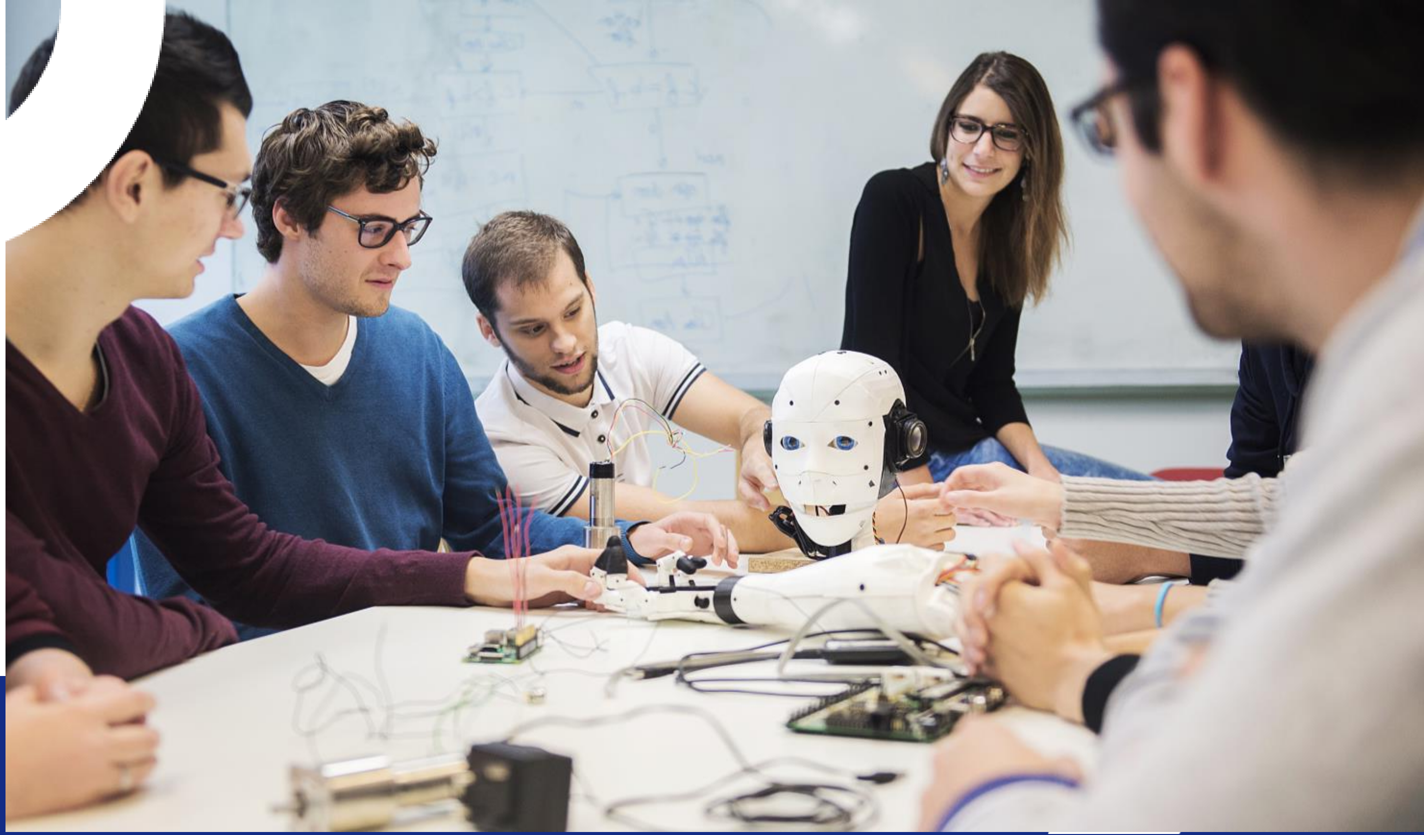
ESIEE PARIS

L'ÉCOLE DE L'INNOVATION TECHNOLOGIQUE



Traitement de l'information analogique

Chapitre 1 : Montages en régime sinusoïdal établi

Corinne Berland

Une école de CCI PARIS ILE-DE-FRANCE EDUCATION

Université Gustave Eiffel

Présentation de l'unité

- L'électronique analogique : faire des opérations mathématiques simples sur les signaux à temps continu
  - Fonctions électroniques analogiques de base
    - ✓ Amplification
    - ✓ Mélange, multiplication
    - ✓ Filtrage
    - ✓ Détection d'enveloppe
    - ✓ Redressement de signaux….
- A l'issu du cours vous serez capable
  - De calculer théoriquement, de mettre en œuvre et de mesurer des fonctions électroniques élémentaires

Introduction

- **Chapitre 1 : Montages en régime sinusoïdal établi**
  1. Les sources sinusoïdales
  2. Régime établi et notation complexe
  3. Les phaseurs – relation avec les éléments passifs
  4. Lois de Kirchhoff en régime établi
  5. Fonctions de transfert
  6. Diagrammes de Bode : 1er ordre
  7. Fonctions de filtrage

- Chapitre 2 : l'amplificateur opérationnel
  1. L'amplificateur opérationnel : principe
  2. Fonctionnement en amplificateur
  3. Fonctionnement en oscillateur
  4. Fonctionnement en comparateur

- Chapitre 3 : La diode
  1. Le fonctionnement de la diode PN
  2. Modèles équivalents de la diode
  3. Circuits élémentaires

- Chapitre 4 : le transistor bipolaire
  1. Le fonctionnement du transistor
  2. Modèle équivalent petit signal du transistor
  3. L'amplificateur à transistor bipolaire

Introduction

- Chapitre 1 : Montages en régime sinusoïdal établi
  - A l'issu de ce chapitre, vous serez capable de :
    - ✓ Calculer des montages lorsque les générateurs varient de manière sinusoïdale en entrée
    - ✓ Mesurer des montages en régime sinusoïdal
  - Plan du cours
    - ✓ 1. Les sources sinusoïdales
    - ✓ 2. Régime établi et notation complexe
    - ✓ 3. Les phaseurs – relations avec les éléments passifs
    - ✓ 4. Lois de Kirchoff en régime établi
    - ✓ 5. Les fonctions de transfert
    - ✓ 6. Diagramme de Bode du premier ordre
    - ✓ 7. Fonctions de filtrage

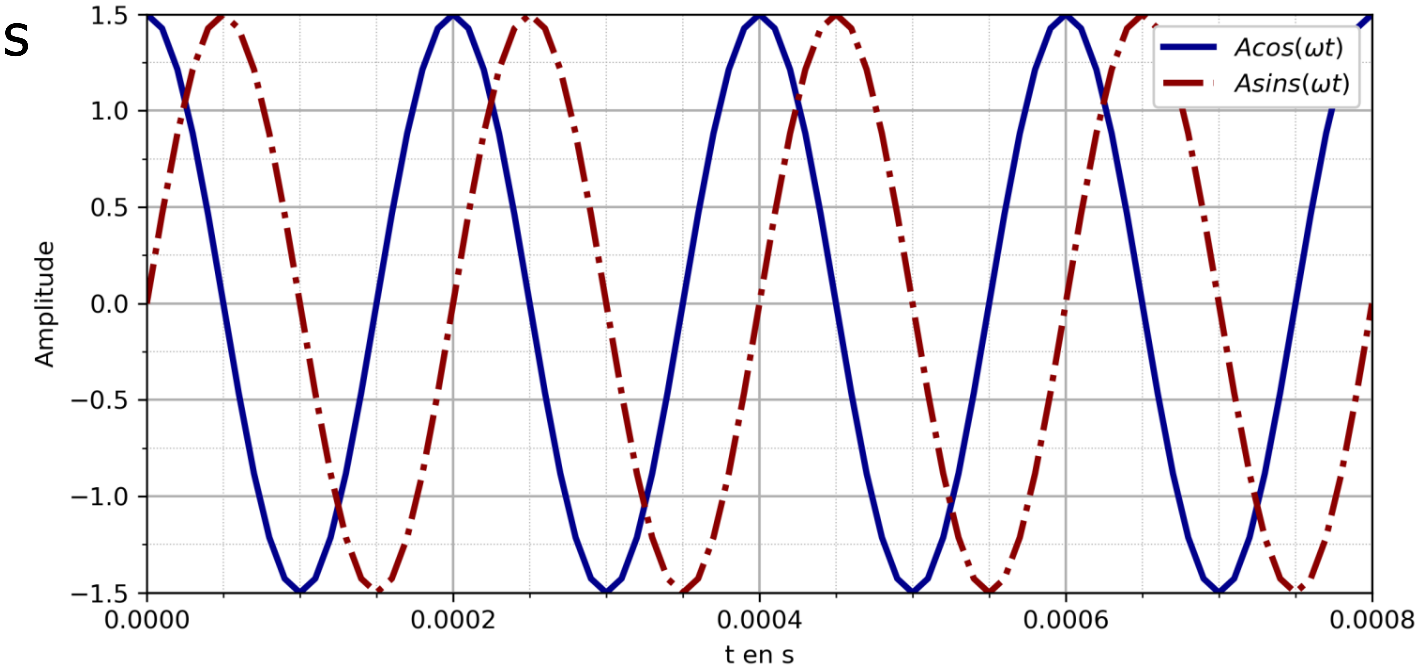
1. Les sources sinusoïdales

- Forme :

$$u_A(t) = U_M \cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad u_B(t) = U_M \sin(\omega t)$$
$$i_A(t) = I_M \cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad i_B(t) = I_M \sin(\omega t)$$

  - $\mathbf{U_M}$, $\mathbf{I_M}$: amplitudes maximales de la tension et du courant
  - ω : pulsation (ou vitesse angulaire) en rad.s^{-1}

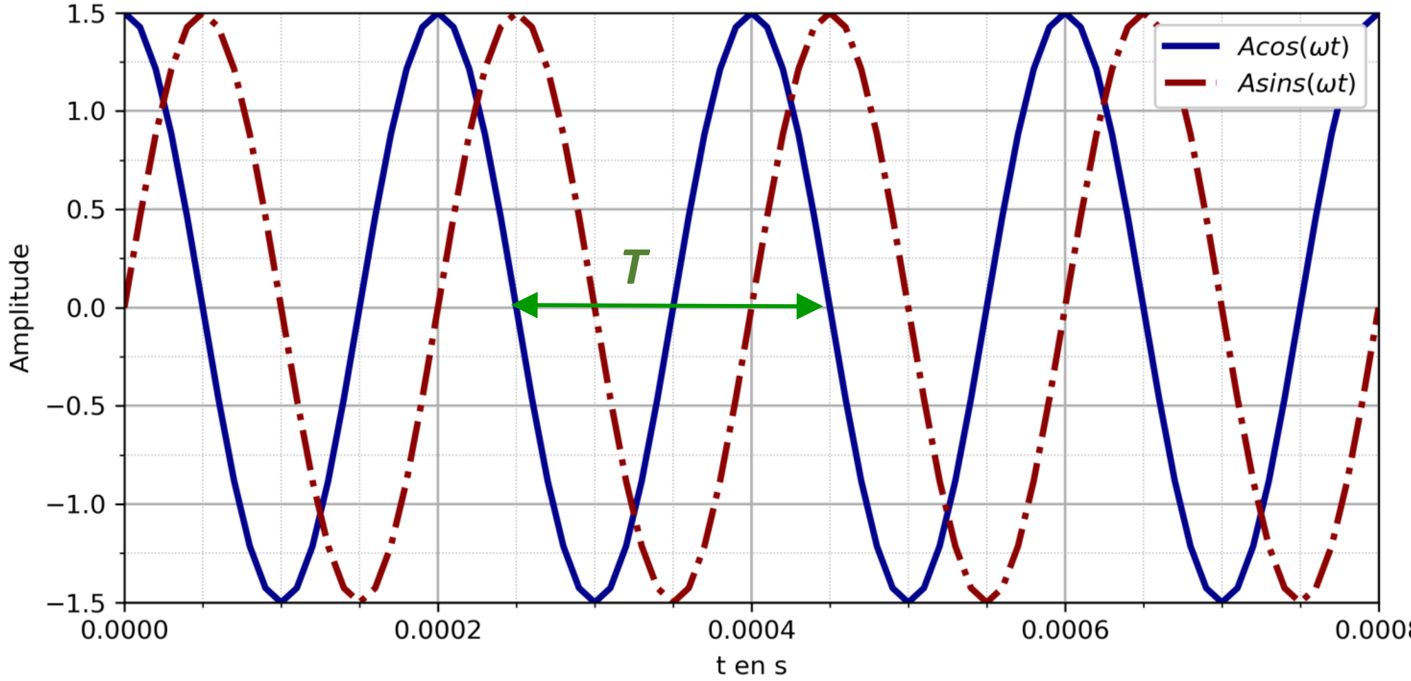
- Tracés en fonction du temps
  - (ici, A=1.5)



1. Les sources sinusoïdales

- Signaux périodiques

$$u_g(t) = u_g(t+T)$$



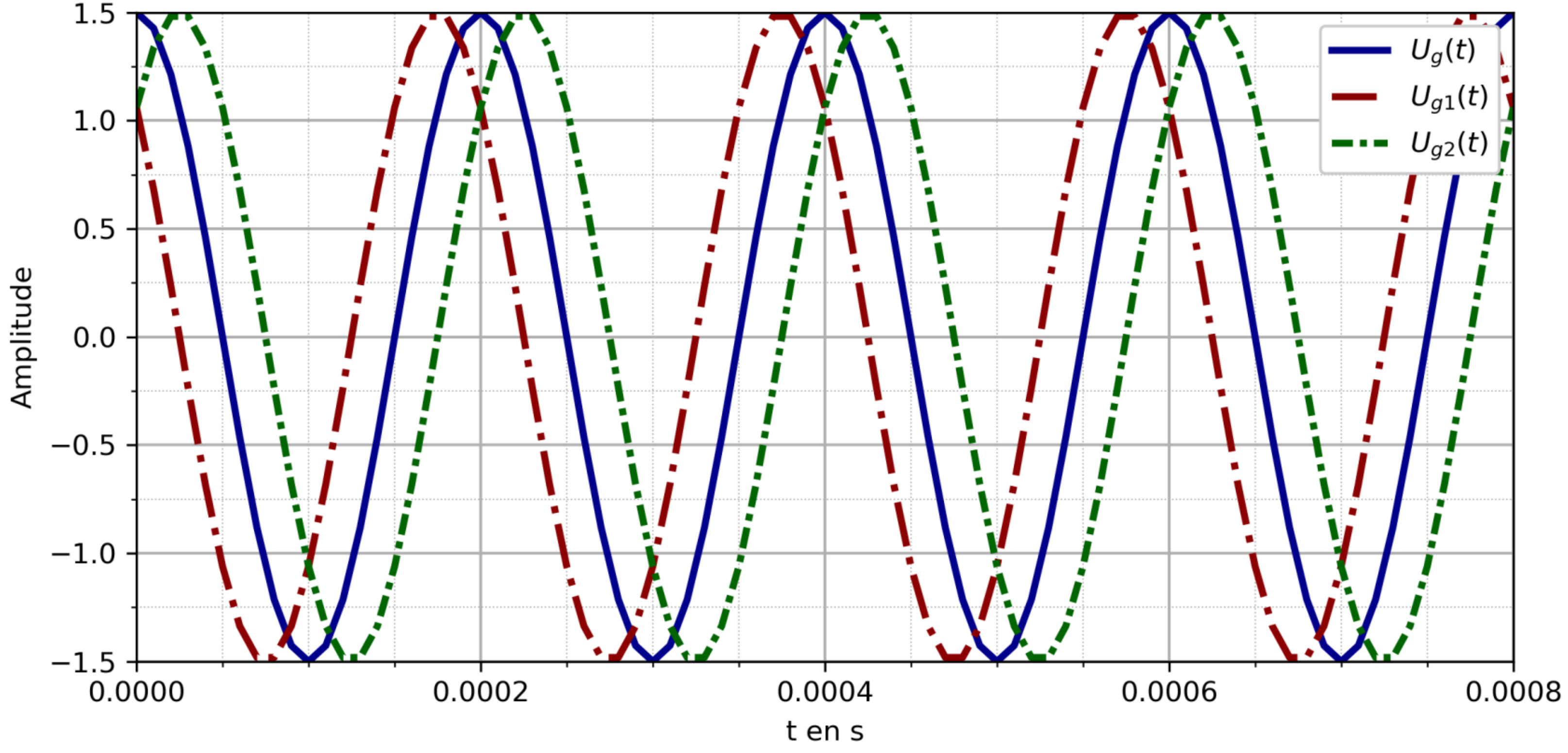
- **U_M, I_M** : amplitudes maximales
- **F** : fréquence en Hz
- **T** : période en seconde
- **ω** : pulsation en rad.s^{-1}

$$F = \frac{1}{T}.$$

$$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T} \ \text{rad.s}^{-1}$$

1. Les sources sinusoïdales

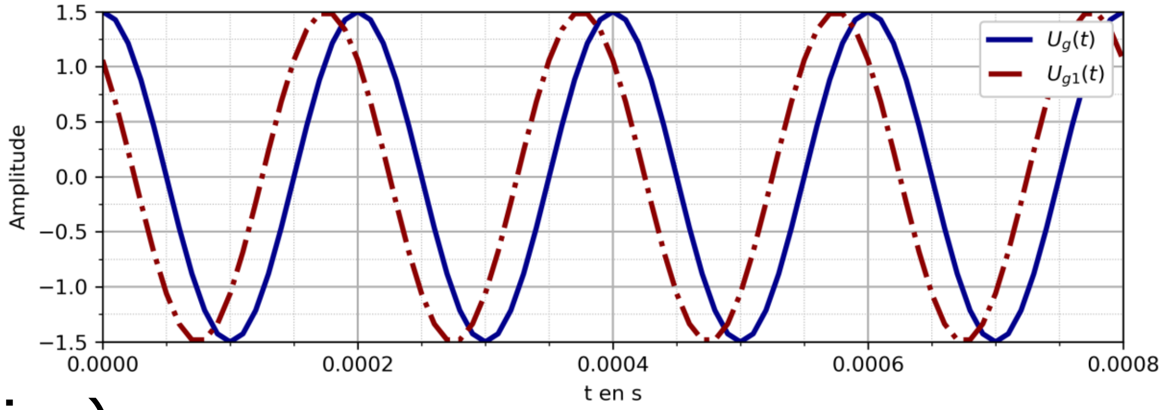
Signaux déphasés



- $\mathbf{u_{g1}(t)}$ est en avance par rapport à $\mathbf{u_g(t)}$
  - Elle passe à « 0 » avant
- $\mathbf{u_{g2}(t)}$ est en retard par rapport à $\mathbf{u_g(t)}$
  - Elle passe à « 0 » après

1. Les sources sinusoïdales

- **Courbe en avance de phase Ug1(t)**



  - Par rapport à

$$u_g(t) = U_M \cos(\omega t)$$

  - Déphase positif d'un angle ϕ (en radian)

$$u_{g1}(t) = U_M \cos(\omega t + \phi)$$

⬄ Ecart temporel entre les deux courbes

$$u_{g1}(t) = U_M \cos(\omega t + \phi)$$

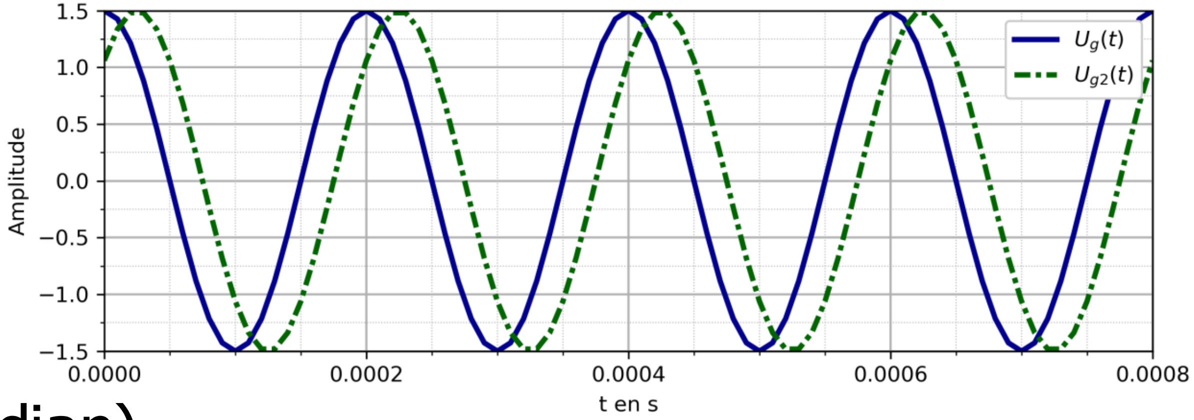
$$= U_M \cos\left[\omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right]$$

$$= U_M \cos[\omega(t + \Delta t)]$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\phi}{\omega}$$

$$\boxed{\Rightarrow u_{g1}(t) = u_g(t + \Delta t)}$$

1. Les sources sinusoïdales



▸ Courbe en retard de phase $\mathbf{U_{g2}(t)}$

- Par rapport à

$$u_g(t) = U_M \cos(\omega t)$$

- Déphase négatif d'un angle ϕ (en radian)

$$u_{g2}(t) = U_M \cos(\omega t - \phi)$$

- Ecart temporel entre les deux courbes

$$u_{g2}(t) = U_M \cos(\omega t - \phi)$$
$$= U_M \cos\left[\omega\left(t - \frac{\phi}{\omega}\right)\right] \Rightarrow \Delta t = \frac{\phi}{\omega}$$
$$= U_M \cos[\omega(t - \Delta t)]$$

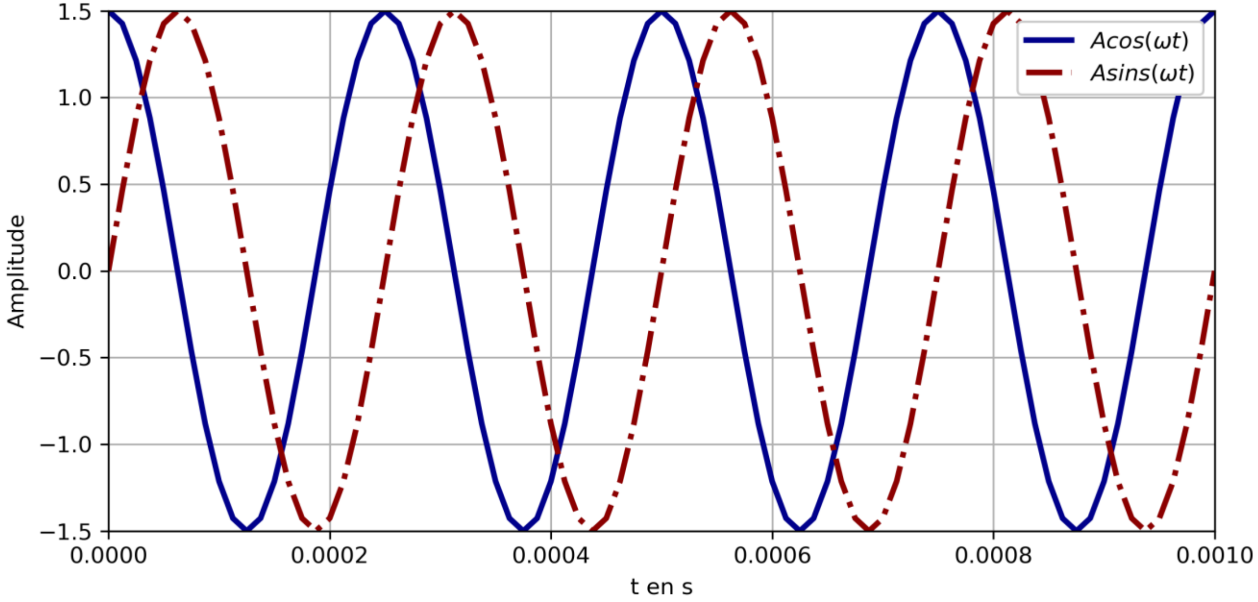
$$\boxed{\Rightarrow u_{g2}(t) = u_g(t - \Delta t)}$$

1. Les sources sinusoïdales

- Attention :

  Le sinus est en retard de phase de $\pi/2$ par rapport au cosinus

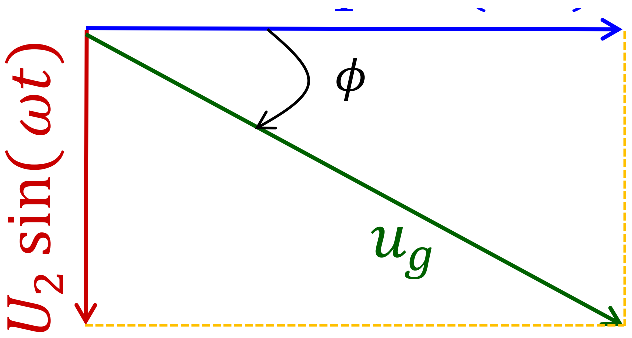
$$\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



- Représentation vectorielle :

$$u_g(t) = U_1\cos(\omega t) + U_2\sin(\omega t) = U_M\cos(\omega t - \phi)$$

avec $\begin{cases} U_M = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} \\ \tan(\phi) = \dfrac{U_2}{U_1} \end{cases}$



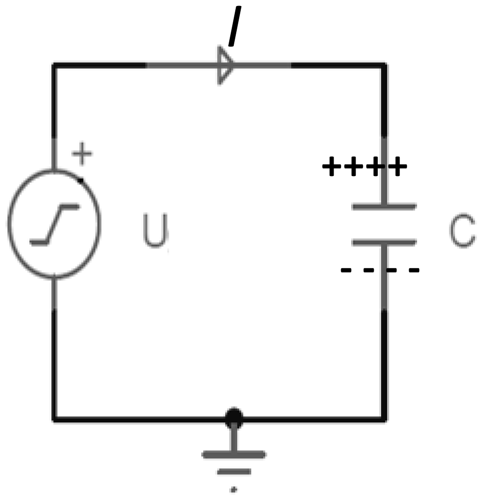
2. Régime établi et notation complexe

▸ Rappel sur le condensateur

- Lorsque l'on applique une tension U aux bornes du condensateur C
→ création d'un courant I : il se charge

$$Q = C.U \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq(t)}{dU}.\frac{dU(t)}{dt} = C.\frac{dU(t)}{dt}$$

(on suppose C constant)

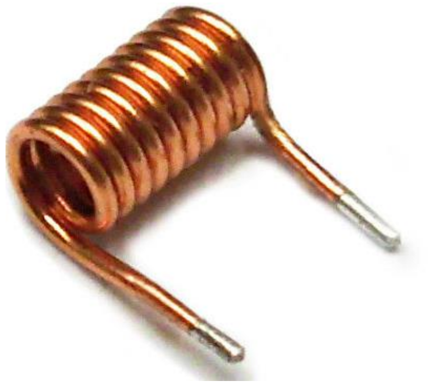


C : capacité du condensateur, s'exprime en Farad (F)

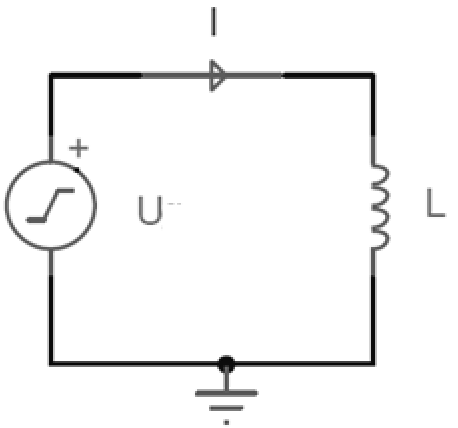
2. Régime établi et notation complexe

▸ Rappel sur la bobine

- Composant L qui génère une tension U à ses bornes quand un courant I la traverse
  - ✓ Création d'un flux magnétique
  - ✓ Elle s'oppose à toutes variations de courant



$$U = L\frac{dI}{dt}$$



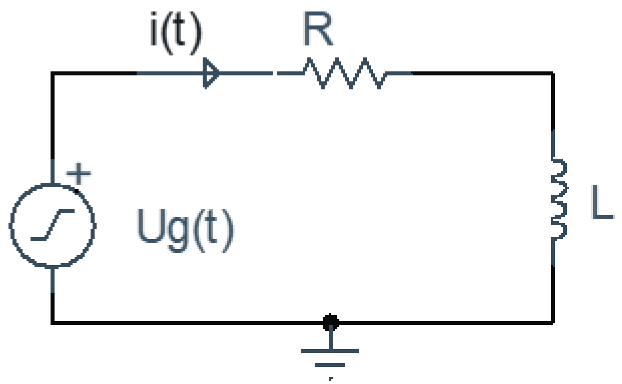
L : inductance de la bobine, s'exprime en Henry (H)

2. Régime établi et notation complexe

▸ Introduction à la notation complexe

- Soit un circuit dont la source $u_g(t)$ est sinusoïdale :

$$u_g(t) = U_M \cos(\omega t + \theta)$$



→ Objectif : calculer $i(t)$, $u_R(t)$ et $u_L(t)$

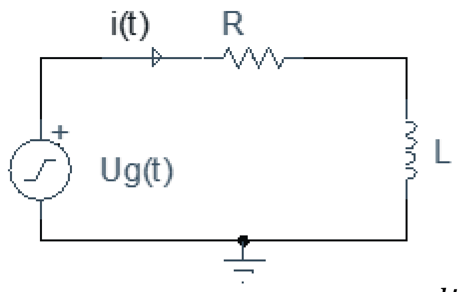
✓Solution → loi des mailles :

$$u_g(t) = u_R(t) + u_L(t) \quad \Leftrightarrow \quad U_M \cos(\omega t + \theta) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

- Résolution d'une équation différentielle : on verra plus tard pour le régime transitoire
- <u>Ou</u> utilisation des phaseurs et impédances complexes (<u>en régime établi uniquement</u>)

2. Régime établi et notation complexe

▸ Introduction à la notation complexe



$$U_M \cos(\omega t + \theta) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

- Signal réel : $u_g(t) = U_M \cos(\omega t + \theta)$
  - ✓ partie réelle du signal complexe :

$$\hat{u}_g(t) = U_M e^{j(\omega t + \theta)}$$

- Pour rappel : $e^{j(\omega t+\theta)} = \cos(\omega t + \theta) + j\sin(\omega t + \theta)$

donc :

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{u}_g(t) = U_M[\cos(\omega t + \theta) + j\sin(\omega t + \theta)] \\ &u_g(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{u}_g(t)\right] \end{aligned}}$$

- Pour calculer les montages, on connait la fréquence/pulsation
  - ✓ ce qui nous intéresse : l'amplitude et la phase du signal

2. Régime établi et notation complexe

Définition du phaseur

- Expression temporelle :

$$u_g(t) = U_M cos(\omega t + \theta)$$
$$i_g(t) = I_M cos(\omega t + \phi)$$

- Notation complexe :

$$\hat{u}_g(t) = U_M e^{j(\omega t+\theta)} = U_M e^{j\theta} e^{j\omega t} = \underline{U}.e^{j\omega t}$$
$$\hat{i}_g(t) = I_M e^{j(\omega t+\varphi)} = I_M e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{I}.e^{j\omega t}$$

- Définition du phaseur :

$$\underline{U} = U_M e^{j\theta} = U_M \angle\theta$$
$$\underline{I} = I_M e^{j\phi} = I_M \angle\phi$$

3. Les phaseurs - relations avec les éléments passifs

- La résistance
  - Loi des mailles : $u_R(t) = Ri_R(t)$
  - Avec la notation complexe : $\hat{U}_R(t) = R\hat{I}_R(t)$

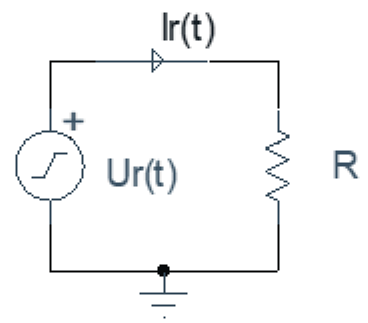
$$\rightarrow \quad \underline{U_R}e^{j\omega t} = R\underline{I_R}e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{U_R} = R\underline{I_R}$$

  - On retrouve la loi d'Ohm qui lie les deux phaseurs

$$\boxed{\underline{U_R} = Z_R\underline{I_R} \text{ avec } Z_R = R}$$

→ Z_R = impédance de la résistance

  - De même : $\underline{I_R} = \dfrac{U_M\, e^{j\theta}}{R} \Rightarrow \begin{cases} I_M = \dfrac{U_M}{R} \\ \phi = \theta \end{cases} \Rightarrow i_R(t) = I_M \cos(\omega t + \theta)$



$$u_R(t) = U_M \cos(\omega t + \theta)$$
$$i_R(t) = I_M \cos(\omega t + \phi)$$

$$\hat{U}_R(t) = U_M e^{j(\omega t + \theta)} = \underline{U_R}e^{j\omega t}$$
$$\hat{I}_R(t) = I_M e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{I_R}e^{j\omega t}$$

$$\underline{U_R} = U_M e^{j\theta} \text{ et } \underline{I_R} = I_M e^{j\phi}$$

3. Les phaseurs - relations avec les éléments passifs

La bobine

- Loi des mailles : $$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

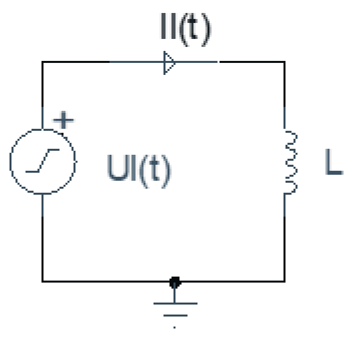
- Avec la notation complexe : $$\hat{u}_L(t) = L\frac{d\hat{\imath}_L(t)}{dt}$$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} \underline{U_L}e^{j\omega t} &= L\frac{d}{dt}\left(\underline{I_L}e^{j\omega t}\right) \\ \underline{U_L}e^{j\omega t} &= jL\omega\underline{I_L}e^{j\omega t} \\ \underline{U_L} &= jL\omega\underline{I_L} \end{aligned}$$

- On retrouve la loi d'Ohm qui lie les deux phaseurs

$$\boxed{\underline{U_L} = Z_L\underline{I_L} \text{ avec } Z_L = jL\omega}$$

→ Z_L : impédance de la bobine



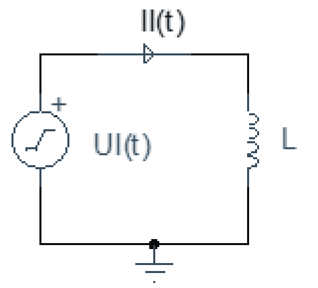
$$u_L(t) = U_M\cos(\omega t + \theta)$$
$$i_L(t) = I_M\cos(\omega t + \phi)$$

$$\hat{u}_L(t) = U_M e^{j(\omega t+\theta)} = \underline{U_L}e^{j\omega t}$$
$$\hat{\imath}_L(t) = I_M e^{j(\omega t+\phi)} = \underline{I_L}e^{j\omega t}$$

$\underline{U_L} = U_M e^{j\theta}$ et $\underline{I_L} = I_M e^{j\phi}$

3. Les phaseurs - relations avec les éléments passifs

- La bobine
  - On a donc : $\underline{U_L} = jL\omega\underline{I_L} = L\omega\underline{I_L}e^{\frac{j\pi}{2}}$



$\underline{U_L} = U_M e^{j\theta}$ et $\underline{I_L} = I_M e^{j\phi}$

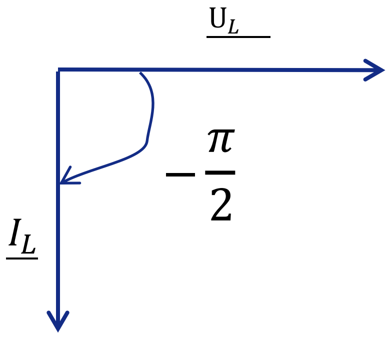
  - Ce qui donne :

$$\underline{I_L} = \frac{\underline{U_L}}{L\omega}.e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I_M e^{j\phi} = \frac{U_M}{L\omega}.e^{j\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \begin{cases} I_M = \dfrac{U_M}{L\omega} \\ \phi = \theta - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

  - Dans une bobine,

$$\boxed{i_L(t) = \frac{U_M}{L\omega}\cos(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2})}$$

✓ le courant est en retard par rapport à la tension



3. Les phaseurs - relations avec les éléments passifs

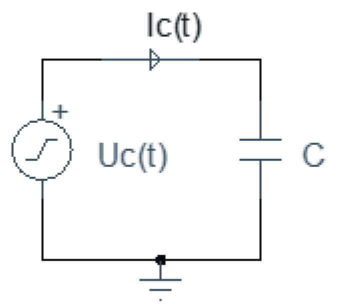
- Le condensateur
  - Loi des mailles : $i_C(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}$
  - Avec la notation complexe : $\hat{\imath}_C(t) = C\dfrac{d\hat{u}_C(t)}{dt}$

$$\rightarrow \quad \underline{I_C}e^{j\omega t} = C\frac{d}{dt}\left(\underline{U_C}e^{j\omega t}\right) = jC\omega\underline{U_C}e^{j\omega t}$$
$$\underline{I_C} = jC\omega\underline{U_C}$$
$$\underline{U_C} = \frac{1}{jC\omega}\underline{I_C}$$

  - On retrouve la loi d'Ohm qui lie les deux phaseurs :

$$\boxed{\underline{U_C} = Z_C\underline{I_C} \text{ avec } Z_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}}$$

→ Z_C : impédance du condensateur



$u_C(t) = U_M\cos(\omega t + \theta)$
$i_C(t) = I_M\cos(\omega t + \phi)$

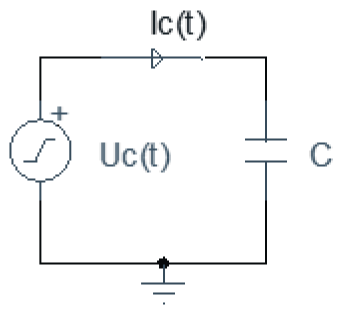
$\hat{u}_C(t) = U_M e^{j(\omega t+\theta)} = \underline{U_C}e^{j\omega t}$
$\hat{\imath}_C(t) = I_M e^{j(\omega t+\phi)} = \underline{I_C}e^{j\omega t}$

$\underline{U_C} = U_M e^{j\theta}$ et $\underline{I_C} = I_M e^{j\phi}$

3. Les phaseurs - relations avec les éléments passifs

Le condensateur

- On a donc : $\underline{U_C} = \dfrac{\underline{I_C}}{jC\omega} = \dfrac{\underline{I_C}}{C\omega\, e^{\frac{j\pi}{2}}}$



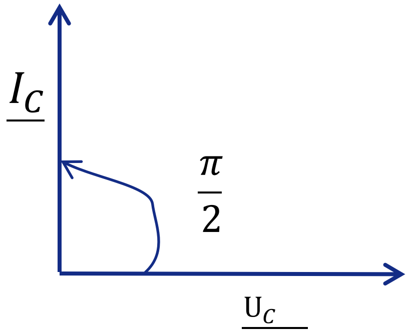
$\underline{U_C} = U_M e^{j\theta}$ et $\underline{I_C} = I_M e^{j\phi}$

- Ce qui donne :

$$\left.\begin{aligned} \underline{I_C} &= C\omega \underline{U_C}.\, e^{j\frac{\pi}{2}} \\ I_M e^{j\phi} &= C\omega U_M.\, e^{j\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}\right\} I_M = C\omega U_M \ \text{ et } \phi = \theta + \frac{\pi}{2}$$

- Dans un condensateur, $i_C(t) = C\omega\, U_M \cos(\omega t + \theta + \dfrac{\pi}{2})$

  le courant est en avance par rapport à la tension



3. Les phaseurs - relations avec les éléments passifs

- L'impédance
  - Grandeur complexe
    - ✓ qui est le rapport entre le phaseur de tension et le phaseur de courant : $Z = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$
  - Expression générale : $Z = R + jX\ \Omega$
    - ✓ R : résistance, X : réactance
    - ✓ Unité : Ohm (Ω)
  - Impédance d'une résistance : $\boxed{Z_R = R}$ → valeur réelle positive
  - Impédance d'une bobine : $\boxed{Z_L = jL\omega}$ → valeur imaginaire positive
  - Impédance d'un condensateur : $\boxed{Z_C = \frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}}$ → valeur imaginaire négative

3. Les phaseurs - relations avec les éléments passifs

- L'admittance
  - Grandeur complexe
    - ✓ qui est le rapport entre le phaseur de courant et le phaseur de tension : $Y = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$
  - Expression générale : $Y = G + jB \quad S$
    - ✓ G : conductance, B : susceptance
    - ✓ Unité : Siemens (S)
  - Admittance de la résistance : $\boxed{Y_R = \frac{1}{R} = G}$ → valeur réelle
  - Admittance d'une bobine : $\boxed{Y_L = \frac{1}{jL\omega} = \frac{-j}{L\omega}}$ → valeur imaginaire négative
  - Admittance d'un condensateur : $\boxed{Y_C = jC\omega}$ → valeur imaginaire positive

3. Les phaseurs - relations avec les éléments passifs

- Impédances et admittances, exemples :
  - Résistance de 1 KΩ à une fréquence de 1 MHz :

$$Z_R = R = 1\ \mathrm{k\Omega} \qquad Y_R = \frac{1}{R} = 1\ \mathrm{mS}$$

  - Bobine de 10 nH à une fréquence de 5 GHz :

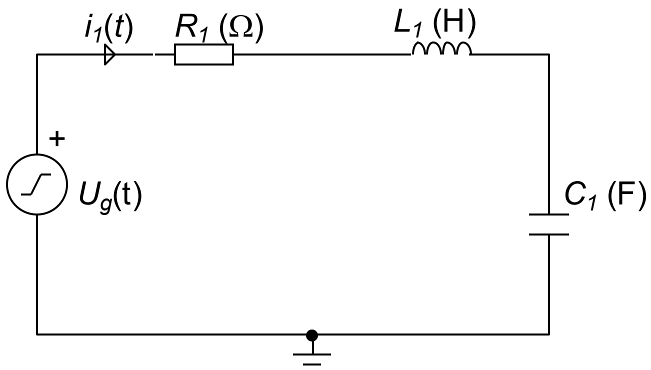
$$Z_L = jL\omega = j10.10^{-9}.2\pi.5.10^{9} = j314{,}16\ \Omega \qquad Y_L = \frac{1}{jL\omega} = \frac{1}{314{,}16j} = -j3{,}183\ \mathrm{mS}$$

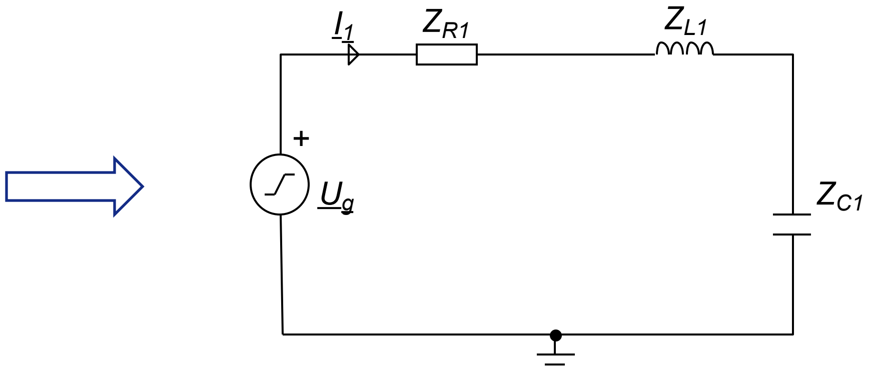
  - Condensateur de 15 pF à une fréquence de 50 MHz :

$$Z_c = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{j15.10^{-12}.2\pi50.10^{6}} = -j212{,}2\ \Omega \qquad Y_c = jC\omega = j15.10^{-12}.2\pi50.10^{6} = j4{,}71\ \mathrm{mS}$$

Les phaseurs - relations avec les éléments passifs

- Méthode de calcul des montages $u(t) = U_M \cos(\omega t + \theta) \Leftrightarrow \underline{U} = U_M e^{j\theta}$
  - Transformation des montages pour les résoudre en utilisant les lois vues en continue
    - ✓ Les générateurs sont représentés par leurs phaseurs
    - ✓ Les éléments passifs sont représentés par leurs impédances
    - ✓ Les équations différentielles sont transformés en lois d'Ohm : $\underline{U} = Z\underline{I}$
    - ✓ Le circuit est calculé avec les phaseurs avant de refaire la transformation inverse





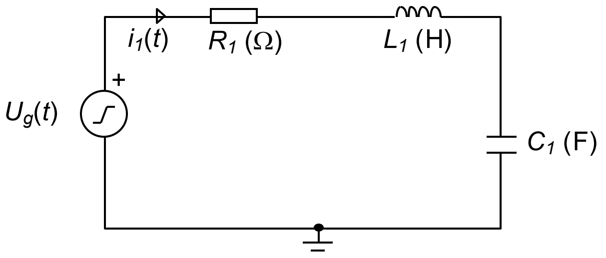
$$u_g(t) = R_1 \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$$

$$\underline{U_g} = Z_R.\underline{I_1} + Z_L.\underline{I_1} + Z_C.\underline{I_1} = \underline{I_1}.\left(\underline{Z_R} + Z_L + Z_C\right)$$

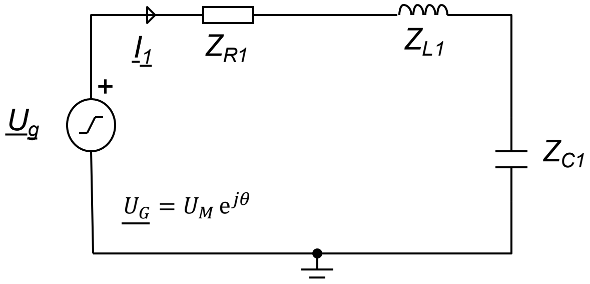
3. Les phaseurs - relations avec les éléments passifs

▸ Méthode de calcul des montages : on cherche $i_1(t)$

- U_M= 5V,
- θ= 0 radians,
- ω= 2.10^6 rad/s,
- R_1= 20 Ω,
- L_1= 40 µH,
- C_1= 25 nF



$u_g(t) = U_M \cos(\omega t + \theta)$



- Phaseur du générateur : $\underline{U_G} = 5\,\mathrm{e}^{j0} = 5\,\mathrm{V}$
- Les impédances : $Z_{R1} = 20\,\Omega,\quad Z_{L1} = j * 40.10^{-6} * 2.10^6 = 80j\,\Omega,\quad Z_{C1} = \dfrac{1}{j * 25.10^{-9} * 2.10^6} = -20j\,\Omega$
- Calcul du courant : $\underline{U_g} = Z_{R1}.\underline{I_1} + Z_{L1}.\underline{I_1} + Z_{C1}.\underline{I_1} \quad \Rightarrow \underline{I_1} = \dfrac{\underline{U_g}}{Z_{R1} + Z_{L1} + Z_{C1}}$

$$\Rightarrow \underline{I_1} = \frac{5}{20 + 80j - 20j} = \frac{5}{20 - 60j} = \frac{0.25}{1 - 3j} = \frac{0.25}{1 + 9}(1 + 3j) = 0.025(1 + 3j) \quad \Rightarrow \underline{I_1} = 0.025\sqrt{10}.\,e^{j\tan^{-1}(3)} = 0.79e^{j1.25} \quad \Rightarrow i_1(t) = 0.79.\cos(2.10^6 t + 1.25)$$

4. Lois de Kirchhoff en régime établi

Pour le calcul des montages en régime sinusoïdal établi :

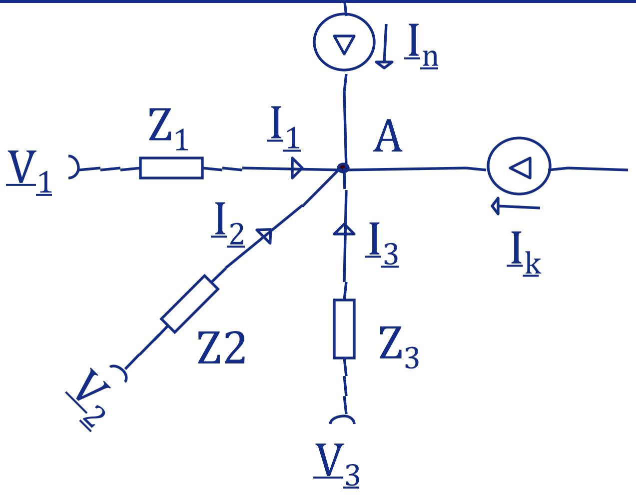
- Tous les théorèmes sont conservés à condition de :
  - ✓ remplacer les expressions des générateurs par leurs phaseurs,
  - ✓ remplacer les valeurs des composants par leurs impédances,
  - ✓ et réécrire toutes les lois en fonction de U, I, Z et Y.

- Une fois les phaseurs des courants et tensions exprimés sous forme polaire, on retourne à l'expression temporelle.

ESIEE PARIS

4. Lois de Kirchhoff en régime établi

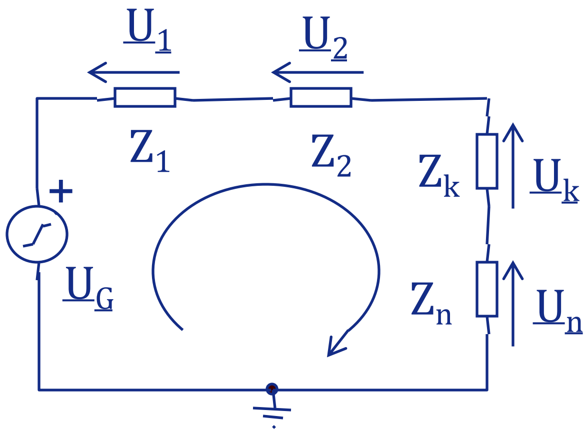
▸ Loi des nœuds



- ✓ La somme des phaseurs des courants qui arrivent à un nœuds est nulle :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \underline{I_i} = 0$$

▸ Loi des mailles



- ✓ La somme des phaseurs des tensions pris dans le même sens dans une maille est nulle :

$$\underline{U_G} = \sum_{i=1}^{i=n} \underline{U_i}$$

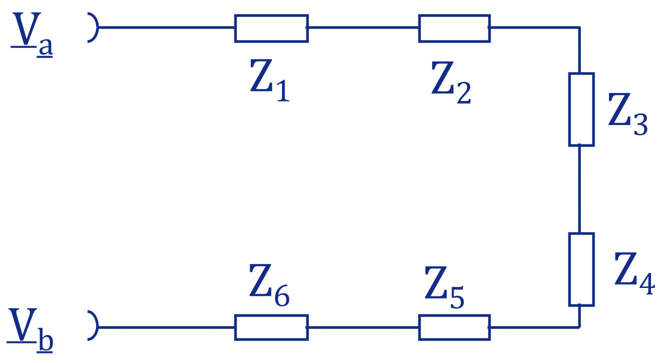
- ✓ Signe positif quand le phaseur de tension est dans le même sens que la maille, signe négatif sinon

4. Lois de Kirchhoff en régime établi

Mise en série et mise en parallèle

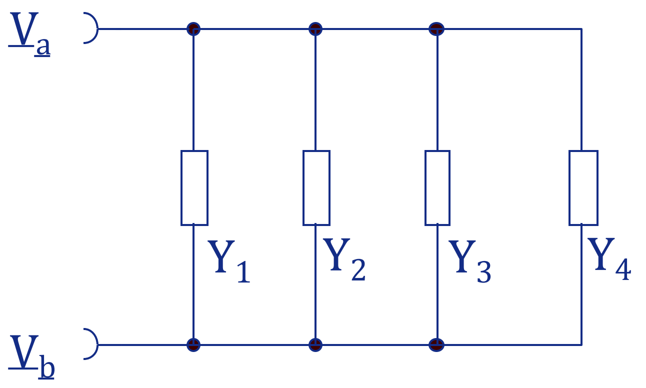
- N composants en série d'impédances Z_i :
  - ✓ → Equivalent à un composant d'impédance Zeq :

$$Z_{eq} = \sum_{i=1}^{N} Z_i$$



- N composants en parallèle d'admittances Y_i :
  - ✓ → Equivalent à un composant d'admittance Yeq :

$$Y_{eq} = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$



- On peut également écrire :

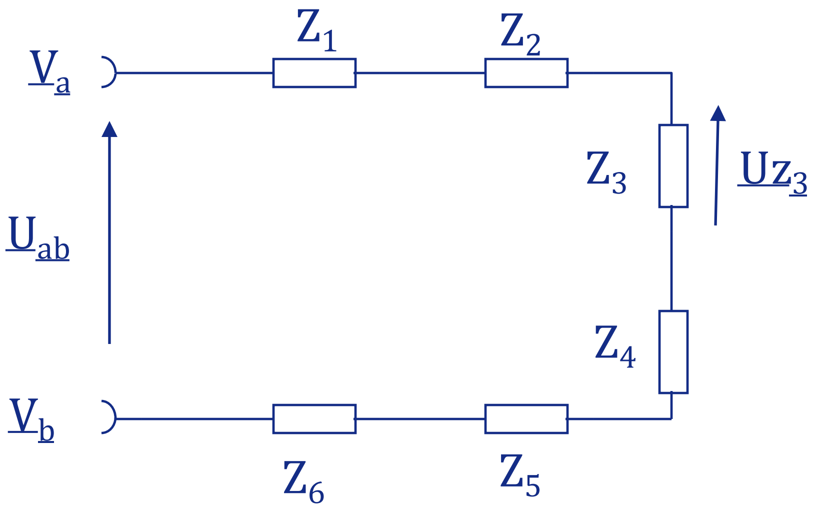
$$Z_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Z_i}}$$

▸ Ponts diviseurs

▪ Pont diviseur de tension :

✓ quand N composants d'impédances Z_i sont en série et que la tension aux bornes de ces N composants est U_{ab}, la tension aux bornes du $k^{ième}$ composant vaut :

$$\underline{U_{Zk}} = \frac{Z_k}{\sum_{i=1}^{i=N} Z_i} \underline{U_{ab}}$$



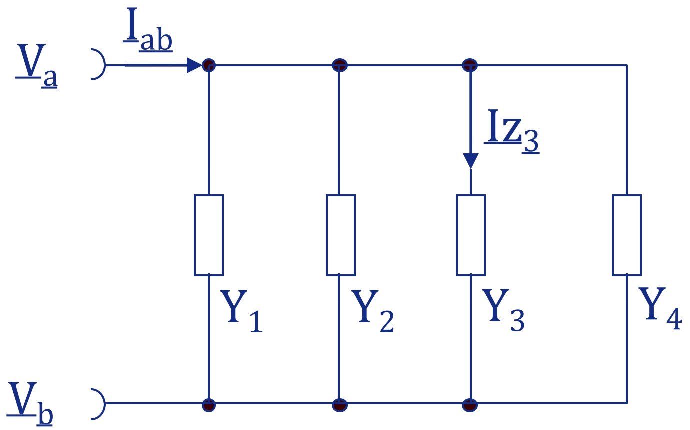
4. Lois de Kirchhoff en régime établi

Ponts diviseurs

Pont diviseur de courant :

- ✓ quand N composants d'admittance Z_i sont en parallèle et que le courant arrivant au nœud reliant les N branches est I_{ab}, le courant traversant le $k^{\text{ième}}$ composant vaut :

$$\underline{I_{Zk}} = \frac{Y_k}{\sum_{i=1}^{i=N} Y_i} \underline{I_{ab}}$$



- ✓ On peut également écrire :

$$\underline{I_{Zk}} = \frac{\frac{1}{\underline{Z_k}}}{\sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{\underline{Z_i}}} \underline{I_{ab}}$$

4. Lois de Kirchhoff en régime établi

▸ Associations de sources sinusoïdales

- N sources de tensions en série sont équivalentes à une source de tension ayant pour valeur de phaseur :

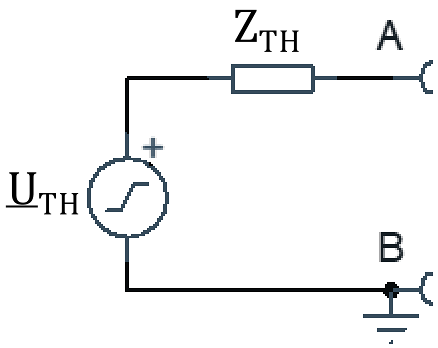
$$\boxed{\underline{U_G} = \sum_{i=1}^{i=N} \underline{U_{Gi}}}$$

- N sources de courant en parallèle sont équivalentes à une source de courant ayant pour valeur de phaseur :

$$\boxed{\underline{I_G} = \sum_{i=1}^{i=N} \underline{I_{Gi}}}$$

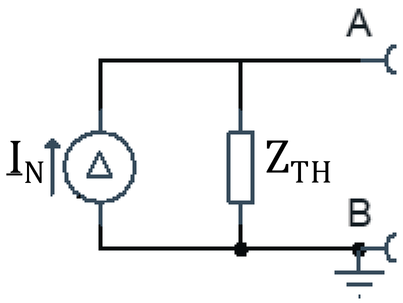
Transformation de Thévenin/Norton

- Les sources de tension réelles sont des générateurs de tension avec un composant d'impédance Z_{TH} en série. Il s'agit du modèle de Thévenin



⇕

- Les sources de courant réelles sont des générateurs de courant avec un composant d'admittance Y_{TH} en parallèle. Il s'agit du modèle de Norton

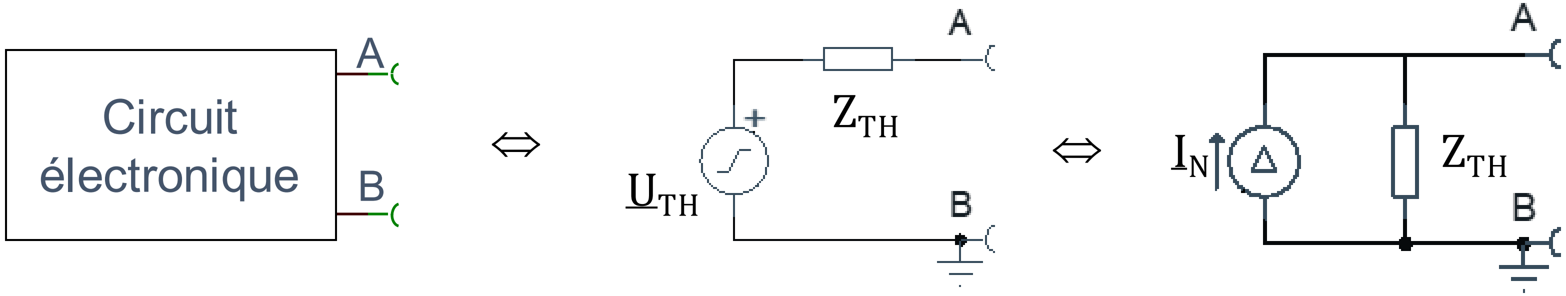


- Les deux modèles sont équivalents avec : $\boxed{\underline{U_{TH}} = Z_{TH}\underline{I_N}}$

4. Lois de Kirchhoff en régime établi

Théorème de Thévenin/Norton

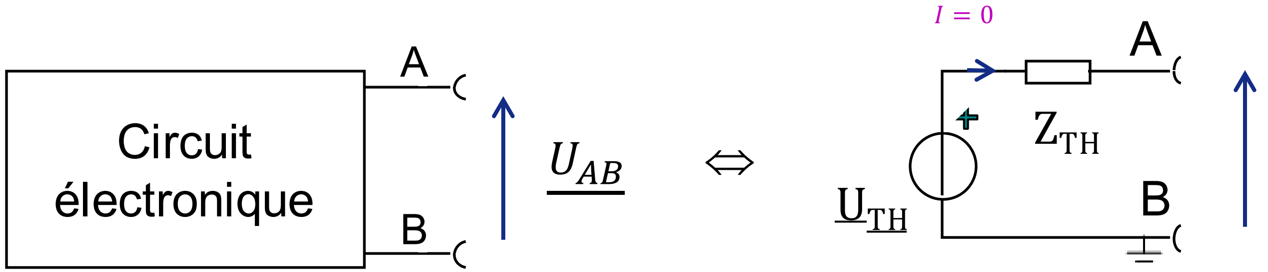
- En mode sinusoïdal établi, on peut remplacer un circuit par son schéma équivalent de Thévenin ou de Norton :



- Le calcul est le même qu'en continu :
  - ✓ Tension circuit ouvert U_{TH},
  - ✓ courant de court-circuit I_N,
  - ✓ SNLE + E_0/I_0 (SNLE = Sources non liées éteintes).

4. Lois de Kirchhoff en régime établi

- Théorème de Thévenin/Norton
  - Principe de calcul de U_{TH} : tension « à vide »
    - ✓ Rien n'est connecté à la sortie du montage
    - ✓ Circuit ouvert : $\mathbf{I = 0}$



$$\underline{U_{AB}} = \underline{U_{TH}} - Z_{TH}.\underline{I} = \underline{U_{TH}}$$

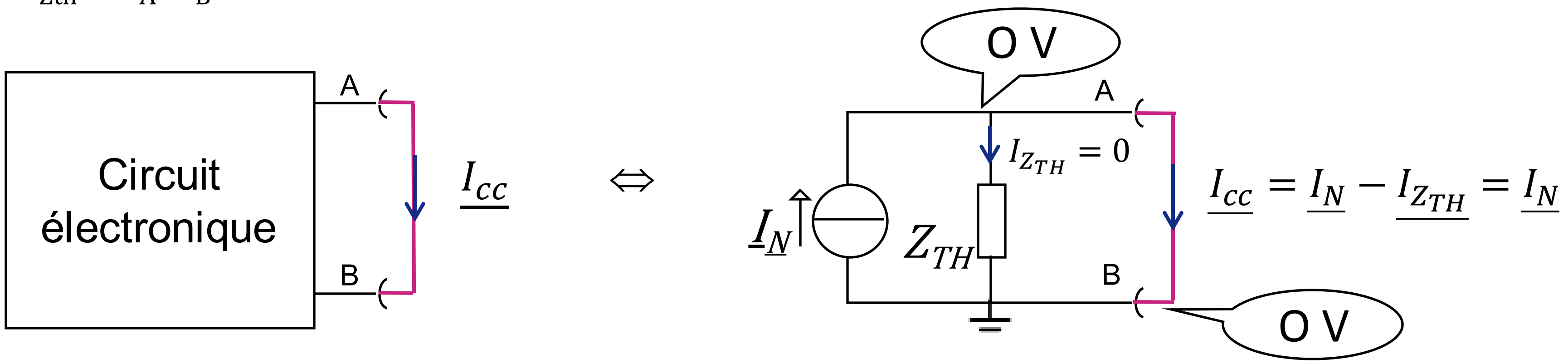
- ✓ On calcule la tension « à vide » U_{AB}

→ on en déduit donc que $U_{TH} = U_{AB}$

4. Lois de Kirchhoff en régime établi

Théorème de Thévenin/Norton

- Principe de calcul de I_N : sortie en court circuit
  - ✓ Fil entre A et B : $V_A = V_B$
  - ✓ $U_{Zth} = V_A - V_B = 0$ V



- ✓ On calcule le courant de court-circuit I_{cc}

→ on en déduit que $I_N = I_{cc}$

4. Lois de Kirchhoff en régime établi

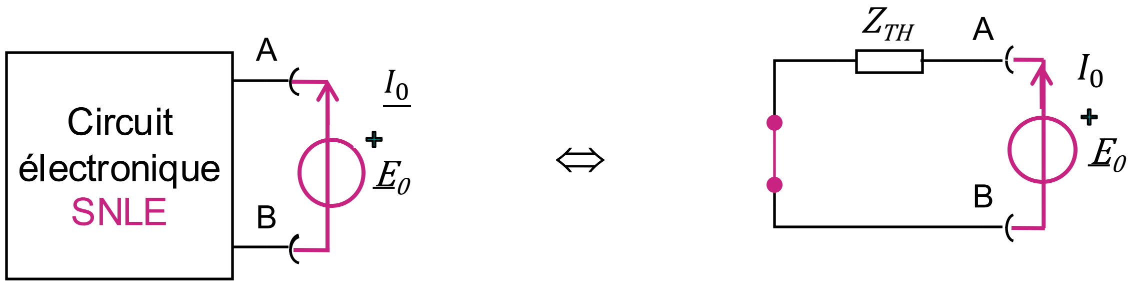
▸ Théorème de Thévenin/Norton

Principe de calcul de R_{TH} : SNLE + E_0 /I_0

✓ On éteint les sources non liées (indépendantes) uniquement

✓ On place un générateur E_0 en sortie du montage

✓ On calcule la relation entre E_0 et I_0 : $E_0 = f(I_0)$



$$\underline{E_0} = Z_{TH} . \underline{I_0}$$

✓ On déduit la valeur de Z_{TH} : $Z_{TH} = \frac{E_0}{I_0} = \frac{f(I_0)}{I_0}$

✓ Une fois les trois calculs terminés, on vérifie que l'on retrouve bien $U_{TH} = Z_{TH} . I_N$

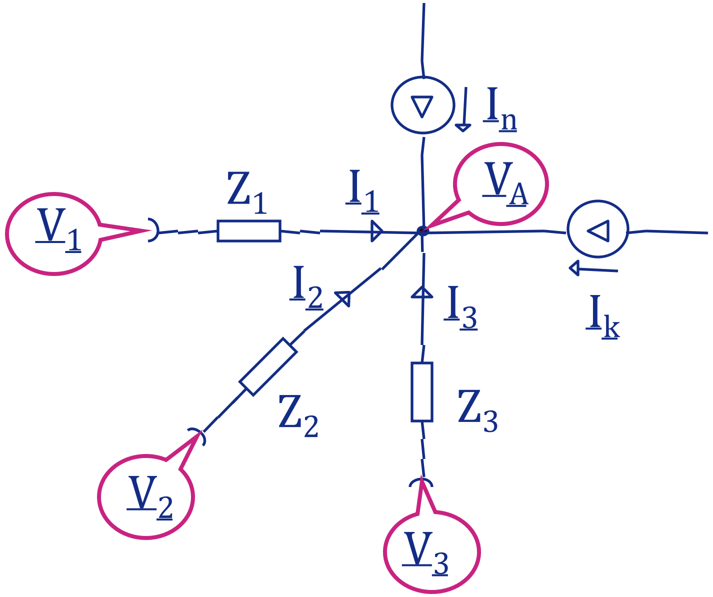
4. Lois de Kirchhoff en régime établi

Théorème de Millman

- le potentiel V_A d'un nœud A, sur lequel sont connectées n branches avec n composants d'impédances Zi (dont le potentiel à l'autre extrémité est V_i) et m branches avec des sources de courant I_j arrivant au nœud, s'exprime par :

$$\boxed{\underline{V_A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\underline{V_i}}{\underline{Z_i}} + \sum_{j=k}^{m} \underline{I_{g\,j}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z_i}}}}$$

✓ Preuve : $\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} + \underline{I_{g_k}} + \underline{I_{g_n}} = 0$



$$\frac{\underline{V_1} - \underline{V_A}}{\underline{Z_1}} + \frac{\underline{V_2} - \underline{V_A}}{\underline{Z_2}} + \frac{\underline{V_3} - \underline{V_A}}{\underline{Z_3}} + \underline{I_{g_k}} + \underline{I_{g_n}} = 0$$

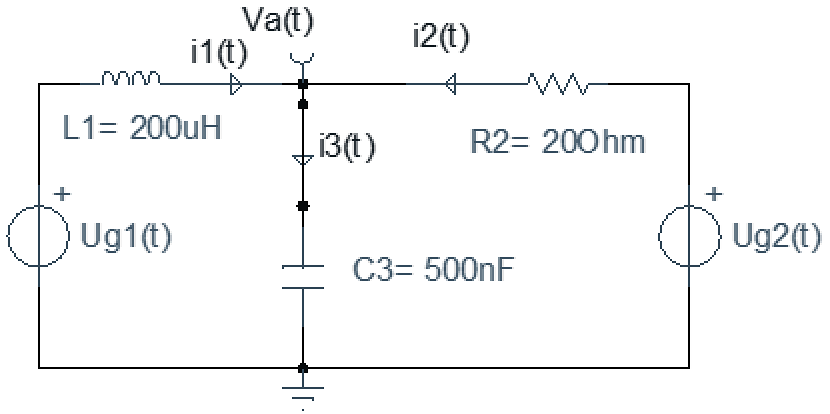
$$\left(\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} + \frac{1}{\underline{Z_3}}\right)\underline{V_A} = \frac{\underline{V_1}}{\underline{Z_1}} + \frac{\underline{V_2}}{\underline{Z_2}} + \frac{\underline{V_3}}{\underline{Z_3}} + \underline{I_{g_k}} + \underline{I_{g_n}}$$

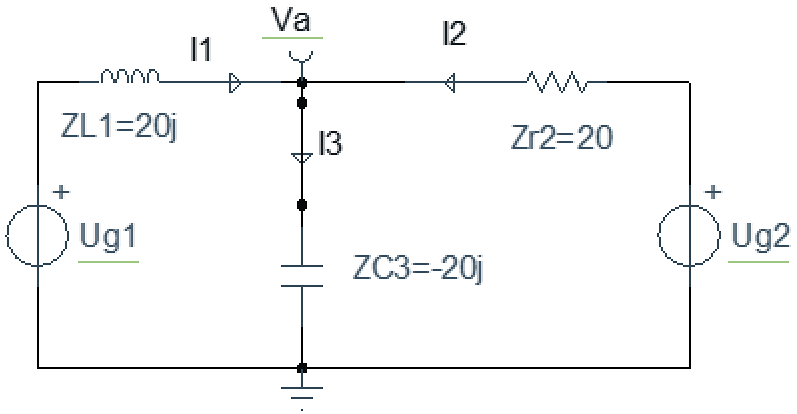
$$\Rightarrow \underline{V_A} = \frac{\frac{\underline{V_1}}{\underline{Z_1}} + \frac{\underline{V_2}}{\underline{Z_2}} + \frac{\underline{V_3}}{\underline{Z_3}} + \underline{I_{g_k}} + \underline{I_{g_n}}}{\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} + \frac{1}{\underline{Z_3}}}$$

4. Lois de Kirchhoff en régime établi

- Exemple :

Calculer Va(t) ?





$$u_{g1}(t) = 4\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$u_{g2}(t) = 8\cos(\omega t + \pi)$$
$$\omega = 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\underline{U_{g1}} = 4e^{j\frac{\pi}{2}} = 4j$$

$$\underline{U_{g2}} = 8e^{j\pi} = -8$$

$$\underline{V_A} = \frac{\dfrac{\underline{U_{G1}}}{\underline{Z_{L1}}} + \dfrac{\underline{U_{G2}}}{\underline{Z_{R2}}} + \dfrac{0}{Z_{C3}}}{\dfrac{1}{Z_{L1}} + \dfrac{1}{Z_{R2}} + \dfrac{1}{Z_{C3}}}$$

$$\Rightarrow \underline{V_A} = \frac{\dfrac{4j}{20j} + \dfrac{-8}{20}}{\dfrac{1}{20j} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{-20j}} = \frac{4-8}{1} = -4 = 4e^{j\pi}$$

$$\Rightarrow V_A(t) = 4\cos(10^5 t + \pi)$$

Ce qu'il faut retenir

- L'amplitude et la phase d'un signal, la fréquence, la pulsation, la période
  - ✓ Notions de déphasage : retard et avance

$$u_G(t) = U_M cos(\omega t + \theta) \quad , \quad i_G(t) = I_M cos(\omega t + \phi) \qquad \omega = 2\pi F \,\mathrm{rad.s^{-1}}$$

- Les phaseurs pour passer de l'expression temporelle d'un signal à son expression dans le domaine fréquence et vice versa

$$\underline{U} = U_M e^{j\theta} = U_M \angle \theta \quad , \quad \underline{I} = I_M e^{j\phi} = I_M \angle \phi$$

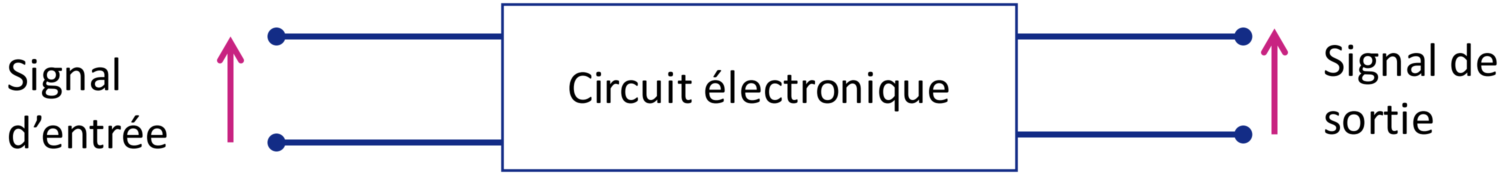
- Impédances et admittances : $Z = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}\ \Omega\ (\mathrm{Ohm})$ $\quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}\ \mathrm{S\ (Siemens)}$
  - ✓ Pour les passifs : $Z_R = R\ \Omega,$ $\quad Z_L = jL\omega\ \Omega,$ $\quad Z_C = \frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}\ \Omega$

- Tous les théorèmes s'appliquent avec : $\underline{U} = Z\underline{I}$

5. Fonctions de transfert

▸ Définition d'une fonction de transfert

- Circuit électronique
  - ✓ Une entrée : tension, courant ou une puissance
  - ✓ Une sortie : tension, courant ou une puissance
- Fonction de transfert : rapport entre le signal de sortie et le signal d'entrée



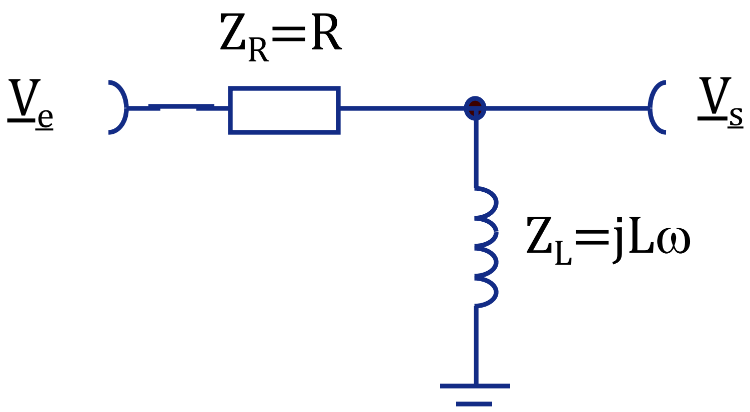
$$H(j\omega) = \frac{\text{Signal de sortie}}{\text{Signal d'entrée}}$$

✓ En tension :

$$H(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$$

5. Fonctions de transfert

- Exemple



$$\underline{V_s} = \frac{Z_L}{Z_L + Z_R}\underline{V_e} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{H(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}}$$

5. Fonctions de transfert

▸ Expression de la fonction de transfert

- $H(j\omega)$ complexe : $H(j\omega) = \mathrm{Re}\left[H(j\omega)\right] + j.\mathrm{Im}\left[H(j\omega)\right]$

- Module de la fonction de transfert : $\left|H(j\omega)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}\left[H(j\omega)\right]^2 + \mathrm{Im}\left[H(j\omega)\right]^2}$

✓ Le module de $H(j\omega)$ représente le **rapport** entre l'**amplitude** du signal de **sortie** et l'**amplitude** du signal d'**entrée**

❖ Phaseurs :

$$\underline{V_s} = U_s e^{j\varphi} \quad \text{et} \quad \underline{V_e} = U_e e^{j\theta}$$

$$\boxed{\left|H(j\omega)\right| = \frac{\left|\underline{V_s}\right|}{\left|\underline{V_e}\right|} \Rightarrow U_s = \left|H(j\omega)\right|.\mathrm{U}_e}$$

❖ **Module supérieur à 1 → gain**
❖ **Module inférieur à 1 → atténuation**

5. Fonctions de transfert

▸ Expression de la fonction de transfert

- Module de la fonction de transfert en décibel : dB

$$\boxed{20Log_{10}\left(\left|H(j\omega)\right|\right)=20Log_{10}\left(\left|\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}\right|\right)=20Log_{10}\left(\left|\frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}\right|\right)}$$

✓ Valeurs importantes :

$$Log_{10}(1)=0dB$$
$$Log_{10}(10)=1dB$$
$$20Log_{10}(2)=6dB$$
$$20Log_{10}\left(\sqrt{2}\right)=3dB$$

5. Fonctions de transfert

Expression de la fonction de transfert

- Argument de la fonction de transfert (radians) :

$$Arg\left[H(j\omega)\right] = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\left[H(j\omega)\right]}{\mathrm{Re}\left[H(j\omega)\right]}$$

✓ L'argument représente le **déphasage** introduit par le circuit sur le signal d'entrée

✓ Phaseurs : $\underline{V_s} = U_s e^{j\varphi}$ et $\underline{V_e} = U_e e^{j\theta}$

$$\boxed{\begin{array}{l} Arg\left[H(j\omega)\right] = \arg\left(\underline{V_s}\right) - \arg\left(\underline{V_e}\right) = \varphi - \theta \\ \Rightarrow \varphi = \theta + Arg\left[H(j\omega)\right] \end{array}}$$

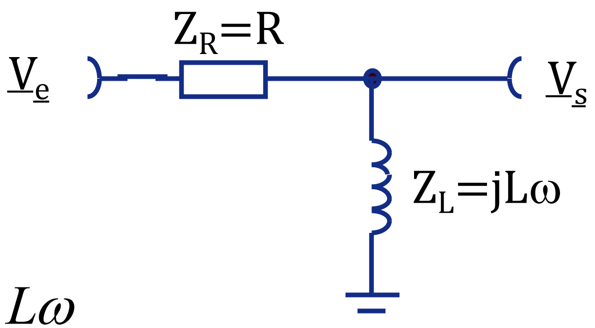
✓ Avec : $V_e(t) = U_e cos(\omega t + \theta)$

$$\Rightarrow V_s(t) = U_s cos(\omega_t + \phi) = \left|H(j\omega)\right|.U_e.cos\left(\omega t + \theta + Arg\left[H(j\omega)\right]\right)$$

5. Fonctions de transfert

- Exemple :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$



  - Module de la fonction de transfert : $|H(j\omega)| = \dfrac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$

  - Argument de la fonction de transfert : $Arg\left[H(j\omega)\right] = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\dfrac{L\omega}{R}$

  - Expression : $V_s(t) = \dfrac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} * U_e * cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}\dfrac{L\omega}{R} + \theta)$

  - Exemple : calcul avec $Z_L=50j\ \Omega$, $R=100\ \Omega$ et $V_e(t) = 4\cos(2\pi 10^3 t + 0.5)$

5. Fonctions de transfert

- Expression généralisée d’une fonction de transfert
  - Toute fonction de transfert d’un montage peut être mise sous la forme d’un **produit de fonctions « élémentaires »**, par exemple :

$$H(j\omega) = K.\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{C1}}\right).\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_{C2}}}\right).\left(\frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\frac{2m}{\omega_0}j\omega+1}\right)$$

    ✓ K = gain statique de la fonction de transfert pour ω =0

  - Définitions :

    ✓ Les valeurs de ω qui annulent le numérateur de $|H(j\omega)|$ = **zéros de la fonction de transfert**

    ✓ Les valeurs de ω qui annulent le dénominateur de $|H(j\omega)|$ = **pôles de la fonction de transfert**

    ✓ Le degré le plus élevé sur ω = **ordre de la fonction de transfert**

5. Fonctions de transfert

- Expression généralisée d'une fonction de transfert
  - Module de la fonction de transfert en dB :

$$20Log_{10}\left|H(j\omega)\right| = 20Log_{10}(K) + 20Log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_{C1}^2}}\right) + 20Log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_{C2}^2}}}\right) + 20Log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2+\left(\frac{2m}{\omega_0}\omega\right)^2}}\right)$$

    - ✓ Le module en dB de la fonction de transfert est donc la **somme des modules en dB** de fonctions de transferts simples
  - Analyse des fonctions simples → **analyse aux asymptotes**
    - ✓ Traçage des diagrammes asymptotiques des modules en dB
    - ✓ Addition des diagrammes pour obtenir le diagramme global

5. Fonctions de transfert

Expression généralisée d'une fonction de transfert

- Argument de la fonction de transfert (en radian) :

$$Arg\left(H\left(j\omega\right)\right) = Arg\left(K\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_{C1}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2m}{\omega_0}\omega}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_{C2}}\right)$$

❖ **Si K > 0 : Arg (K) = 0**
❖ **Si K < 0 : Arg (K) = π**

✓ Comme pour le module, on **additionne les comportements en phase** des différentes fonctions élémentaires

- Analyse des fonctions simples → **analyse aux asymptotes**

✓ Traçage des diagramme des asymptotes des arguments en radian

✓ Addition des diagrammes pour obtenir le diagramme global

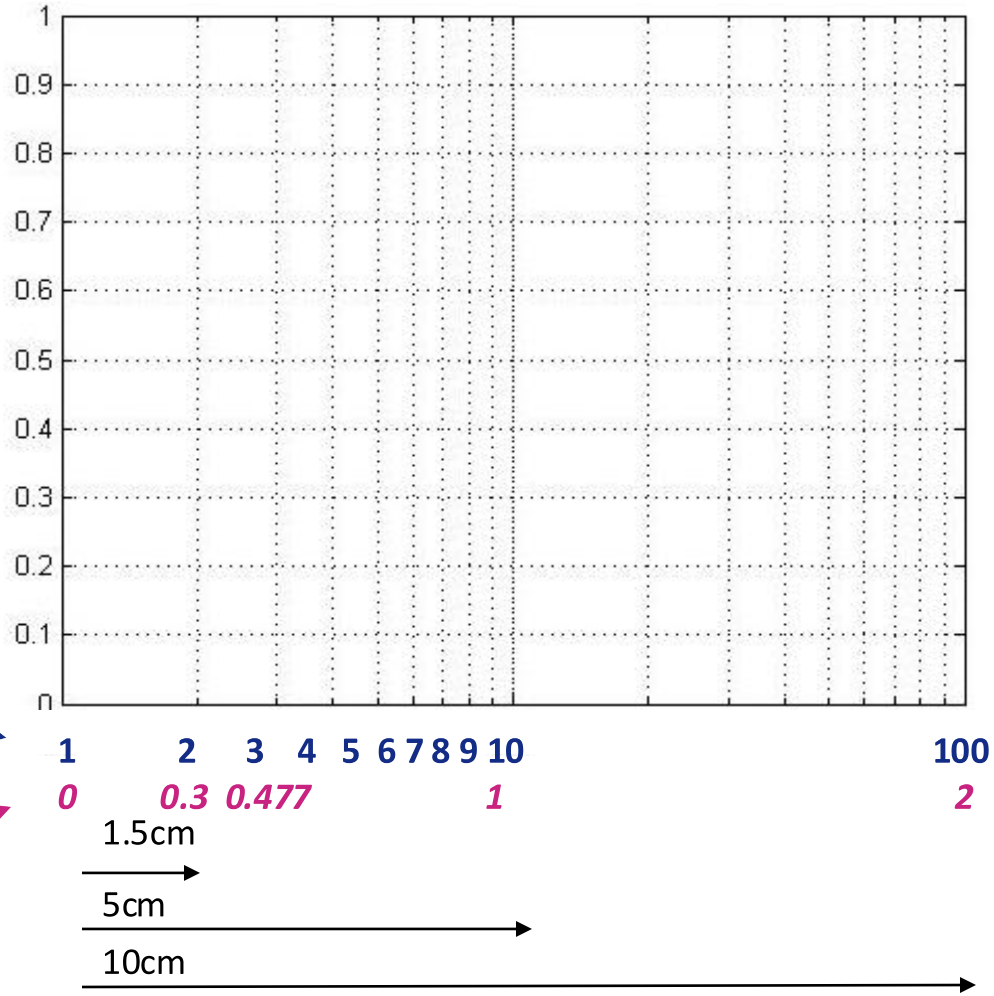
5. Fonctions de transfert

- Principe des diagrammes de Bode
  - Tracés de graphiques : module en dB et argument de $H(j\omega)$ en fonction de ω
  - Principe échelle semilogx (pour l'axe des « x ») : $X = Log10(\omega)$
    - ✓ **avantage : on trace des droites…**
  - Exemple : $H(j\omega) = (j\omega)^n \Rightarrow |H(j\omega)| = \omega^n$
    - ✓ En décibel : $20Log_{10}(|H(j\omega)|) = 20Log_{10}(\omega^n) = n.20\underbrace{Log_{10}(\omega)}$
    - ✓ Avec l'expression de X : $20Log_{10}(|H(j\omega)|) = n.20.X \Rightarrow Y = K * X$
      - ❖ On a bien l'équation d'une droite

- Principe des diagrammes de Bode
  - Echelle semilogx
    - ✓ Ne démarre jamais à $\log(0)$ $(-\infty)$
    - ✓ Démarre à une valeur 10^{i}
    - ✓ Fonctionne par décade (x10)

Log(ω)
(échelle log affichée)

ω
(échelle linéaire placée)



6. Diagramme de Bode : 1er ordre

▸ Fonctions du premier ordre

- Quatre fonctions du premier ordre à étudier :

$$\text{g} \quad H_1(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \qquad\qquad \text{g} \quad H_3(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_c}$$

$$\text{g} \quad H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \qquad\qquad \text{g} \quad H_4(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

- ω_c est la pulsation de coupure (en rad.s-1)
- $F_c = \omega_c / (2\pi)$ est la fréquence de coupure (en Hz)

6. Diagramme de Bode : 1er ordre

- Fonction $H_1(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}$
  - Module de la fonction de transfert :

$$\left|H_1(j\omega)\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

  - Module de la fonction de transfert en dB :

$$20Log_{10}\left|H_1(j\omega)\right| = 20Log_{10}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right) = 10Log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

6. Diagramme de Bode : 1er ordre

- Fonction $H_1(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}$

$$\left|H_1(j\omega)\right| = \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \qquad \Rightarrow 20Log_{10}\left|H_1(j\omega)\right| = 10Log_{10}\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

- Comportement asymptotique

✓ Quand $\omega \to 0$: $\left|H_1(j\omega)\right| \underset{\omega\to 0}{\to} 1$ et $20\log_{10}\left|H_1(j\omega)\right| \underset{\omega\to 0}{\to} 0 \ dB$

✓ Quand $\omega \to \infty$: $\left|H_1(j\omega)\right| \underset{\omega\to\infty}{\to} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = \frac{\omega}{\omega_c}$

❖ en dB : $20\log_{10}\left|H_1(j\omega)\right| \underset{\omega\to\infty}{\to} 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = 20Log_{10}(\omega) - 20Log_{10}(\omega_c)$

6. Diagramme de Bode : 1er ordre

- Fonction $H_1(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}$
  - Tracé asymptotique :

✓ Quand $\omega \to 0$: $20\log_{10}\left|H_1(j\omega)\right| = 0 \;\; dB$ → **asymptote sur l'axe des abscisses**

✓ Quand $\omega \to \infty$: $20\log_{10}\left|H_1(j\omega)\right| = 20Log_{10}(\omega) - 20Log_{10}(\omega_c)$

⇒ **Equation d'une droite en fonction de $X = Log_{10}(\omega)$**

❖ **Quand $\omega = \omega_c$:** $20\log_{10}\left|H_1(j\omega_c)\right| = 20Log_{10}(\omega_c) - 20Log_{10}(\omega_c) = 0 \text{ dB}$

❖ **Quand $\omega = 10\omega_c$:** $20\log_{10}\left|H_1(j10\omega_c)\right| = 20Log_{10}(10\omega_c) - 20Log_{10}(\omega_c)$

$= 20\left(Log_{10}(10) + Log_{10}(\omega_c)\right) - 20Log_{10}(\omega_c) = 20Log_{10}(10) = 20 \text{ dB}$ → **pente à +20 dB/décade**

❖ **Quand $\omega = 2\omega_c$:** $20\log_{10}\left|H_1(j2\omega_c)\right| = 20Log_{10}(2\omega_c) - 20Log_{10}(\omega_c) = 20Log_{10}(2) = 6 \text{ dB}$

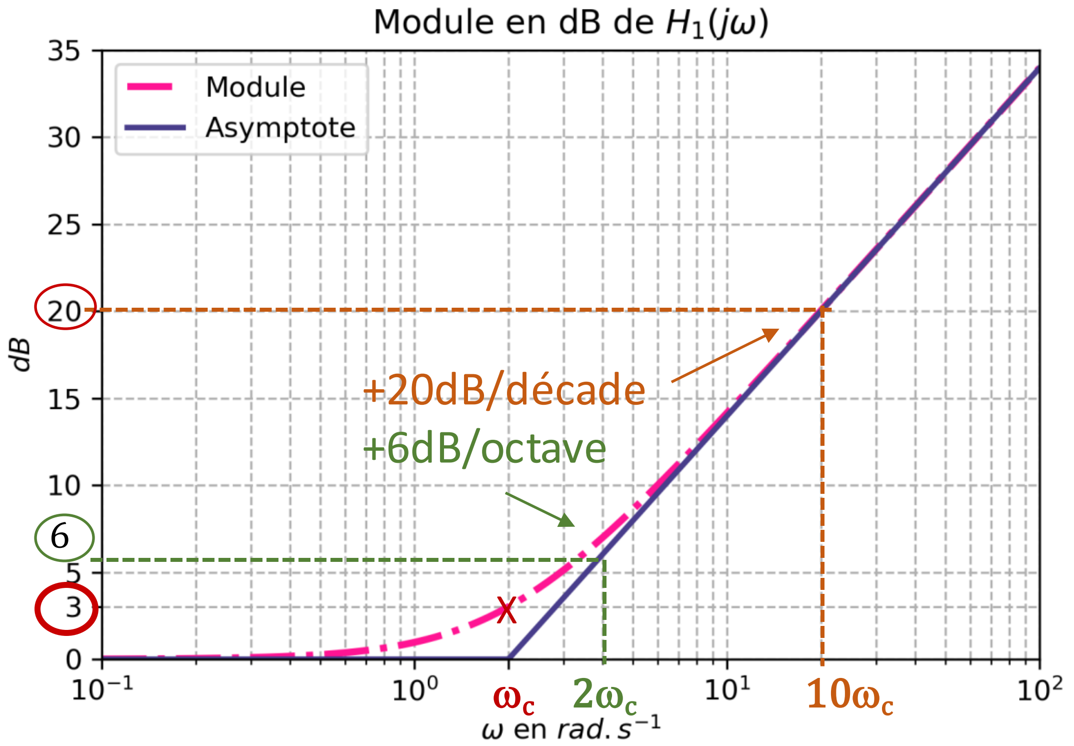
→ **pente à +6 dB/octave**

6. Diagramme de Bode : 1er ordre

- Fonction $H_1(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}$
  - Module de la fonction de transfert :

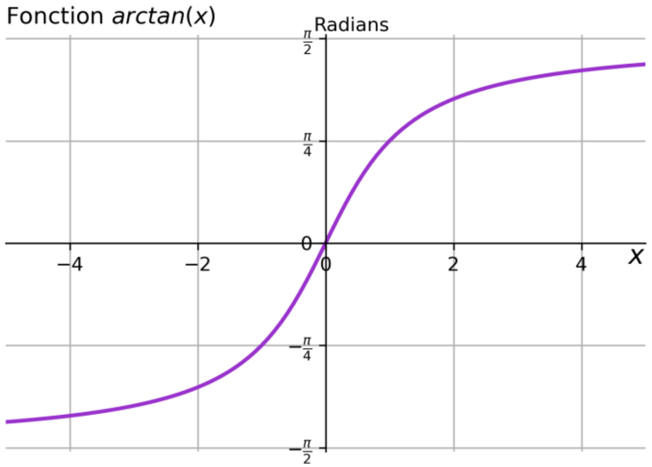
✓ Vraie valeur pour $\omega = \omega_c$ (pulsation de coupure) :

$$\begin{aligned}
&20Log_{10}\left|H_1(j\omega_c)\right| \\
&= 10Log_{10}\left(1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_c}\right)^2\right) \\
&= 10Log_{10}(2) = 3dB
\end{aligned}$$



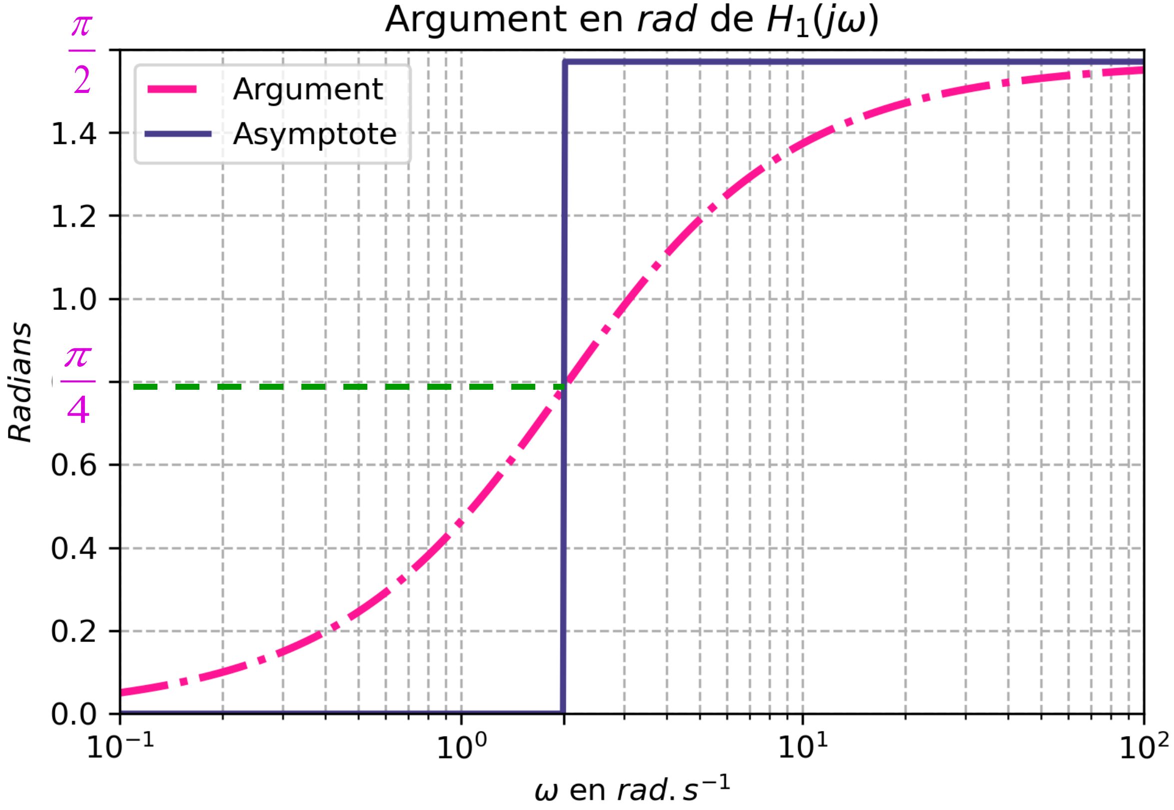
6. Diagramme de Bode : 1er ordre

- Fonction $H_1(j\omega) = 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}$
  - Argument de la fonction de transfert : $\varphi_1 = Arg\left(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$
  - Comportement asymptotique
    - ✓ Quand $\omega \to 0$: $\varphi_1 \to \tan^{-1}(0) = 0$
    - ✓ Quand $\omega \to \infty$: $\varphi_1 \approx \tan^{-1}(\omega) \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$
  - Calcul de quelques points
    - ✓ **Quand $\omega = \omega_c$:** $\varphi_1 = \tan^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ radians
    - ✓ **Quand $\omega = 2\omega_c$:** $\varphi_1 = \tan^{-1}(2) = 1.1$ radians
    - ✓ **Quand $\omega = 0.5\omega_c$:** $\varphi_1 = \tan^{-1}(0.5) = 0.46$ radians



6. Diagramme de Bode : 1er ordre

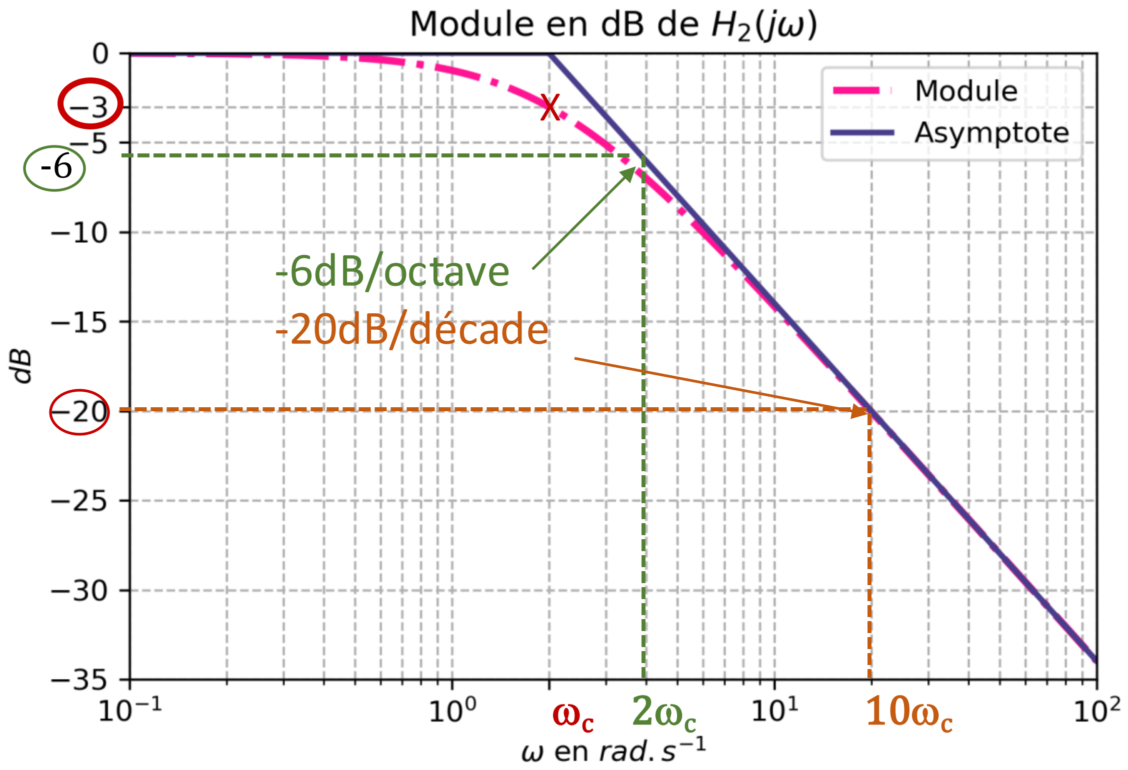
- Fonction $H_1(j\omega)=1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}$
  - Tracé asymptotique de l'argument :



6. Diagramme de Bode : 1er ordre

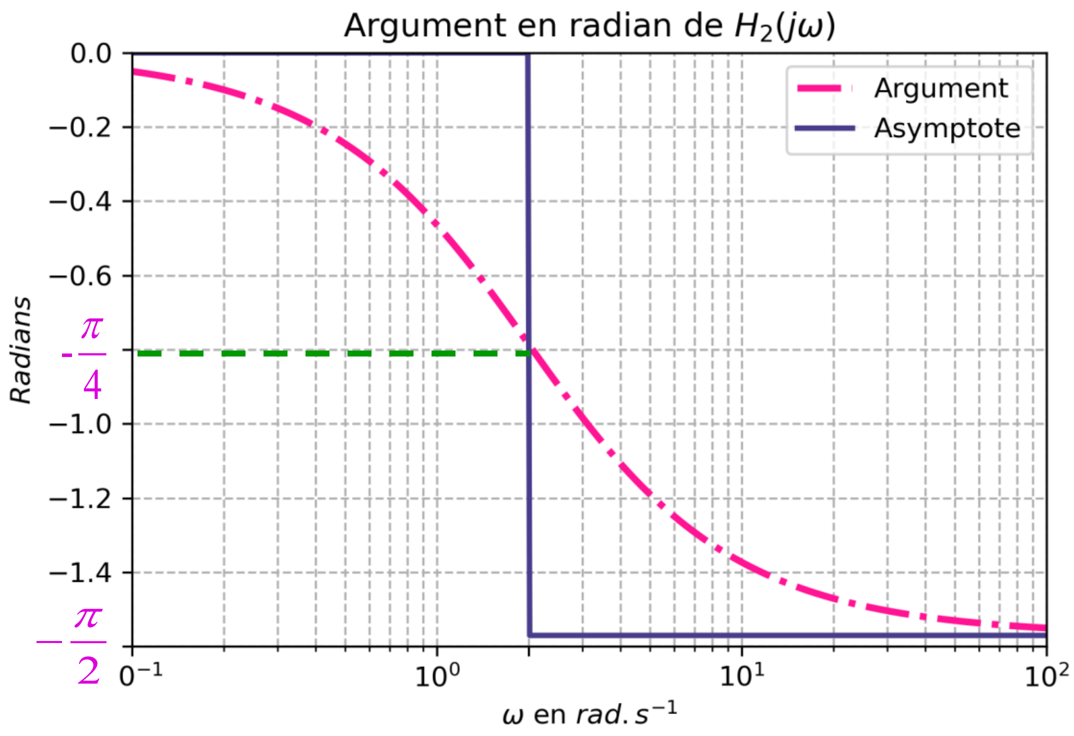
- Fonction $H_2(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$
  - Module de la fonction de transfert :
    - ✓ Vraie valeur pour ω = ωc (pulsation de coupure) :

$$\boxed{\begin{aligned} &20Log_{10}\left|H_2(j\omega_c)\right| \\ &= -10Log_{10}\left(1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_c}\right)^2\right) \\ &= -10Log_{10}(2) = -3dB \end{aligned}}$$



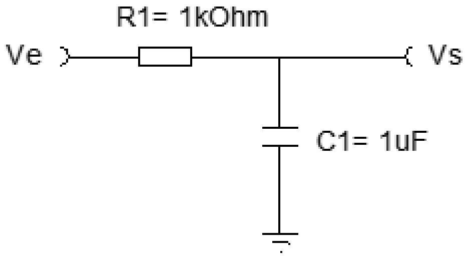
6. Diagramme de Bode : 1er ordre

- Fonction $H_2(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$
  - Tracé asymptotique de l'argument :



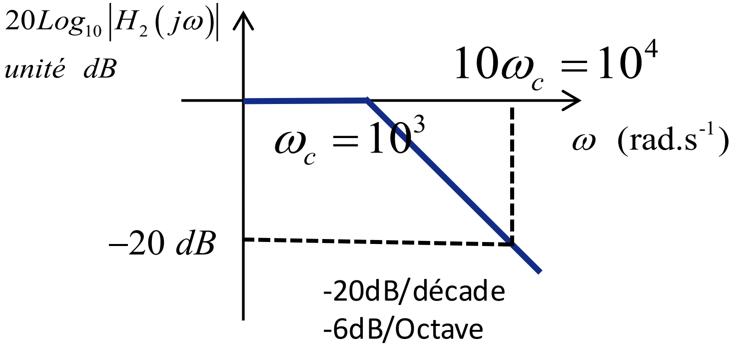
6. Diagramme de Bode : 1er ordre

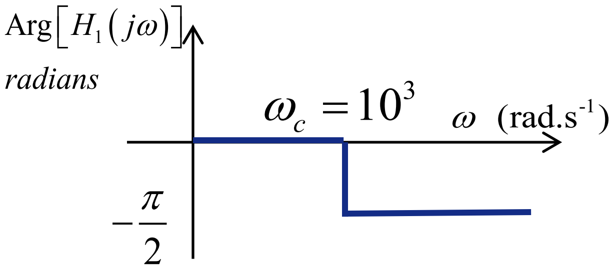
b) Exemple



$$\underline{V_s} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R}\underline{V_e} \qquad \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

✓ On reconnait $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$ avec : $\omega_c = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{10^3 * 10^{-6}} = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$



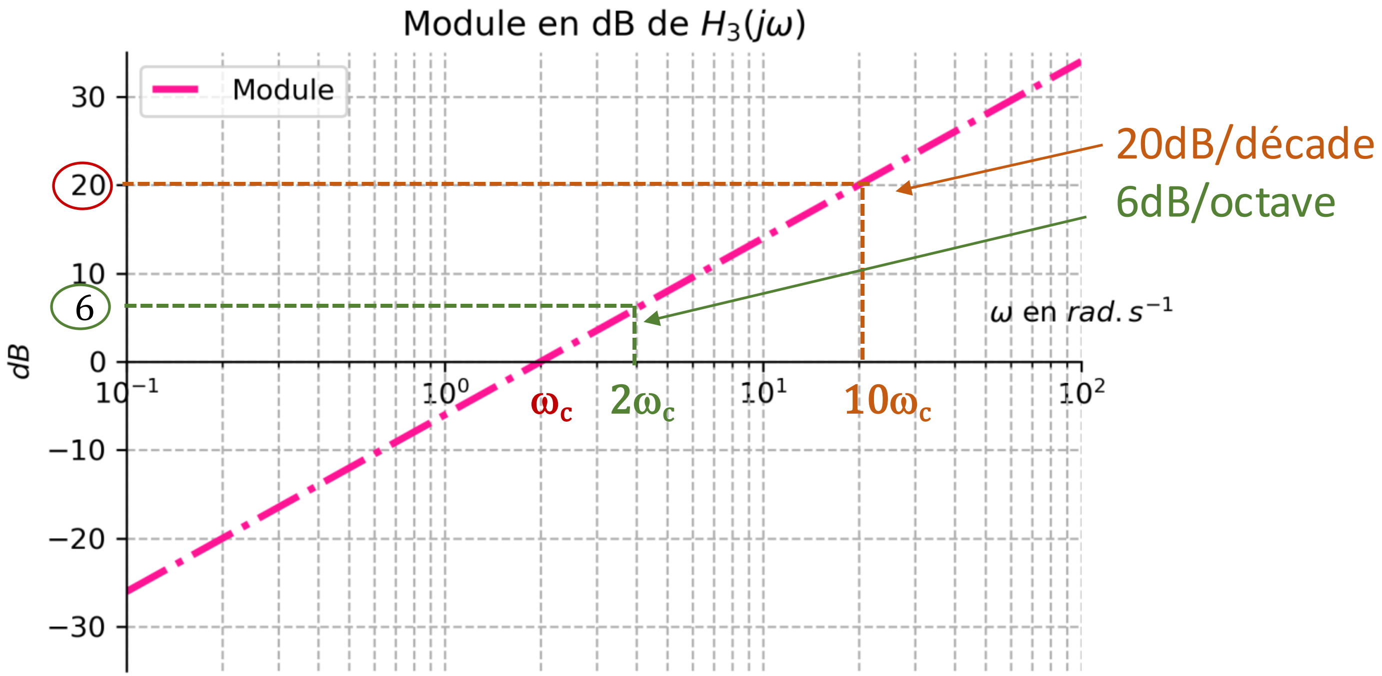


6. Diagramme de Bode : 1er ordre

- Fonction $H_3(j\omega) = j\dfrac{\omega}{\omega_c}$

  - Module de la fonction de transfert en dB :

$$\left|H_3(j\omega)\right| = \frac{\omega}{\omega_c}$$

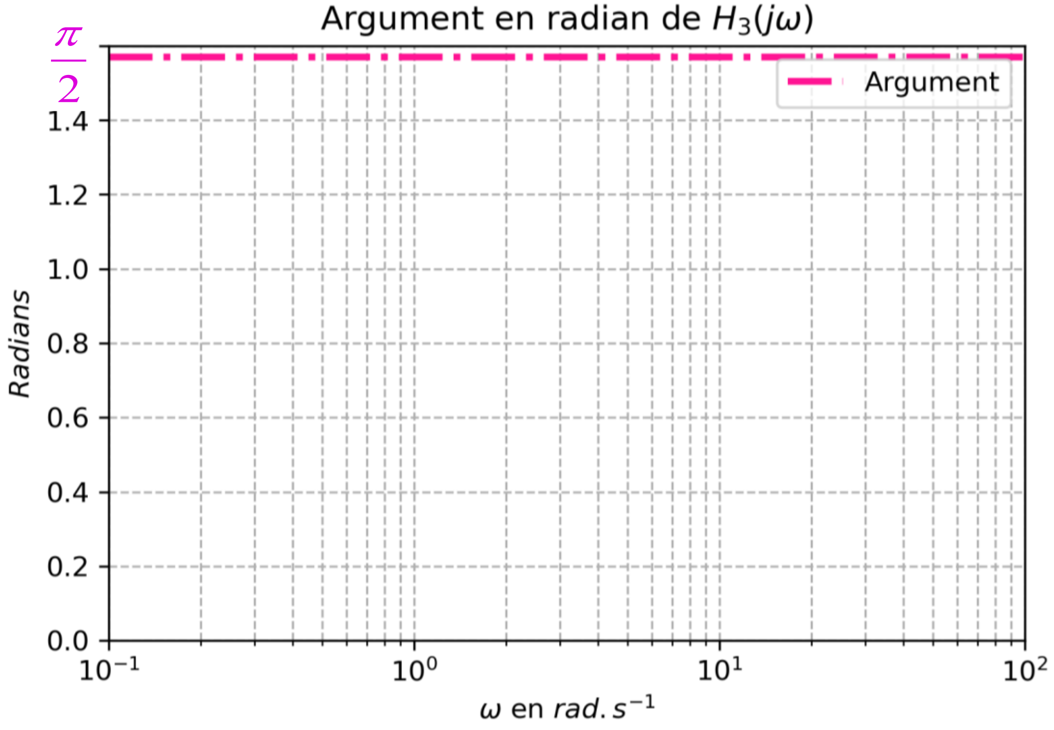


6. Diagramme de Bode : 1er ordre

- Fonction $H_3(j\omega) = j\dfrac{\omega}{\omega_c}$

  - Argument de la fonction de transfert :

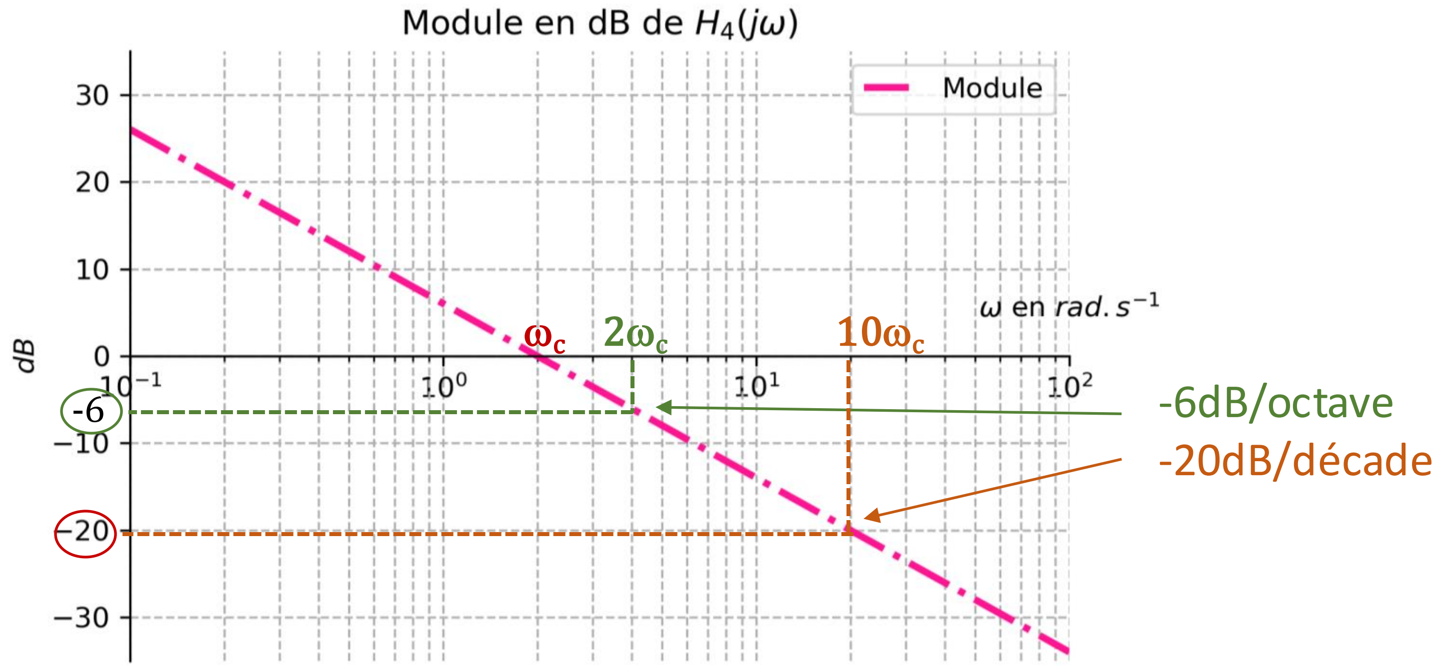
$$\boxed{\varphi_3 = Arg\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right) = +\frac{\pi}{2}}$$



6. Diagramme de Bode : 1er ordre

- Fonction $$H_4(j\omega)=\frac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}=-j\frac{\omega_c}{\omega}$$

  - Module de la fonction de transfert en dB

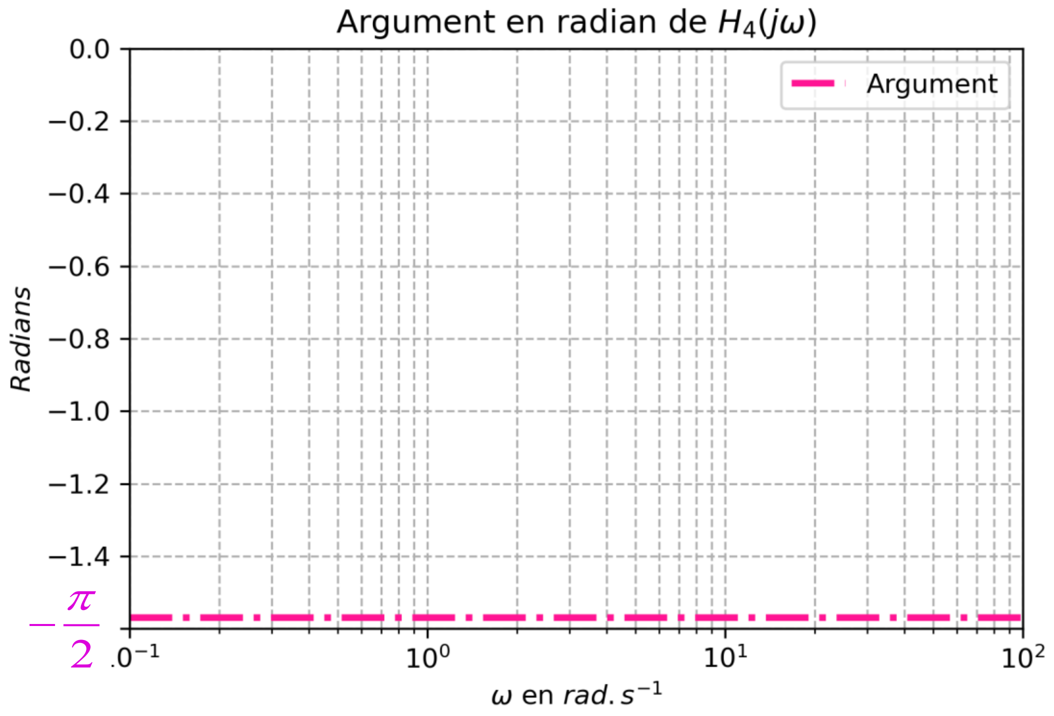


6. Diagramme de Bode : 1er ordre

- d) Fonction $H_4(j\omega) = \dfrac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_c}} = -j\dfrac{\omega_c}{\omega}$

  - Argument de la fonction de transfert :

$$\boxed{\varphi_4 = Arg\left(-j\frac{\omega_c}{\omega}\right) = -\frac{\pi}{2}}$$



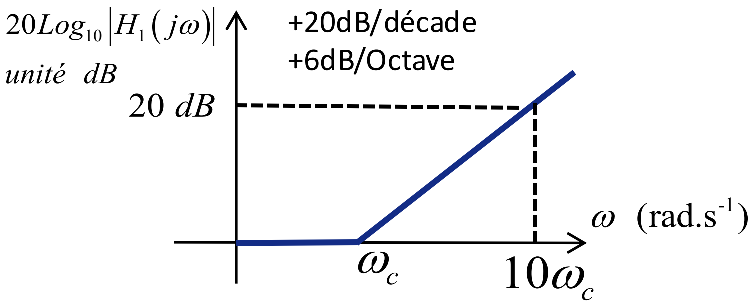
6. Diagramme de Bode : 1er ordre

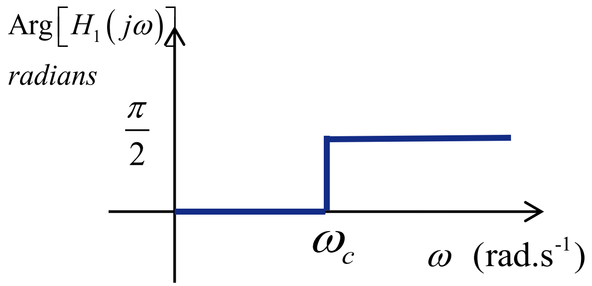
▸ Synthèse des diagrammes asymptotiques

Module (dB)

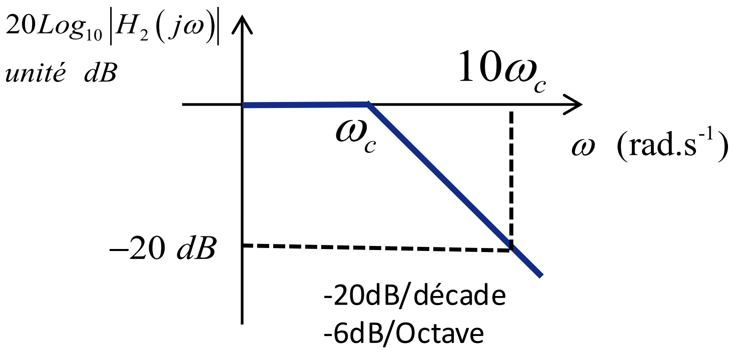
Argument (Radian)

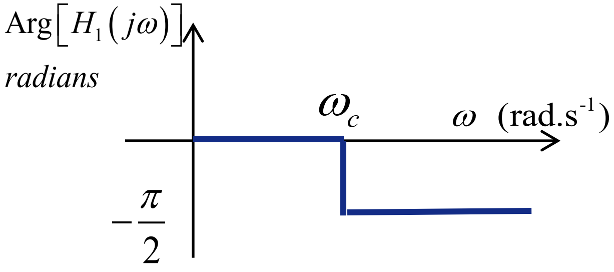
$$H_1(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_c}$$





$$H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$





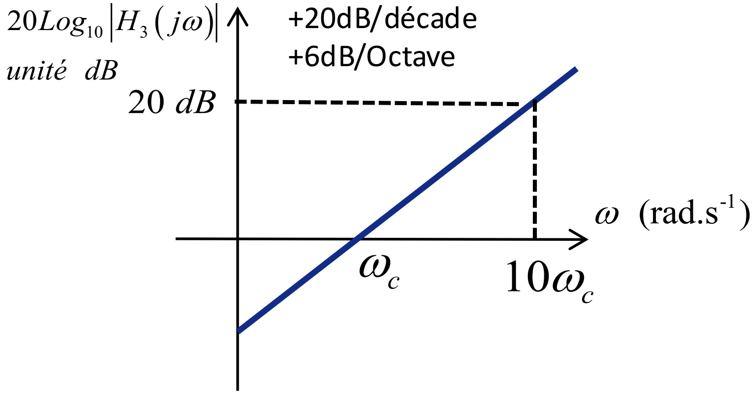
6. Diagramme de Bode : 1er ordre

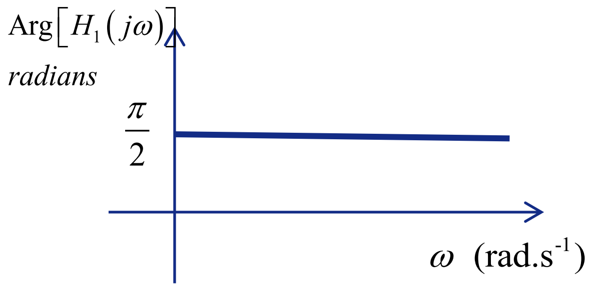
Synthèse des diagrammes asymptotiques

Module (dB)

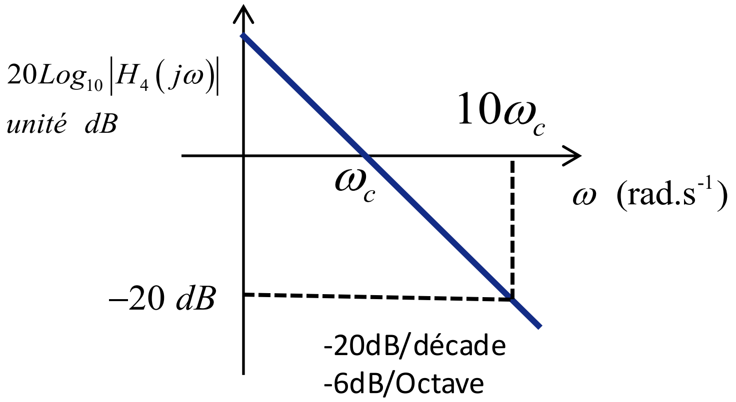
Argument (Radian)

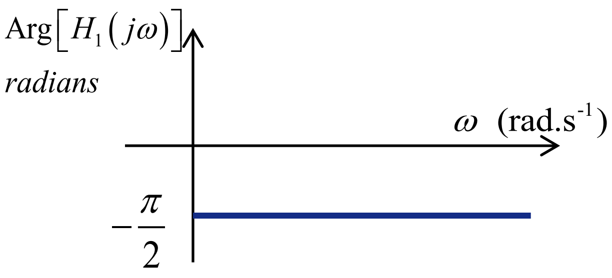
$$H_3(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_c}$$





$$H_4(j\omega) = \frac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$





7. Fonctions de filtrage

Réalisation de fonctions de filtrage

- A partir de combinaisons de fonctions du premier ordre
  - ✓ Fonction d'un filtre :
    - Laisse passer certaines fréquences
    - Atténue d'autres fréquences
  - ✓ Quatre gabarits
    - Passe-bas : ne laisse passer que les fréquences basses
    - Passe-haut : ne laisse passer que les fréquences hautes
    - Passe-bande : ne laisse passer qu'une certaine bande de fréquence
    - Réjecteur : atténue une certaine bande de fréquence
  - ✓ **Notions importantes :**
    - Fréquence coupure du filtre
    - Bande passante
    - Ordre

7. Fonctions de filtrage

Réalisation de fonctions de filtrage

Pulsation (ou fréquence) de coupure à -3dB

- Pulsation (ou fréquence) pour laquelle le module de $H(j\omega)$ est égal à la valeur maximale de $H(j\omega)$ divisée par $\sqrt{2}$

$$\boxed{\left|H(j\omega_c)\right| = \frac{\max\left|H(j\omega)\right|}{\sqrt{2}}}$$

- En dB, cela revient à trouver $|H(j\omega_C)|$ tel que : $20Log_{10}\left|H(j\omega_c)\right| = \max\left(20Log_{10}\left|H(j\omega)\right|\right) - 3dB$
- Procédure :
  - On cherche la pulsation ω_{max} telle que $|H(j\omega)|$ soit maximum
  - On cherche la valeur ω_c telle que : $|H(j\omega_C)| = {|H(j\omega_{max})|}/{\sqrt{2}}$
- Pulsation de coupure : ω_c en rad.s-1
- Fréquence de coupure : $F_C = {\omega_C}/{2\pi}$ en Hz

7. Fonctions de filtrage

▸ Réalisation de fonctions de filtrage

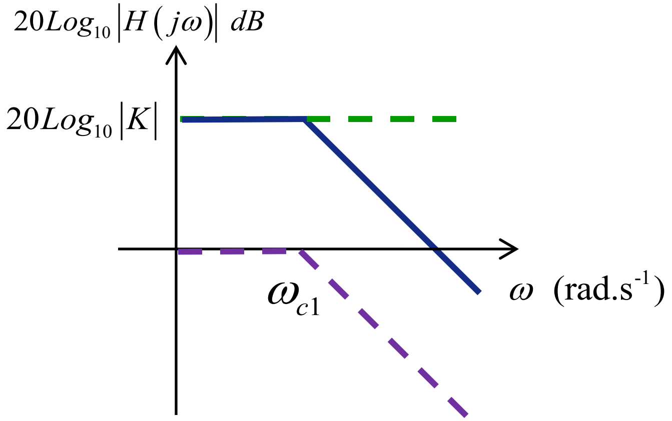
- Bande passante en rad.s^{-1} ou en Hz
  - ✓ Ensemble des pulsations ω_i (fréquences $F_i = {}^{\omega_i}/_{2\pi}$) pour lesquelles le module de $H(j\omega)$ a sa valeur comprise entre sa valeur maximale et cette valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$

$$\boxed{\frac{\left|H\left(j\omega_{\max}\right)\right|}{\sqrt{2}} \leq \left|H\left(j\omega_i\right)\right| \leq \left|H\left(j\omega_{\max}\right)\right|}$$

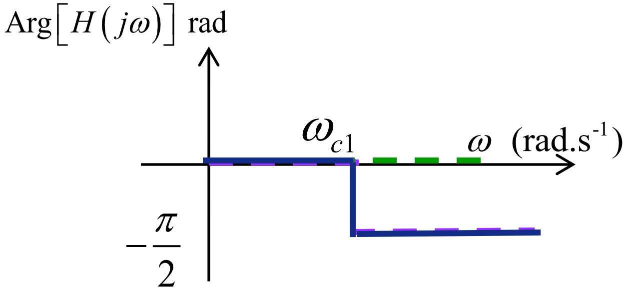
7. Fonctions de filtrage

- Le passe-bas

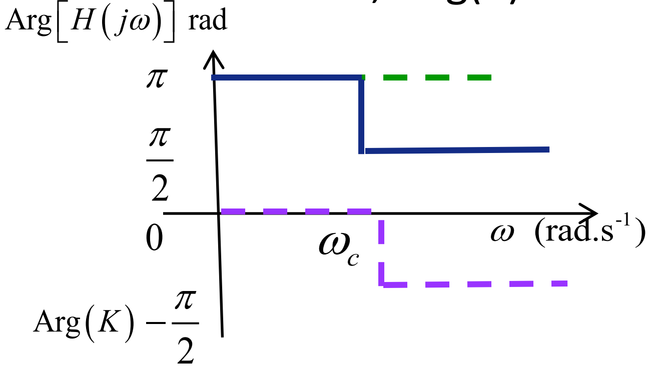
$$H(j\omega)=\frac{K}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}}=K.\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}}$$



K>0, arg(K) = 0



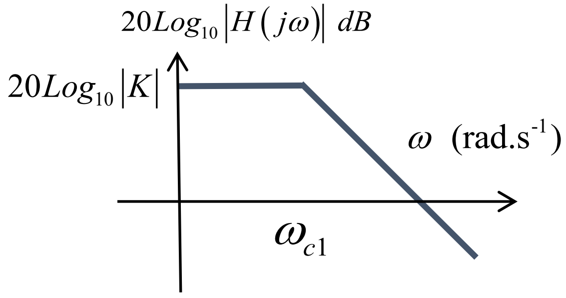
K<0, arg(K) = π



7. Fonctions de filtrage

▸ Le passe-bas

$$H(j\omega)=\frac{K}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}} \quad\Rightarrow\quad \left|H(j\omega)\right|=|K|.\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}\right)^2}}$$



- Pulsation ou fréquence de coupure à -3dB

✓ Valeur maximale pour $\omega_{max} = 0$ → $\left|H(j\omega_{max})\right|=|K|$

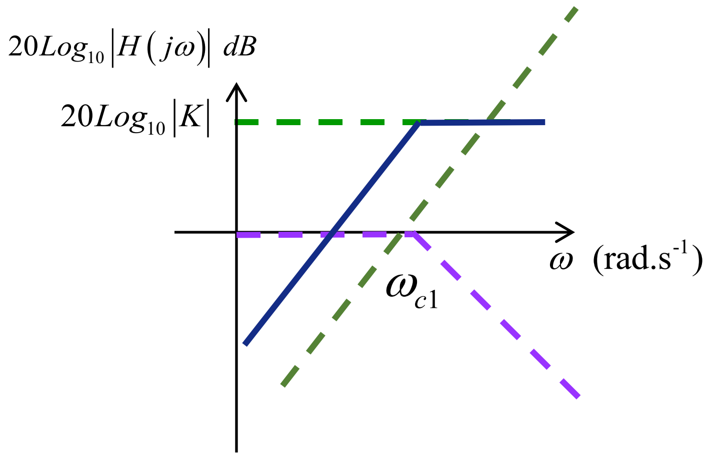
✓ Calcul de la pulsation de coupure ω_c : $\left|H(j\omega_c)\right|=\dfrac{|K|}{\sqrt{2}}$

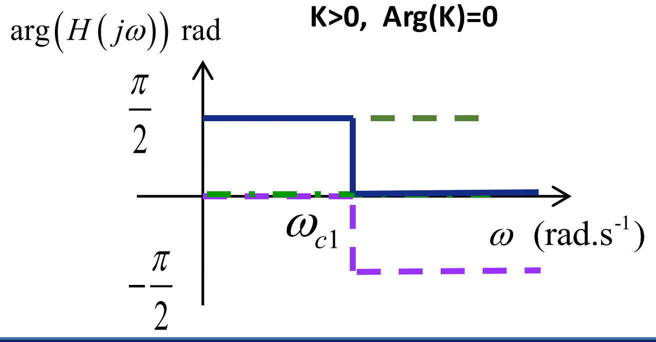
$$\Rightarrow\quad |K|.\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_c}{\omega_{c1}}\right)^2}}=\frac{|K|}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow \omega_c=\omega_{c1}$$

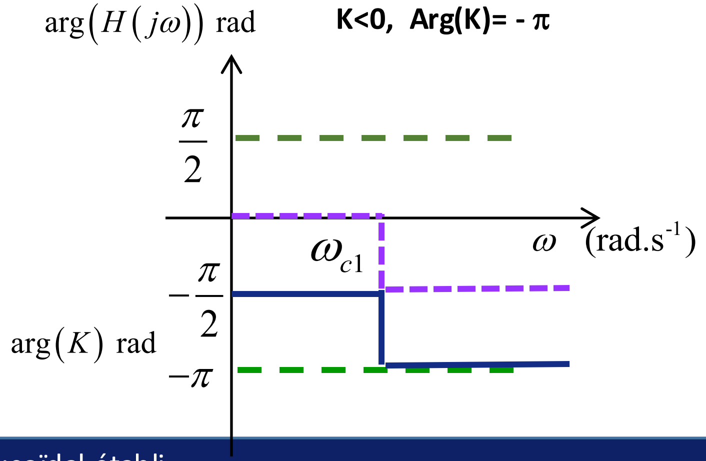
✓ Bande passante : **[0, ωc1] rad.s-1** ou **[0, Fc1] en Hz**

▸ Le passe-haut

$$H(j\omega)=\frac{K.j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}}=K.\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}}.j\frac{\omega}{\omega_{c1}}$$



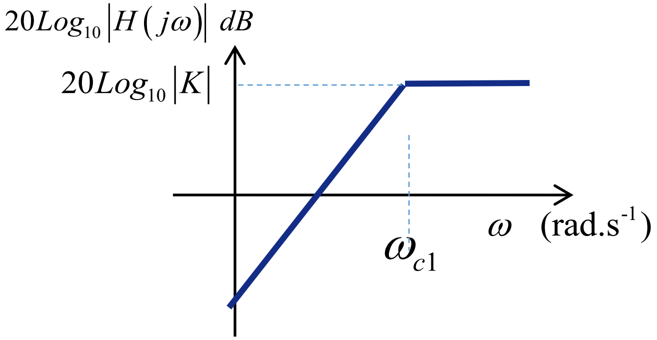




7. Fonctions de filtrage

▸ Le passe-haut

$$H(j\omega)=\frac{K.j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}} \Rightarrow \left|H(j\omega)\right|=|K|.\frac{\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}\right)^2}}$$



- Pulsation (ou fréquence) de coupure à -3dB :

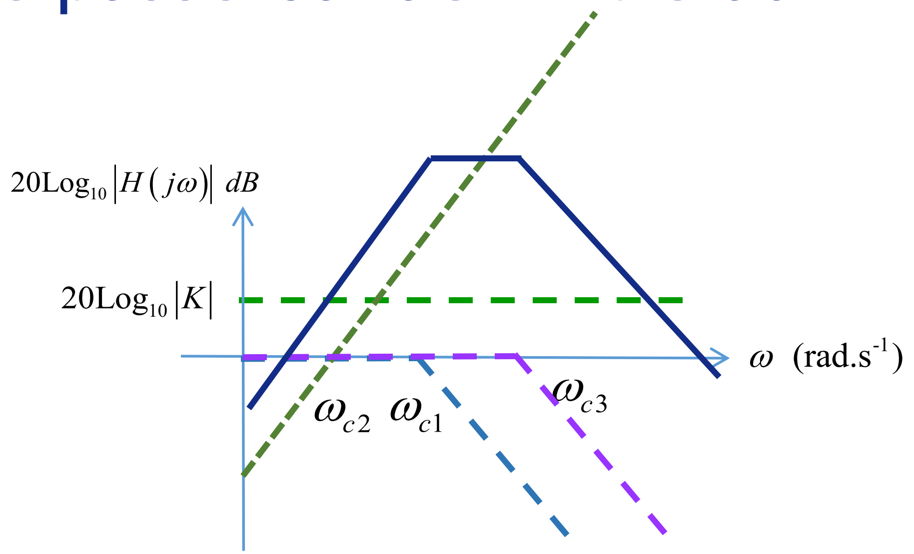
✓ Valeur maximale pour ω tendant vers +∞ : $\left|H(j\omega_{\max})\right|_{\omega\to+\infty} \approx |K|.\frac{\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}\right)^2}}=|K|$

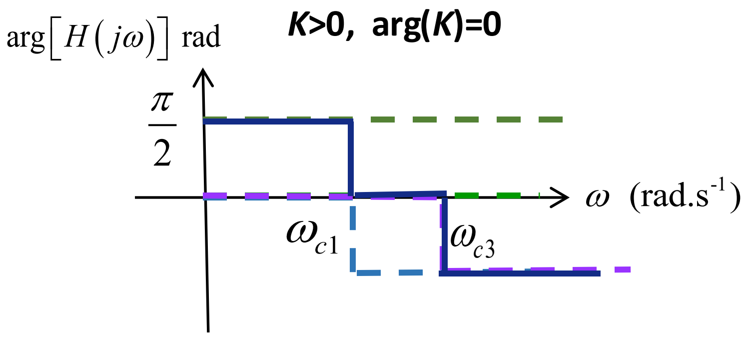
✓ Calcul de la pulsation de coupure ω_{c1} : $\left|H(j\omega_c)\right|=\frac{|K|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |K|.\frac{\dfrac{\omega_c}{\omega_{c1}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_c}{\omega_{c1}}\right)^2}}=\frac{|K|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c=\omega_{c1}$

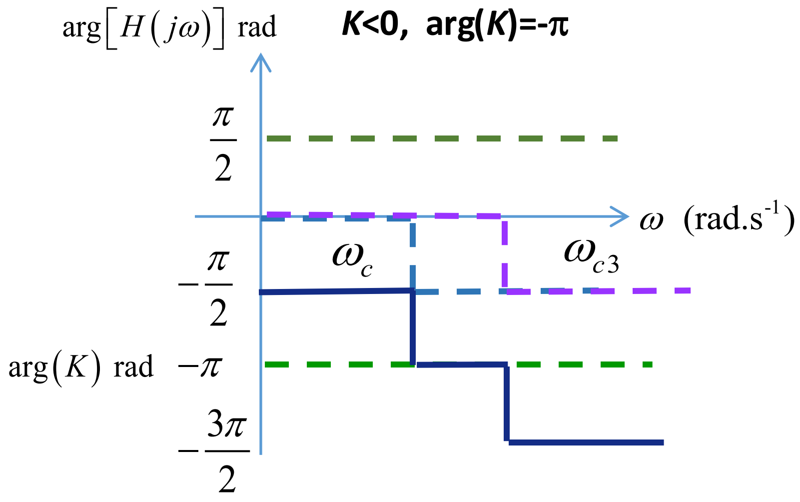
✓ Bande passante : $[\omega_{c1}, +\infty[$ rad.s-1 ou $[F_{c1},+\infty[$ en Hz

▸ Le passe-bande : filtre du 2nd ordre

$$H(j\omega)=\frac{K.j\dfrac{\omega}{\omega_{c2}}}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}\right)\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c3}}\right)}=K.\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}}.\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c3}}}.j\frac{\omega}{\omega_{c2}}$$

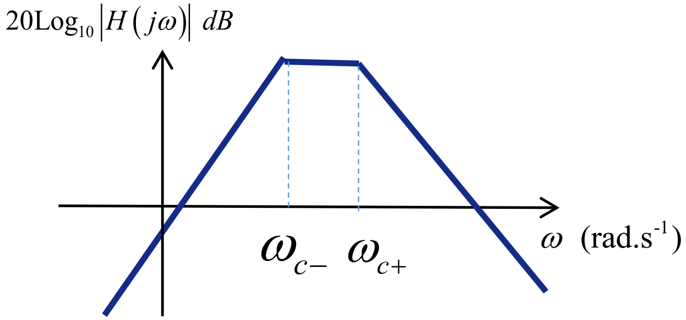






Le passe-bande : filtre du second ordre

$$H(j\omega)=\frac{K.j\frac{\omega}{\omega_{c2}}}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{c1}}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{c3}}\right)} \Rightarrow \left|H(j\omega)\right|=\left|K\right|.\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{c1}}\right)^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{c3}}\right)^2}}.\frac{\omega}{\omega_{c2}}$$

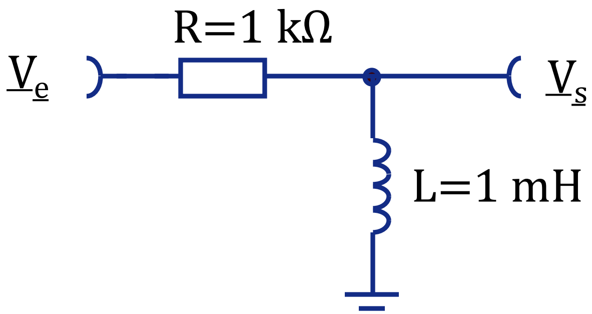


- Deux pulsations (ou fréquences) de coupure
  - ✓ Calcul de ω_{max} sur équation du second ordre → valeur qui annule la dérivée du module : $\frac{d\left|H(j\omega)\right|}{d\omega}=0$
  - ✓ Calcul des deux pulsations de coupure : $\boxed{\left|H(j\omega_{c-/c+})\right|=\frac{\left|H(j\omega_{max})\right|}{\sqrt{2}}}$
  - ✓ Bande passante : $[\omega_{c-}, \omega_{c+}]$ rad.s-1 ou $[f_{c-}, f_{c+}]$ Hz

Pour la E2…

7. Fonctions de filtrage

- Exemple : tracez le diagramme de Bode du circuit suivant :
  - Fonction de transfert



$$\underline{V_s} = \frac{Z_L}{Z_L + Z_R}\underline{V_e} \qquad \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$

  - Il faut le remettre sous une forme de produit de fonctions élémentaires :

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{jL\omega}{R\left(1 + j\frac{L}{R}\omega\right)} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{\left(1 + j\frac{L}{R}\omega\right)} = j\frac{L}{R}\omega.\frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

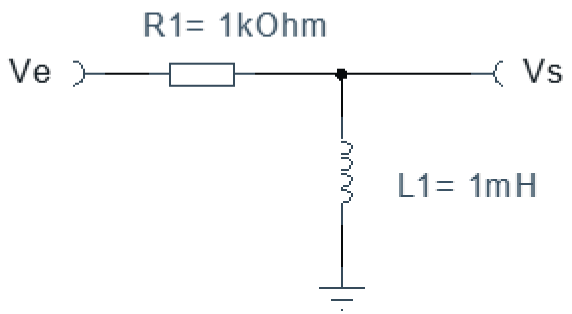
  - On reconnait les fonctions suivantes : $H(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_c}.\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

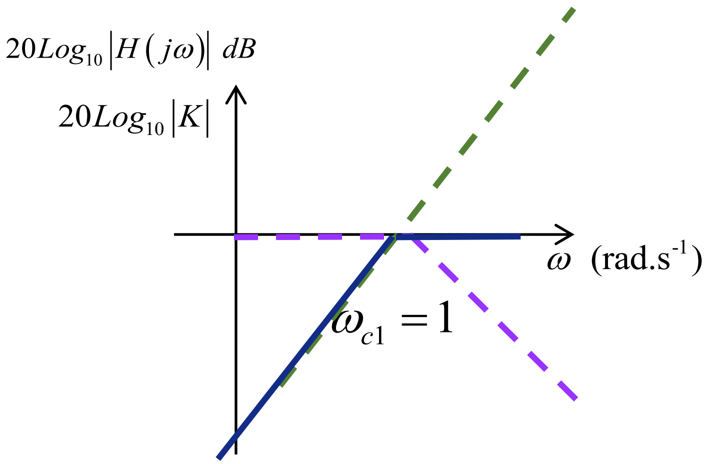
✓ Avec : $\omega_c = \frac{R}{L} = \frac{10^3}{10^{-3}} = 1 \text{ rad.s}^{-1}$

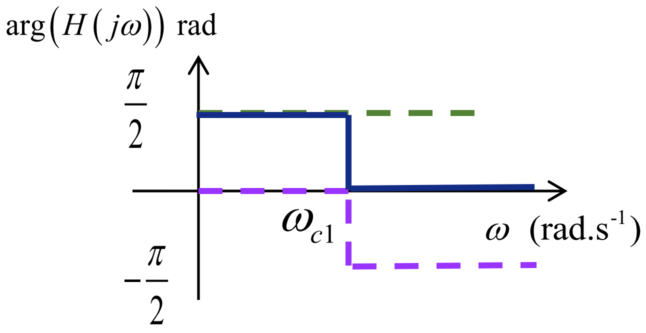
7. Fonctions de filtrage

- e) Exemple avec une fonction de transfert produit de fonction du 1er ordre
  - Tracé du diagramme du circuit suivant :

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{c1}}}.j\frac{\omega}{\omega_{c1}}$$







Ce qu'il faut retenir

- Les fonctions élémentaires du premier ordre
  - Leur expression

$$H_1(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \qquad H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \qquad H_3(j\omega) = \frac{j\omega}{\omega_c} \qquad H_4(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

  - Leur diagramme de Bode (module et phase)
  - Les fonctions de filtrage : passe-haut, passe-bas, passe-bande
    - ✓ Expression des filtres et diagrammes de Bode
    - ✓ Méthode de calcul de la pulsation et de la fréquence de coupure
    - ✓ Définition de la bande passante