IN302 - Graphes et algorithmes - Michel Couprie

Éléments de correction pour le chapitre 3

Exercice 26.

1) Supposons qu'il existe un chemin c'' de x_i à x_j, de longueur strictement inférieure à la longueur de c'. Alors le chemin obtenu par la concaténation de $(x_0, ..., x_i)$, de c'' et de $(x_j, ..., x_k)$ est un chemin de x_0 à x_k plus court que c, une contradiction avec l'hypothèse de minimalité de c.

2) Puisque c est un plus court chemin de x_0 à x_k, tout chemin d de x_0 à x_k possède une longueur $l(d) \geq l(c)$. Considérons un chemin quelconque c'' de x_i à x_j, on a donc $l(x_0, ..., x_i) + l(c'') + l(x_j, ..., x_k) \geq l(c)$, et comme $l(x_0, ..., x_i) + l(c') + l(x_j, ..., x_k) = l(c)$ on déduit $l(c'') \geq l(c')$.

Exercice 27.

	1	2	3	4	5	6
π^0	0	∞	∞	∞	∞	∞
π^1	0	7	8	∞	∞	∞
π^2	0	7	8	11	8	9
π^3	0	7	6	10	8	9
π^4	0	7	6	10	8	8
π^5	0	7	6	10	8	8

CIRCABS = FAUX

Exercice 28.

Indication : Voir la section 3.2.1 du poly (graphe des plus courts chemins). Pour l'algorithme, partir du sommet j et "remonter" vers i.

Solution possible : calculer les longueurs des plus courts chemins à partir de i par l'algorithme de Bellman (résultat π_i), puis appliquer l'algorithme suivant.

Algorithme 1 : PlusCourtChemin

Données : $E, \Gamma^{-1}, \ell, i \in E, j \in E, \pi_i$
Résultat : C (chemin, sous forme d'une liste de sommets)
si $\pi_i(j) = \infty$ **alors retourner** () ;
$x \leftarrow j$; $C \leftarrow (j)$;
tant que $x \neq i$ **faire**
  Choisir $y \in \Gamma^{-1}(x)$ tel que $\pi_i(x) = \pi_i(y) + \ell(y, x)$;
  $C \leftarrow y + C$;
  $x \leftarrow y$;
retourner C ;

Complexité : $O(n + m)$.

Exercice 29.

Indication : on doit se servir du fait que les longueurs des arcs sont positives ou nulles.

Exercice 30.

S	k	x	y
$\{a\}$	1	a	b, c
$\{a,b\}$	2	b	c, d
$\{a,b,d\}$	3	d	c, e, f
$\{a,b,d,f\}$	4	f	/
$\{a,b,d,e,f\}$	5	e	/
$\{a,b,c,d,e,f\}$	6	c	/

A la fin de l'algo, les valeurs des longueurs des plus courts chemins sont :

Sommet	a	b	c	d	e	f
π	0	2	7	3	4	4

Exercice 31.

Algorithme 2 : LongueursPCC

Données : $E, \Gamma, i \in E$
Résultat : π

$\pi(i) \leftarrow 0$; **pour chaque** $x \in E \setminus \{i\}$ **faire** $\pi(x) \leftarrow \infty$;
$T_1 \leftarrow \{i\}$; $T_2 \leftarrow \emptyset$;
tant que $T_1 \neq \emptyset$ **faire**
    pour chaque $x \in T_1$ **faire**
        pour chaque $y \in \Gamma(x)$ **faire**
            si $\pi(y) = \infty$ **alors** $\pi(y) \leftarrow \pi(x) + 1$; $T_2 \leftarrow T_2 \cup \{y\}$;
    $T_1 \leftarrow T_2$; $T_2 \leftarrow \emptyset$;

Complexité : $O(n+m)$.