maxima locaux les plus élevés. Chaque source est ainsi traitée l'une après l'autre. Ces méthodes se dégradent rapidement en présence de fortes corrélations, de faibles séparations angulaires, ou de faibles rapport signal sur bruit. Ce comportement est lié au caractère « local » du critère de proximité entre  $\mathbf{E}_S$  et  $\text{vect}\{\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})\}$ , où  $\text{vect}\{\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})\}$  représente l'espace vectoriel engendré par les  $\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})$ .

Au prix d'une charge de calcul plus élevée, on peut choisir un critère de proximité « global » entre  $\mathbf{E}_S$  et  $\text{vect}\{\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})\}$ . On s'intéresse alors simultanément à tous les paramètres de toutes les sources. Ceci engendre une nouvelle classe de méthodes d'estimation dites « globales ». Le vecteur solution est donné par :

$$\boldsymbol{\theta} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} d(\boldsymbol{\theta}) \quad (65)$$

Parmi toutes les fonctions « globales » que l'on peut choisir, les méthodes du maximum de vraisemblance sont les plus séduisantes. Ce choix est motivé dans le paragraphe suivant.

### 3.2.2 Les méthodes du maximum de vraisemblance

Le principe du maximum de vraisemblance est largement utilisé dans le domaine de l'estimation statistique. Dans beaucoup de cas, les estimateurs au sens du maximum de vraisemblance tendent vers une estimation non biaisée et à variance minimale. Une des principales motivations de l'utilisation du maximum de vraisemblance est que s'il existe un estimateur asymptotiquement efficace, c'est un estimateur du maximum de vraisemblance.

L'estimée au sens du maximum de vraisemblance est obtenue en évaluant la densité de probabilité pour la valeur de l'observation, et en cherchant alors la valeur du vecteur de paramètres qui la maximise

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{obs}). \quad (66)$$

Le logarithme de cette fonction est appelé *Log vraisemblance* et est noté  $L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ . Sous des conditions assez générales, il peut être établi que  $E\{L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})\}$  est maximale

pour la « vraie » valeur des paramètres. Cette propriété générale est une deuxième motivation du choix.

Deux hypothèses sont couramment utilisées concernant les amplitudes  $\mathbf{s}(t)$ .

#### Modèle à amplitudes $\mathbf{s}(t)$ aléatoires

Les  $\mathbf{s}(t)$  sont traités comme des variables aléatoires gaussiennes, centrées stationnaires

$$\boldsymbol{\Gamma}_s = E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^*(t)\}. \quad (67)$$

Dans ce cas la Log vraisemblance dépend de  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}_s$  et  $\sigma^2$ , où  $\sigma^2$  est la puissance du bruit. Nous obtenons alors la méthode du maximum de vraisemblance stochastique (MVS) [Bohme86, Bresler88, Jaffer88]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MVS} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \left[ \log(|\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_s(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta}) + \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{\theta})\mathbf{I}|) \right] \quad (68)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_s(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}^\#(\boldsymbol{\theta})[\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_x \mathbf{A}^{\#\#}(\boldsymbol{\theta})], \\ \text{avec } \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{M-P} \text{tr}(\boldsymbol{\Pi}_b(\boldsymbol{\theta})\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_x), \\ \text{et } \boldsymbol{\Pi}_b(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}^\#(\boldsymbol{\theta}). \end{cases} \quad (69)$$

La résolution d'un tel problème d'optimisation est bien entendu très lourde à mettre en œuvre.

#### Modèle à amplitudes $\mathbf{s}(t)$ déterministes

La Log vraisemblance dépend maintenant de  $\boldsymbol{\theta}$ , d'un ensemble de  $K$  vecteurs  $[\mathbf{s}(1), \mathbf{s}(2) \dots \mathbf{s}(K)]$  issus de  $K$  observations (« snapshots »), et de la variance du bruit  $\sigma^2$ .

Le seul élément aléatoire est le bruit, ce qui simplifie notablement le problème. Le maximum de vraisemblance déterministe (MVD) [Golub73, Bohme84] est alors donné par

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MVD} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \text{tr}(\boldsymbol{\Pi}_b(\boldsymbol{\theta})\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_x). \quad (70)$$

Notons que le MVD est beaucoup plus simple à mettre en œuvre que le MVS.

Le choix de la méthode dépend essentiellement de l'application envisagée. En radar et en radiocommunications le signal ne peut être considéré comme une variable aléatoire gaussienne. D'autre part, dans certaines applications de radiocommunications les amplitudes sont plus intéressantes que les directions d'arrivée correspondantes. Le modèle déterministe est alors un modèle naturel dans la mesure où il ne fait aucune hypothèse sur la nature des signaux : les amplitudes des signaux sont ainsi des paramètres inconnus à déterminer.

Notons que quelque soit la variante envisagée, l'implémentation des algorithmes correspondants est délicate. Ceci explique que ces méthodes restent peu utilisées, mais suscitent de nombreuses recherches.

## 4 Qualité de l'estimation

Dans la plupart des applications de traitement d'antenne il est important de quantifier la qualité de l'estimation. Une mesure usuelle de la qualité est donnée par la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, que l'on a coutume de comparer aux meilleures performances que l'on peut atteindre pour une situation donnée.

Plusieurs minorants de la covariance d'erreur sont disponibles dans la littérature [Lehmann83, Weiss86]. Parmi celles-ci, la borne de Cramer-Rao est la plus utilisée : la raison principale en est sa relative simplicité, ainsi que le fait qu'il existe souvent un estimateur qui l'atteint asymptotiquement. Le biais et la résolution sont également des éléments importants d'appréciation de la qualité de l'estimation. Le pouvoir de résolution est sujet à de multiples définitions, et nous laissons aux différents contributeurs le soin de le définir localement.

La borne de Cramer-Rao est d'un intérêt fondamental pour le praticien [Stoica89, Clergeot89]. En effet, elle permet de dire si

- un « cahier des charges » peut être respecté,
- une amélioration des performances d'un estimateur est envisageable.

Les trois critères de qualité que nous venons de présenter sont ceux habituellement retenus pour comparer les performances des estimateurs. Il peut être montré que les méthodes du type prédiction linéaire et Capon sont asymptotiquement biaisées. Par contre, les méthodes à haute résolution ne le sont pas. De plus, à fort rapport signal à bruit la méthode de prédiction linéaire est équivalente à la méthode de Tuft-Kumaresan, et, de la même manière, la méthode de Capon est équivalente à la méthode MUSIC. Si une seule source est présente,

la formation de voies est équivalente au maximum de vraisemblance.

Dans l'objectif d'une utilisation opérationnelle, la complexité d'un traitement est un élément important à prendre en compte. C'est à cet égard un des principaux inconvénients des méthodes à haute résolution vis à vis des méthodes fondées sur la transformée de Fourier. Les méthodes qualifiées de « globales » sont les plus performantes, mais nécessitent une charge de calcul très importante.

Contrairement aux méthodes de type Capon et prédiction linéaire, les méthodes à haute résolution nécessitent la connaissance du nombre de sources. Ce point ne sera pas abordé ici, mais il faut toutefois mentionner qu'il est délicat et conditionne la qualité de l'estimation.

Les diverses méthodes que nous venons de présenter sont séduisantes quant à leurs performances théoriques. Toutefois, les expérimentations effectuées montrent que si ces méthodes sont potentiellement très performantes, elles perdent de leur intérêt et leurs performances peuvent se dégrader sévèrement lorsque les hypothèses sous-jacentes ne sont pas vérifiées.

Pour rester robuste à ces perturbations de modèle, les méthodes précitées nécessitent des « aménagements ». Pour cela il faut définir avec précision les paramètres du modèle susceptibles d'introduire des perturbations. Malgré beaucoup de similitudes entre les différents domaines d'application, un tel travail est l'affaire de « spécialistes ». En effet, chaque domaine d'application a des spécificités inhérentes aux phénomènes physiques traités. L'objet du chapitre suivant est ainsi de laisser chaque spécialiste exposer le problème qu'il traite, ainsi que les différentes sources de perturbations qu'il doit prendre en compte.

## Références

- [Bienvenu80] G. BIENVENU, L. KOPP, « Adaptivity to background noise spatial coherence for high resolution passive methods, » *Proc. ICASSP*, pp. 307-310, 1980.
- [Bienvenu84] G. BIENVENU, L. KOPP, « Méthodes haute résolution pour la localisation de sources rayonnantes » *L'Onde Electrique*, **64**, pp. 28-37, 1984.
- [Bohme84] J.F. BOHME, « Estimation of source parameters by maximum likelihood and non linear regression, » *Proc ICASSP 84*, **19**, pp. 731-734, 1984.
- [Bohme86] J.F. BOHME, « Estimation of spectral parameters of correlated signals in wavefields, » *Signal processing*, **10**, pp. 329-337, 1984.
- [Bresler88] Y. BRESLER, « Maximum likelihood estimation of linearly structured covariance with application to antenna array processing, » *Proc 4th ASSP Workshop on spectrum estimation and modeling*, pp. 172-175, 1988.
- [Clergeot89] H. CLERGEOT, S. TRESSSENS, A. OUAMRI, « Performances of high resolution spectral methods compared to the Cramer Rao bounds, » *IEEE trans. on ASSP*, **37**, pp. 1701-1720, 1989.

- [Demoment89] G. DEMOMENT, « Image Reconstruction and Restoration: Overview of Common Estimation Structures and Problems, » *IEEE transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **37**, pp. 2024–2036, 1989.
- [Golub73] G. GOLUB, V. PEREYRA, « The differentiation of pseudo inverses and nonlinear least squares problems whose variable separate, » *SIAM J. Num Anal*, **10**, pp. 413–432, 1973.
- [Haykin92] S. HAYKIN, J.P. REILLY, V. KEZYS, VERTATSCHITSCH, « Some aspects of array signal processing, » *IEE proc.*, **139**, pp. 1–26, 1992.
- [Högbom74] J.A. HÖGBOM, « Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines, » *Astron. Astrophys. Suppl.*, **15**, pp. 417–426, 1974.
- [Jaffer88] A.G. JAFFER, « Maximum likelihood direction finding of stochastic sources: a separable solution, » *Proc ICASSP 88*, **5**, pp. 2893–2896, 1988.
- [Johnson82] D.H. JOHNSON, « The application of spectral estimation to bearing estimation problems, » *Proc. IEEE*, **70**, pp. 1018–1028, 1982.
- [Le Besnerais93a] G. LE BESNERAIS, « Méthode du maximum d’entropie sur la moyenne, critères de reconstruction d’image et synthèse d’ouverture en radio-astronomie, » thèse de doctorat, Université Paris-Sud, Décembre 1993.
- [Le Besnerais93b] G. LE BESNERAIS, J.-F. BERCHER and G. DEMOMENT, « Probabilistic Issues in Fourier Synthesis, » *First School on Scientific Computation in Systems*, **32** p., Dec. 1993.
- [Lehmann83] E. L. LEHMANN, Theory of point estimation, *John Wiley & Sons*, New York, 1983.
- [Ligett72] W.S. LIGETT, « Passive sonar : fitting models to multiple time series », *Proc. NATO Advanced Study Institute on Signal Processing*, J. W. R. GRIFFITHS *et al.* Eds, New-York, 1973, pp. 327–345.
- [Marcos89] S. MARCOS, J. MUNIER, « Le Propagateur et son Estimation Adaptative, » *Actes du Colloque GRETSI*, Juan-les-Pins, 1989, pp. 489–492.
- [Marcos90] S. MARCOS, M. BENIDIR, « Source Bearing Estimation and Sensor Positionning With the Propagator Method, » *Proceedings of SPIE*, July 1990, pp. 312–323.
- [Marsal91] A. MARSAL, S. MARCOS, « Rapprochement de la Méthode du Propagateur et Music pour la Localisation de Sources, » *Actes du Colloque GRETSI*, pp. 681–684, Septembre 1991, Juan-les-Pins.
- [Mermoz76] H. MERMOZ, « Imagerie, corrélations et modèles, » *Ann. Telecommunic.*, **31**, pp. 17–36, 1976.
- [Munier75] J. MUNIER, « Traitement d’antenne et imagerie, » *Actes du 5<sup>e</sup> colloque national sur le traitement du signal et ses applications*, pp. 547–558, 1975.
- [Munier91] J. MUNIER, G.Y. DELISLE, « Spatial Analysis Using New Properties of the Cross-spectral Matrix, » *IEEE Transactions on ASSP*, vol. 39, no. 3, March 1991, pp. 746–749.
- [Pisarenko73] V.F. PISARENKO, « The Retrieval of Harmonics From a Covariance Function, » *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **33**, pp. 347–360, 1973.
- [Schmidt79] R.O. SCHMIDT, « Multiple Source Emitter and Signal Parameter Estimation, » *Proc. RADC Spectral Estimation Workshop*, pp. 243–258, 1979.
- [Schmidt86] R.O. SCHMIDT, « Multiple Source Emitter and Signal Parameter Estimation, » *IEEE trans. on AP*, **30**, pp. 276–280, March 1986.
- [Stoica89] P. STOICA, A. NEHORAI, « MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramer-Rao Bound, » *IEEE trans. on ASSP*, **37**, pp. 720–741, 1989.
- [Tufts82] D.W. TUFTS, R. KUMARESAN, « Estimation of frequencies of multiple sinusoids: making linear prediction perform like maximum likelihood, » *Proc. IEEE*, **70**, pp. 975–989, 1982.

- [Tufts83] D.W. TUFTS, R. KUMARESAN, « Estimating the angles of arrival of multiple plane waves, » *IEEE trans. on AES*, **19**, pp. 134–139, 1983.
- [Weiss86] A. WEISS, E. WEINSTEIN, « Lower bounds in parameter estimation - Summary of results, » *Proc. ICASSP*, pp. 569–572, 1986.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introduction du modèle et des notations</b>	<b>2</b>
2.1	L'hypothèse bande étroite . . . . .	2
2.2	Paramétrisation . . . . .	3
2.3	L'imagerie d'un champ continu . . . . .	4
2.4	Le modèle de sources ponctuelles . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Méthodes classiques en traitement d'antenne</b>	<b>5</b>
3.1	Méthodes classiques en imagerie d'un champ continu . . . . .	5
3.1.1	Synthèse de Fourier . . . . .	5
3.1.2	La formation de voies . . . . .	6
3.1.3	La méthode de CAPON . . . . .	7
3.1.4	Modélisation spectrale . . . . .	7
3.2	Méthodes classiques sous l'hypothèse de sources ponctuelles . . . . .	7
3.2.1	Les méthodes à haute résolution . . . . .	8
3.2.2	Les méthodes du maximum de vraisemblance . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Qualité de l'estimation</b>	<b>10</b>