IN302 - Graphes et algorithmes - Michel Couprie

Éléments de correction pour le chapitre 1

Exercice 1.

Représentation de G :

I	1	1	2	2
T	2	3	1	3

Tableau d'arcs

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Matrice booléenne

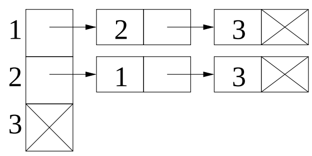

Tableau de listes

Représentation de G^{-1} :

I	2	3	1	3
T	1	1	2	2

Tableau d'arcs

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Matrice booléenne

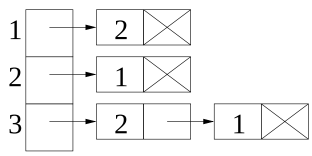

Tableau de listes

Exercice 2.

On supposera que l'application Γ est représentée par un tableau de listes.
L'instruction d'initialisation de Y à la ligne 1 est en $O(n)$, car Y est représenté par un tableau de booléens.
La boucle de la ligne 2 est executée n fois au pire (si $X = E$).
Décomposons le coût de la ligne 3. En supposant que $E = \{1, \ldots, n\}$, le coût de la ligne 3 pour le sommet $x = 1$ est en $O(1 + |\Gamma(1)|)$, où 1 représente un temps constant pour accéder à la liste de successeurs du sommet 1 (que celle-ci soit vide ou non), et $|\Gamma(1)|$ est la longueur de cette liste. Idem pour les sommets $2, \ldots, n$, on aura donc au total un coût en $O(1 + |\Gamma(1)| + \ldots + 1 + |\Gamma(n)|) = O(n + m)$ pour la ligne 3.
L'opération $Y = Y \cup \{y\}$ est en temps constant si Y est représenté par un tableau de booléens, elle aura lieu autant de fois que le graphe comporte d'arcs, la ligne 4 est donc en $O(m)$.
Globalement, on aura donc une complexité en $O(n + n + n + m + m) = O(3n + 2m) = O(n + m)$.

Exercice 3.

Algo SYM_1 : les graphes sont représentés par des tableaux de listes. Ligne 1 en $O(n)$, ligne 2 en $O(n)$, ligne 3 en $O(n + m)$ (voir exercice 2 ci-dessus, ligne 3), ligne 4 en $O(m)$ (car chaque arc est utilisé exactement une fois, on n'a donc pas besoin de tester la présence de y dans la liste avant de l'ajouter). Total : $O(n + m)$.

Algo SYM_1 : les graphes sont représentés par des tableaux d'arcs (doubles tableaux). Ligne 1 en $O(m)$, ligne 2 en $O(m)$, ligne 3 en $O(m)$. Total : $O(m)$.

Exercice 4.

Première façon : chaque sommet est relié à tous les autres sommets (il y en a n) par une arête, mais chaque arête est comptée pour deux sommets (des deux extrémités), il y a donc $\frac{n(n+1)}{2}$ arêtes.

Seconde façon : on compte les arêtes en les ôtant du graphe au fur et à mesure, pour ne pas les compter 2 fois. Pour le sommet 1, on trouve (et l'on retire) n arêtes. Pour le sommet 2, on trouve (et l'on retire) $n-1$ arêtes (car le sommet 1 n'est plus relié au sommet 2). En poursuivant, on trouve au total $n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$ arêtes.

Exercice 5.

Soit $c = (x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y)$ un chemin de x à y dans G. Si c ne contient pas deux fois le même sommet, alors c est lui-même élémentaire et il n'y a rien à faire. Sinon, il existe deux indices $i < j$ tels que $x_i = x_j$. Considérons $c_1 = (x_0, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_k)$. Il est clair que c_1 est lui aussi un chemin de x à y dans G, de longueur strictement inférieure à celle de c. En répétant ce processus jusqu'à ne plus trouver de sommet dupliqué, on obtient un chemin élémentaire de x à y dans G.

Exercice 6.

Indication 1 : un algorithme linéaire existe. Il faut faire attention à la complexité car les algorithmes les plus évidents sont quadratiques. Cependant, proposer un premier algorithme (même quadratique) est une première étape vers la conception d'un meilleur algorithme.

Indication 2 : on pourra essayer de construire un chemin de y à x, puis de l'inverser.

Exercice 7.

On suppose que les graphes (E, Γ) et (E, Γ^{-1}) sont représentés par des tableaux de listes, que T est représenté par une liste, et que $C'_a, \hat{\Gamma}^{\infty}(a)$ et $\hat{\Gamma}^{-\infty}(a)$ sont représentés par des tableaux de booléens. Ligne 1 en $O(n)$, ligne 2 en $O(n)$ (chaque sommet apparaît au plus une fois dans T), ligne 3 en $O(n)$, ligne 4 en $O(n+m)$, ligne 5 en $O(m)$, ligne 6 en $O(m)$ (pas de duplication possible), lignes 10-14 : idem 2-6, ligne 17 en $O(n)$. Total : $O(n+m)$.

Exercice 8.

Indication : détecter le retour au sommet initial.

Exercice 9.

Indication : distinguer le cas des graphes orientés et celui des graphes non-orientés. Pour les graphes non-orientés, on supposera le graphe antiréflexif (sans boucle).

Exercice 10.

Indication : construire le graphe non-orienté qui représente les droites (sommets) et leurs intersections (arêtes), et utiliser la seconde propriété de l'exercice 9.

Exercice 11.

Indication : en termes de graphe, cela revient à montrer que dans tout graphe fini non-orienté sans boucle, il existe au moins deux sommets ayant le même degré. Remarquons que cette propriété n'est pas vraie pour un graphe infini, on pourra trouver une méthode pour construire un contre-exemple. Une preuve par l'absurde est bien adaptée ici, supposons un graphe fini dont tous les sommets ont des degrés différents . . .

Exercice 12.

Indication : on montre facilement cette proposition par récurrence sur p.

Exercice 13.

Indication : dessiner le graphe correspondant à M, puis les graphes correspondant à M^2, $M^3 \dots$

Exercice 14. Supposons G biparti, et soit $c = (x_0, \dots, x_k)$ un cycle dans G. Supposons que $x_0 \in E_0$, alors puisque G est biparti et que $x_1 \in \Gamma(x_0)$, on sait que $x_1 \in E_1$. De même, pour tous les indices i pairs on aura $x_i \in E_0$ et pour les i impairs $x_i \in E_1$. Comme c est un cycle on a $x_k = x_0 \in E_0$, donc k, qui est aussi la longueur du cycle, est pair.

Supposons maintenant que G ne contient pas de cycle impair. On supposera le graphe connexe (dans le cas contraire, on appliquera le même raisonnement à toutes les composantes connexes de G). Soit x un sommet quelconque. Pour tout sommet $y \in E$, désignons par $\pi(y)$ la longueur d'une plus courte chaîne de x à y. Considérons les ensembles $E_0 = \{y \in E | \pi(y) \text{ est pair}\}$ et $E_1 = \{y \in E | \pi(y) \text{ est impair}\}$. Comme G est connexe, ils constituent bien une partition de E. Il reste à montrer que deux éléments de E_0 (resp. E_1) ne peuvent être adjacents entre eux. Soient y et z deux sommets dans E_0 (le raisonnement est similaire pour E_1), supposons que $z \in \Gamma(y)$. Soit c_1 une plus courte chaîne de x à y, c_2 une plus courte chaîne de x à z, les longueurs de ces deux chaînes sont de même parité. Si l'on suppose que c_1 et c_2 n'ont pas d'arête commune, en concaténant c_1, c_2 et l'arête $\{y, z\}$ on obtient un cycle de longueur impaire, en contradiction avec notre hypothèse. Sinon, on fera le même raisonnement en ne gardant de c_1 et c_2 que leurs parties situées entre leur dernier sommet commun, et y et z respectivement.