

## EXTENSION DE LA METHODE DE PISARENKO ET SES DERIVEES AU CAS DES SIGNAUX VECTORIELS ET APPLICATIONS A LA LOCALISATION DE SOURCES

B. LUMEAU<sup>1</sup> et J.F. BERCHER<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LSS, CNRS-ESE, Plateau de Moulon, 91192 Gif sur Yvette

<sup>2</sup> Service national, CELAR, 35170 Bruz

### RESUME

Une extension de la méthode de Pisarenko et de ses dérivées au cas des signaux vectoriels est proposée. On montre comment adapter cette méthode aux signaux aléatoires. Différents modèles de bruit vectoriel sont envisagés et les solutions adéquates sont décrites. Cette méthodologie est appliquée en traitement spatial : on définit une nouvelle méthode de localisation de sources décorréelées - qui ne nécessite que deux capteurs pour détecter un nombre quelconque de sources -, et une variante permet de traiter le cas des sources corrélées.

### I. INTRODUCTION

Dans le cadre de l'analyse spectrale, des méthodes basées sur la décomposition en éléments propres de la matrice spectrale ou de la matrice de corrélation ont été développées depuis Pisarenko [1] afin de dépasser la limite de résolution des méthodes de Fourier. Ces méthodes utilisent explicitement un modèle du signal. De telles approches ont été transposées au traitement d'antenne (MUSIC [2]) en ne considérant plus un signal temporel mais un signal dépendant d'une dimension spatiale. Le traitement s'effectue alors en deux étapes successives : une analyse fréquentielle puis une analyse spatiale.

Les méthodes de Fourier et les méthodes paramétriques ont été étendues aux signaux multivariés, que nous dénommerons aussi ici signaux vectoriels, mais des défauts dus à des interactions mal compensées entre les diverses composantes apparaissent dans l'approche paramétrique [3]. Ces défauts sont particulièrement sensibles en présence de raies harmoniques.

Nous définissons ici un formalisme permettant de répondre simplement à l'estimation spectrale d'un processus vectoriel répondant au modèle de Pisarenko. Cette méthodologie, basée sur la notion de modèle autorégressif singulier, s'étend naturellement aux modèles de type Prony, ainsi qu'à nombre des méthodes à haute résolution introduites dans le cas scalaire. Nous considérons différents modèles de bruit vectoriel et décrivons les solutions à mettre en oeuvre. Nous montrons par la suite comment réaliser le passage aux signaux aléatoires répondant à un modèle AR vectoriel. Il est clair qu'un signal "multicapteurs" est un exemple pertinent de signal vectoriel. Nous pouvons donc utiliser les méthodes introduites précédemment en traitement spatial. Nous explicitons ainsi une nouvelle méthode de localisation de sources. La méthode ne fait intervenir qu'une étape, et nous montrons qu'il suffit de deux capteurs pour caractériser un nombre quelconque de sources décorréelées. Une variante, basée sur les mêmes principes, permet d'envisager le cas des sources corrélées, mais nécessite toutefois un nombre de capteurs plus élevé. Cet ensemble de résultats est validé par quelques simulations.

### II. LA METHODE DE PRONY-PISARENKO VECTORIEL

Considérons le signal vectoriel

$$(1) \quad s(n) = [s_1(n) \ s_2(n) \ \dots \ s_k(n)]^T.$$

Ce signal pourra par exemple être constitué par différentes tranches d'un signal  $s(n)$ , ou encore par la concaténation de  $K$  signaux scalaires issus par exemple d'une antenne multicapteurs. Nous appellerons AR vectoriel singulier les signaux  $s(n)$  tels que :

$$(2) \quad s(n) = - \sum_{i=1}^p A_i s(n-i)$$

### ABSTRACT

An extension of Pisarenko's method and its derivatives is proposed. The adaptation of this method to stochastic processes is shown. Various models of vectorial noise are envisaged and adequate solutions are given. This methodology is applied in spatial processing : a new method for the localization of uncorrelated sources is defined - which needs only two sensors for the detection of any number of sources -, and an alternative allows to consider the case of correlated sources.

où les  $A_i$  sont les matrices-coefficient de dimension  $K \times K$ . On peut montrer que tout signal vectoriel dont les composantes sont AR singulières est lui-même un AR vectoriel singulier, et surtout que, réciproquement, toutes les composantes d'un AR vectoriel singulier sont AR singulières.

Nous savons, dans le cas scalaire, qu'un signal AR singulier est composé d'une somme de sinusoides, amorties ou non. Par suite, la notion d'AR vectoriel singulier recouvre l'ensemble des signaux dont toutes les composantes sont une somme de sinusoides, éventuellement amorties.

A partir de la relation (2), on obtient l'équivalent des équations normales :

$$(3) \quad \begin{bmatrix} 1 & A_1 & A_2 & \dots & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(0) & \dots & \gamma(-p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(p) & \dots & \gamma(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

avec

$$\gamma(i) = E[s(n)s(n-i)^*].$$

On notera aussi la relation (3) sous la forme

$$(4) \quad A \Gamma_p = 0,$$

avec des notations évidentes.

La matrice  $\Gamma_p$ , de dimension  $K(p+1) \times K(p+1)$  est ici de rang  $Kp$ . Après transposition, nous obtenons un des points clé de la démarche :

$$(5) \quad \Gamma_p^+ A^+ = 0,$$

relation qui indique que  $A^+$  est donné par l'ensemble des  $K$  vecteurs propres associés aux  $K$  valeurs propres nulles de  $\Gamma_p$ . On pourra normaliser cette matrice paramètre de sorte à obtenir  $A_0 = I$ . En prenant la transformée en  $Z$  de (2), nous obtenons

$$(6) \quad \sum_{i=0}^p A_i z^{-i} s(z) = 0,$$

$$\text{où } s(z) = [s_1(z) \ s_2(z) \ \dots \ s_k(z)]^T.$$

Si on note

$$(7) \quad P(z) = \sum_{i=0}^p A_i z^{-i},$$

alors (6) devient :

$$(8) \quad P(z)s(z) = 0.$$

Ainsi, pour  $z_i$  solution de (6) et  $s(z_i) \neq 0$ , on devra avoir

$$(9) \quad \det[P(z_i)] = 0,$$



c'est à dire que le vecteur  $s(z_i)$  est le vecteur propre associé à la valeur propre nulle de  $P(z_i)$ . Cette remarque aura des implications très importantes pour nos applications en traitement spatial. Il nous faut donc rechercher les  $z_i$  tels que (6) soit vérifiée. Nous devons garder à l'esprit dans la suite que les  $z_i$  sont des exponentielles complexes pouvant présenter une partie réelle. On détermine donc deux paramètres : la fréquence temporelle et un amortissement. Réécrivons (2) sous la forme :

$$(10) \quad \begin{bmatrix} s(n) \\ s(n-1) \\ \vdots \\ s(n-p+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 & -A_2 & \dots & -A_p \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(n-1) \\ s(n-2) \\ \vdots \\ s(n-p) \end{bmatrix}$$

ou encore

$$(11) \quad \mathbf{s}(n) = \mathbf{C}\mathbf{s}(n-1).$$

Dans le plan en  $z$ , nous obtenons maintenant

$$(12) \quad \mathbf{s}(z) = \mathbf{C}z^{-1}\mathbf{s}(z)$$

soit

$$(13) \quad (z\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{s}(z) = \mathbf{0}.$$

Les  $z_i$  recherchés sont donc les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{C}$ , matrice compagne du polynôme  $P(z)$ . Il reste enfin à déterminer les amplitudes complexes. Ceci est réalisé en résolvant un système de moindres carrés :

$$(14) \quad \mathbf{s}(n) = \rho \mathbf{Z}^n$$

avec  $\mathbf{Z} = [z_1, \dots, z_{kp}]^T$ ,

$$\text{et } \rho = \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \dots & \rho_{1,kp} \\ \rho_{kp,kp} & \dots & \rho_{kp,kp} \end{bmatrix}.$$

Par suite,

$$(15) \quad \begin{bmatrix} s(N) & \dots & s(1) \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^N & \dots & \mathbf{Z} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{s} = \rho \mathbf{Z},$$

et finalement

$$(16) \quad \rho = \mathbf{s}\mathbf{Z}^T(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T)^{-1}.$$

La méthode de Pisarenko vectoriel peut donc se réduire aux opérations suivantes :

- Déterminer la matrice paramètre  $\mathbf{A}^+$  en regroupant les  $K$  vecteurs propres associés à la valeur propre nulle et en normalisant  $\mathbf{A}_0$  à  $\mathbf{I}$ . Il s'agit de la résolution de  $\Gamma_p^+ \mathbf{A}^+ = \mathbf{0}$ .

- Déterminer les  $z_i$  solution de

$$\sum_{j=0}^p A_j z_i^j s(z_i) = 0$$

en recherchant les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{C}$ .

- Déterminer les amplitudes en résolvant

$$\rho = \mathbf{s}\mathbf{Z}^T(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T)^{-1}.$$

### III. MODELES DE BRUIT VECTORIEL

Nous allons maintenant envisager différents modèles de bruit vectoriel et les modifications éventuelles à apporter à la méthode envisagée précédemment.

#### 1. Matrice de bruit diagonale :

Dans l'hypothèse où les bruits intervenant sur chacune des composantes du signal vectoriel sont décorrélés entre eux et de même puissance, la matrice de bruit  $\mathbf{B}$  est une matrice diagonale dont tous les termes sont égaux à  $\sigma^2$ . Dans ces conditions, et comme dans le cas scalaire, les vecteurs propres seront inchangés alors que les valeurs propres sont augmentées de  $\sigma^2$ .

La détermination de  $\mathbf{A}^+$  sera alors effectuée en sélectionnant les  $K$  vecteurs propres associés aux  $K$  valeurs propres minimales (égales théoriquement à  $\sigma^2$ ). Les autres étapes de la méthode sont inchangées.

#### 2. Matrice de bruit bloc diagonale :

Les hypothèses imposées sur le bruit peuvent être excessivement restrictives (c'est l'approche "naïve" évoquée en [4]). Si nous supposons maintenant l'absence de retards entre les bruits sur les différentes composantes et leur blancheur, la matrice de bruit sera bloc diagonale :

$$(17) \quad \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{b}_0 \end{bmatrix},$$

avec  $\mathbf{b}_0 = E[\mathbf{b}(n)\mathbf{b}(n)^+]$ .

Considérons la matrice de corrélation décalée :

$$(18) \quad \Gamma_p^{(q)} = \begin{bmatrix} \gamma(q) & \dots & \gamma(q-p) \\ & \ddots & \\ \gamma(q+p) & \dots & \gamma(q) \end{bmatrix}$$

et la matrice d'observation

$$(19) \quad \mathbf{R}_p^{(q)} = \Gamma_p^{(q)} + \mathbf{B}_p^{(q)}.$$

Il est alors clair que

$$(20) \quad \mathbf{A}\mathbf{R}_p^{(q)} = \mathbf{A}\{\Gamma_p^{(q)} + \mathbf{B}_p^{(q)}\} = \mathbf{A}\mathbf{B}_p^{(q)}.$$

De plus, si l'on prend  $q > p+2$ , on aura  $\mathbf{B}_p^{(q)} = \mathbf{0}$ , et dans ces conditions

$$(21) \quad \mathbf{A}\mathbf{R}_p^{(q)} = \mathbf{0}.$$

Dans le cas d'une matrice de bruit bloc diagonale, il suffit donc de considérer la matrice de corrélation décalée plutôt que la matrice directe. La première étape est donc modifiée en

$$(22) \quad \mathbf{R}_p^{(q)+} \mathbf{A}^+ = \mathbf{0}.$$

alors que les autres étapes restent inchangées.

Cette simple modification nous permet ainsi de prendre en compte sans difficulté pratique le cas de bruits corrélés et de puissances différentes sur chacune des composantes du bruit vectoriel.

#### 3. Matrice de bruit pleine :

Il peut toutefois advenir que les hypothèses du 2, bien que moins restrictives qu'en 1, soient encore trop contraignantes. En particulier, la présence de retards ou la coloration des bruits conduisent à une matrice de bruit pleine.

Dans le cas général, le problème devient insoluble. Nous pouvons néanmoins encore répondre au problème au prix d'une seule hypothèse sur le bruit : son caractère gaussien. Comme dans le cas scalaire, on peut définir les cumulants [5] d'ordre 4 du processus vectoriel et la matrice des cumulants d'ordre 4.

On peut vérifier que la quantité matricielle

$$(23) \quad \mathbf{C}_{4x}(k,k,k) = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}(n-k)^T\mathbf{x}(n-k)\mathbf{x}(n-k)^T\} - \gamma_x(k)\{2\gamma_x(0) + \text{diag}[\gamma_x(0)]\}$$

est nulle si  $\mathbf{x}(n)$  est gaussien.

Il est de plus clair que si  $\mathbf{s}(n)$  est un AR singulier tel que

$$(24) \quad \sum_{i=0}^p A_i \mathbf{s}(n-i) = \mathbf{0},$$

alors

$$(25) \quad \sum_{i=0}^p A_i \mathbf{C}_{4s}(k-i) = \mathbf{0}.$$

Introduisons maintenant une matrice des cumulants d'ordre 4 du processus :

$$(26) \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} C_4(0,0,0) & \dots & C_4(-p,-p,-p) \\ & \ddots & \\ C_4(p,p,p) & \dots & C_4(0,0,0) \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions, d'après (25) et l'hypothèse gaussienne sur le bruit, on a :

$$(27) \quad \mathbf{K}^+ \mathbf{A}^+ = \mathbf{0}.$$

Ainsi, sous la seule hypothèse que toutes les composantes du bruit soient normales, on pourra déterminer la "matrice paramètre"  $\mathbf{A}$  en utilisant (27), puis poursuivre la méthode sans changement.

Nous avons pour le moment examiné l'estimation spectrale de processus déterministes répondant aux modèles de Pisarenko et de Prony (sinusoïdes amorties ou non). Les différents modèles de bruit vectoriel présentés et les solutions proposées permettent de s'accommoder de la majorité des situations physiques. Il est clair que dans nombre d'applications, les signaux intervenant sont des processus stochastiques. Nous allons montrer comment on peut étendre le formalisme précédent aux signaux aléatoires vectoriels, au moins pour les modèles AR vectoriels.

#### IV. EXTENSION AUX SIGNAUX ALEATOIRES AUTOREGRESSIFS VECTORIELS

Ici encore, La démarche repose sur quelques idées simples : si l'on considère un processus AR vectoriel

$$(28) \quad \mathbf{s}(n) = - \sum_{i=0}^p \mathbf{A}_i \mathbf{s}(n-i) + \mathbf{u}(n),$$

les équations normales multivariées s'écrivent

$$(29) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(0) & \dots & \gamma(-p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(p) & \dots & \gamma(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

où  $\Sigma = [\mathbf{u}(n)\mathbf{u}(n)^+]$ .

En utilisant à nouveau la matrice de corrélation décalée de  $q > p+1$ , on obtient une relation de singularité

$$(30) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(q) & \dots & \gamma(q-p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(q+p) & \dots & \gamma(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

qui nous permet de déterminer la matrice paramètre de la même façon que précédemment. Ceci revient à identifier le modèle AR vectoriel singulier vérifié par la matrice de corrélation décalée. Nous avons noté qu'un AR singulier est composé d'une somme de sinusoïdes amorties ou non. Par suite, la densité spectrale est composée d'une somme de raies et de lorentziennes. La suite de la méthode fournit les paramètres des lorentziennes - fréquence centrale et amortissement - et finalement, la détermination des amplitudes aura lieu à l'aide d'un système des moindres carrés sur les termes diagonaux des  $\gamma_i$ .

Ainsi, avec de faibles modifications, la méthodologie que nous proposons s'adapte aux processus aléatoires autorégressifs vectoriels. Nous pouvons noter avec [6] que les composantes d'un signal vectoriel répondant à un modèle AR vectoriel sont en fait des signaux ARMA à phase minimale. Il est alors clair que la modélisation que nous mettons en oeuvre permet de traiter une grande classe de signaux aléatoires. De plus, ce formalisme étend simplement les notions de vecteur propre, de recherches de zéros utilisées dans le cas scalaire pour les méthodes à haute résolution. Ainsi, l'extension de la méthode MUSIC, de la méthode du vecteur orthogonal, ..., sont immédiates.

#### V. APPLICATIONS A LA LOCALISATION DE SOURCES DECORRELEES

Les applications en traitement spatial apparaissent dès que l'on considère les composantes du processus vectoriel comme les

sorties de capteurs disposés en antenne. Le signal vectoriel résulte ainsi de l'échantillonnage spatio-temporel d'une somme d'ondes planes. La caractérisation que nous envisageons consiste à déterminer pour chaque onde sa fréquence temporelle (ou sa fréquence centrale), éventuellement un amortissement, sa fréquence spatiale (ou sa direction d'arrivée), et sa puissance.

Pour simplifier l'exposé, nous supposons ici que les capteurs sont équirépartis et forment une antenne rectiligne. Dans ces conditions, les phases sont en progression arithmétique le long de l'antenne.

On commencera par déterminer les coefficients du modèle autorégressif vectoriel en utilisant la matrice de corrélation directe, décalée, ou la matrice des cumulants d'ordre 4 suivant le type de signal recherché et les hypothèses acceptables sur le bruit. Rappelons que la matrice paramètre  $\mathbf{A}$  est obtenue en regroupant les  $K$  vecteurs propres associés aux  $K$  valeurs propres les plus faibles,  $K$  étant le nombre de capteurs. Les fréquences temporelles et les amortissements seront calculés en recherchant les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{C}$ , matrice compagne du polynôme  $\mathbf{P}(z)$ . Les fréquences spatiales seront quant à elles obtenues à partir de la relation (8) :

$$(8) \quad \mathbf{P}(z_i)\mathbf{s}(z_i) = \mathbf{0}.$$

Cette égalité signifie que  $\mathbf{s}(z_i)$  appartient au noyau de  $\mathbf{P}(z_i)$ . A un facteur d'amplitude complexe près,  $\mathbf{s}(z_i)$  est de la forme

$$(31) \quad \mathbf{s}(z_i) = [1 \ e^{-j2\pi k_i e} \dots e^{-j2\pi(m-1)k_i e}]^T,$$

où  $e$  est la distance entre deux capteurs adjacents.

Il nous suffit donc, pour déterminer les fréquences spatiales, de sélectionner le vecteur propre associé à la valeur propre nulle de  $\mathbf{P}(z_i)$ . Notons d'ailleurs que d'après (11),

$$(32) \quad \mathbf{C}\mathbf{s}(z_i) = z_i\mathbf{s}(z_i),$$

avec  $\mathbf{s}(z_i) = [\mathbf{s}(z_i) \ z_i^{-1}\mathbf{s}(z_i) \dots \ z_i^{p+1}\mathbf{s}(z_i)]^T$ .

$\mathbf{s}(z_i)$  nous sera donc donné directement lors de la recherche des fréquences temporelles en sélectionnant le vecteur propre de  $\mathbf{C}$  associé à la valeur propre  $z_i$ .

Contrairement aux méthodes classiques de traitement d'antenne, où intervient successivement une analyse fréquentielle puis une analyse spatiale, nous constatons que dans la démarche proposée les deux analyses sont effectuées simultanément. Ceci n'est que l'un des points étonnants de cette méthode. En effet, recherchons maintenant quel est le nombre de capteurs nécessaires pour mettre en oeuvre cette méthode. Dans l'approche Haute résolution classique, il est nécessaire de disposer d'au moins  $(2p+1)$  capteurs pour calculer les  $2p$  fréquences spatiales associées à la somme de  $p$  ondes planes réelles. Ici, il n'en est rien : si on considère toujours la somme de  $p$  ondes planes réelles, il suffit que la dimension de la matrice de corrélation du processus vectoriel soit supérieure à  $2p$  pour que celle-ci soit singulière. En notant  $n$  le nombre de capteurs disponibles, on devra prendre une matrice de corrélation de dimension supérieure à  $(2p+n)$  pour calculer la matrice paramètre  $\mathbf{A}$ . Lorsque l'on considère un processus vectoriel de dimension  $n$  et que l'on estime la matrice de corrélation à un ordre arbitraire  $(p_0+1)$ , sa dimension est  $(p_0+1)n \times (p_0+1)n$ . On devra donc vérifier

$$(33) \quad p_0 n > 2p.$$

On dispose alors de 2 paramètres libres  $p_0$  et  $n$ . Pour un nombre de capteurs donnés, il suffira donc de prendre l'ordre  $p_0$  adéquat (si le nombre de points temporels disponibles le permet, ce qui n'est pas très contraignant). Ceci nous conduit donc à la conclusion suivante : il nous suffit de deux capteurs pour caractériser une somme de  $p$  ondes planes décorréliées.

Puisque nous pouvons nous contenter d'un nombre de capteurs très faible, nous pourrions tirer parti des capteurs excédentaires pour améliorer l'estimation de la matrice de corrélation. Les capteurs adjacents pourront être regroupés en "sous-antennes" (avec recouvrements possibles entre les sous-antennes) pour calculer plusieurs estimées de la matrice de corrélation, estimées qui seront ensuite moyennées.

La figure 1 représente la localisation (axes : fréquences spatiale, fréquences temporelle et amplitudes) de 4 sources monochromatiques obtenue à l'aide de deux capteurs. La méthode





étendue employée est celle du "vecteur orthogonal". La localisation est ici parfaite, en l'absence de bruit additif.

Densité spectrale de Pisarenko 2D

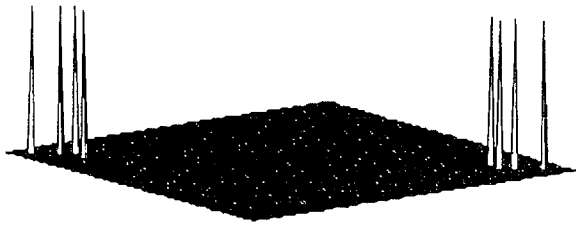


Figure 1

La figure 2, quant à elle, donne un exemple de localisation de sources aléatoires décorrélées : à l'aide de 3 capteurs et en appliquant la méthode exposée en IV, les sources sont très bien repérées.

Densité spectrale 2D pour 3 sources aléatoires

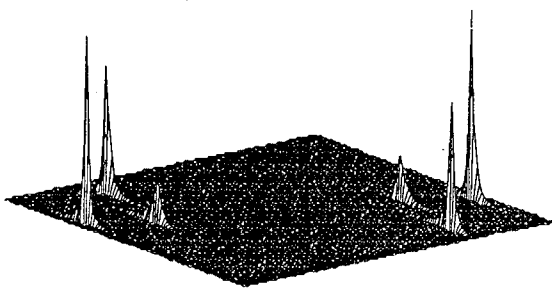


Figure 2

## VI. SEPARATION DE SOURCES CORRELEES

Un thème important en traitement d'antenne est l'analyse de sources corrélées (avec en particulier le problème de séparation d'échos). Pour le moment, on fait appel à des opérateurs de moyenne (lissage fréquentiel, lissage spatial [7]) afin de décorréler les sources et utiliser les traitements standards. Dans la mesure où à une fréquence temporelle ne correspond qu'une seule fréquence spatiale, la présence de sources corrélées se traduit ici par une moyenne des phases le long de l'antenne. Par cette approche directe, nous ne pourrions donc pas séparer de sources corrélées.

Dans la présentation précédente, nous avons vu que pour un  $z_i$  donné, nous obtenons la répartition des phases sur les capteurs formant l'antenne. Il est clair que rien dans la démarche n'interdit, pour deux  $z_i$  différents, d'obtenir la même fréquence spatiale. Dans ces conditions, on peut "retourner" le problème en effectuant la prédiction dans la dimension spatiale et non plus dans la dimension temporelle :

$$(34) \quad s_n = -\sum_{i=1}^P A_i s_{n-i}$$

avec

$$(35) \quad s_n = [s_n(1) \dots s_n(K)]^T,$$

l'indice  $n$  représentant le  $n^{\text{ème}}$  capteur.

On cherchera donc un modèle AR singulier vectoriel représentant les dépendances entre les capteurs successifs. L'ensemble des équations précédentes restera valable, si ce n'est qu'on remplacera les fréquences temporelles (les  $z_i$ ) par les fréquences spatiales et inversement. L'ensemble des fréquences spatiales est alors déterminé par une relation analogue à (13)

$$(36) \quad (z_s \mathbf{1} - \mathbf{C})\mathbf{s}(z_s) = \mathbf{0},$$

et les caractéristiques temporelles (fréquence temporelle et amortissement) correspondant à chaque fréquence spatiale seront données par

$$(37) \quad \mathbf{P}(z_s)\mathbf{s}(z_s) = \mathbf{0}.$$

Nous disposons donc d'une méthode qui permet de prendre réellement en compte la corrélation des sources. Nous donnons ci-dessous un exemple numérique de l'application de cette méthode au cas de 6 sources (résultats très bons dans ce cas non bruité). La simulation a été effectuée avec 24 capteurs et 5 points temporels.

fréquences spatiales théoriques (réduites) :

0.2100 0.1800 0.1600 0.1300 0.0800 0.0600

fréquences spatiales pratiques :

0.2100 0.1804 0.1605 0.1327 0.0819 0.0599

fréquences temporelles théoriques (réduites) :

0.1000 0.2000 0.1500 0.1000 0.1200 0.1000

répartition des phases (normalisées à  $2\pi$ ) :

-0.1000	-0.1992	-0.1453	-0.1069	-0.1203	-0.0993
-0.1998	-0.3990	-0.2836	-0.2117	-0.2420	-0.2004
-0.2998	0.4047	-0.4149	-0.3180	-0.3639	-0.2979
-0.3999	0.2079	0.4425	-0.4263	-0.4842	-0.3931

## VII. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons donné un formalisme permettant d'étendre les méthodes dérivées de l'approche de Pisarenko au cas des signaux vectoriels. Nous avons étendu ces résultats aux signaux aléatoires, et défini plusieurs procédures pour appliquer cette méthodologie dans le cas de signaux bruités. Nous avons envisagé l'application de ces résultats au traitement d'antenne : comme conséquences de cette nouvelle approche, nous avons montré que l'on peut s'affranchir du nombre de capteurs minimum nécessaire dans les approches "classiques", et que l'on peut traiter simplement le cas des sources corrélées. Il semble de plus que cette méthodologie, compte tenu de grandes analogies formelles, devrait donner des résultats intéressants en analyse spectrale multidimensionnelle.

Ces résultats étant établis, il nous faut maintenant chercher à évaluer et comparer les performances de ces méthodes vis à vis des autres méthodes de traitement d'antenne, étudier la stabilité et la tenue statistique. Enfin, il semble important d'étudier les problèmes de détection des sources faibles, et d'expliquer certaines défaillances (numériques?) survenant lors de la manipulation de matrices de grande taille (nombre de sources élevé).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] PISARENKO, V.F., "The retrieval of harmonics from a covariance function", Geophysical Journal of the Royal Astronomical society, vol. 33, 1973, p. 347-360.
- [2] SCHMIDT R.O., "Multiple source emitter and signal parameter estimation", IEEE, trans. on AP-30, March 1986, p. 276-280.
- [3] MARPLE, S.L., "Digital Spectral Analysis with Applications", Prentice Hall Signal Processing Series, New Jersey, 1987.
- [4] LE ROUX, J., "Quelques remarques concernant l'extension de la méthode de Prony-Pisarenko au cas des signaux vectoriels", douzième colloque GRETSI, Juan les Pins, 1989.
- [5] BRILLINGER D.R., "Time Series Data Analysis and Theory", Holden Day, 1981.
- [6] DACUNHA-CASTELLE, D. et AZENCOTT, R., "Séries d'observations irrégulières : modélisation et prévision", Collection Techniques Stochastiques, Masson, 1984.
- [7] OUAMRI, A., "Etude des performances des méthodes d'identification à haute résolution et application à l'identification d'échos par une antenne linéaire multicapteurs", thèse de doctorat d'état, Orsay, Juin 1986.