

Examen de graphes - I3, I3S - 2 heures - sans documents

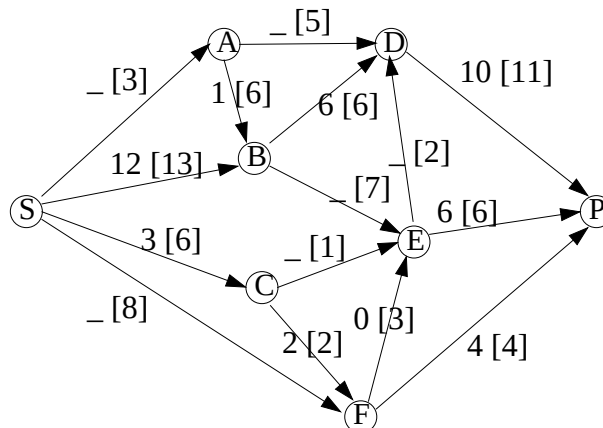
Le barème est donné à titre indicatif. Il pourra être légèrement revu lors de la correction.

A. Flots et coupes (7 pts)

A₁ (1 Pt.) Rappelez les définitions de : réseau de transport, flot compatible, coupe, capacité d'une coupe.

A₂ (2 Pts.) Soit $R = (E, \vec{\Gamma}, p, s, c)$ un réseau de transport. Démontrez que, pour tout flot f compatible avec R et pour toute coupe $\vec{K}$ sur R , on a $f(p, s) \leq c(\vec{K})$.

A₃ (1 Pt.) La figure ci-dessous représente un réseau de transport et un flot compatible f . Chaque arc comporte deux valeurs : $f(u)[c(u)]$, où $c(u)$ est la capacité de l'arc u , et $f(u)$ la valeur du flot sur cet arc (parfois absente et remplacée par “-”). Retrouvez les valeurs manquantes et indiquez-les sur la feuille annexe (Fig. 1).



A₄ (1 Pt.) Sur la feuille annexe (Fig. 2), donnez le réseau d'écart pour ce flot.

A₅ (1 Pt.) Utilisez ce réseau d'écart pour améliorer le flot courant. Précisez le chemin choisi, sa capacité résiduelle, et indiquez sur la feuille annexe (Fig. 3) le nouveau flot obtenu.

A₆ (1 Pt.) Ce nouveau flot est-il maximal ? Justifiez votre réponse.

B. Algorithme A* (3 pts)

B₁ (1 Pt.) Rappelez les définitions des g^* , h^* , g et h dans la méthode A*, ainsi que la condition que doivent vérifier h et h^* .

B₂ (2 Pts.) Supposons que l'on ait trouvé deux heuristiques h_1 et h_2 distinctes pour le même graphe de résolution de problème (GRP), toutes deux vérifiant la condition A*. En vous basant sur h_1 et h_2 , donnez deux nouvelles heuristiques A* pour ce GRP. Laquelle vous paraît la plus intéressante? Pourquoi?

C. Banquet de mariage (5 pts)

Au mariage de Kate et William, le placement des invités à la table d'honneur (celle des mariés et de leurs proches, une grande table ronde) est l'objet d'un épineux problème. En effet, à cette table chacun doit être assis entre deux autres convives, et l'on prévoit des tensions, voire des disputes si certaines personnes se trouvent placées à côté de certaines autres. Pour éviter cela, le chef du protocole fait remplir à chacun un questionnaire confidentiel : ainsi chaque invité(e) attribue à chaque autre invité(e) une "note de mécontentement" entre 0 et 10, la note 10 signifiant "je serais très fâché(e) d'être assis juste à côté de cette personne". Sachant que l'on ne pourra sans doute pas satisfaire au mieux tout le monde, le but est au moins de trouver un plan de table qui minimise le "mécontentement global", compris comme la somme des mécontentements de chacun.

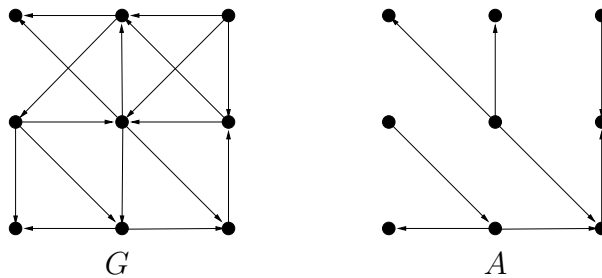
C₁ (2 Pt.) Modélisez ce problème en termes de graphes, en définissant très précisément les structures (graphes, réseaux, chemins, ...) utilisées pour représenter : 1. les données, et 2. la solution.

C₂ (2 Pts.) Justifiez votre modèle par des arguments précis. Si vous n'y arrivez pas, c'est probablement que vous n'avez pas choisi le bon modèle ... Dans ce cas, revenez sur votre réponse à la question précédente.

C₃ (1 Pt.) À quel problème connu se ramène-t-on ? Quelle méthode préconisez-vous pour le résoudre ?

D. Arbre couvrant (7 pts)

Soit $G = (E, \Gamma)$ un graphe antiréflexif, antisymétrique et connexe. On dit que $A = (E, \Gamma_A)$ est un *arbre couvrant* pour G si A est un graphe partiel de G (c'est-à-dire que tout arc de A est également un arc de G) et si A est un arbre. La figure ci-dessous illustre cette définition.



D₁ (1 Pt.) Proposez une méthode, utilisant directement¹ un algorithme connu, pour extraire de G un arbre couvrant. Précisez quel algorithme vous utilisez (rappelez-en le principe en quelques lignes) ainsi que sa complexité en temps de calcul. Il n'est pas demandé ici un schéma de programme.

D₂ (5 Pts.) Proposez un algorithme linéaire en temps de calcul (en $O(n+m)$) pour extraire de G un arbre couvrant. La clarté (lisibilité) de votre schéma de programme sera prise en compte dans la notation.

D₃ (1 Pt.) Justifiez la complexité de l'algorithme ci-dessus, en précisant quelles structures de données vous utilisez pour chaque ensemble.

1. c'est-à-dire sans le modifier

Annexe - à détacher et joindre à votre copie - Nom, Prénom :

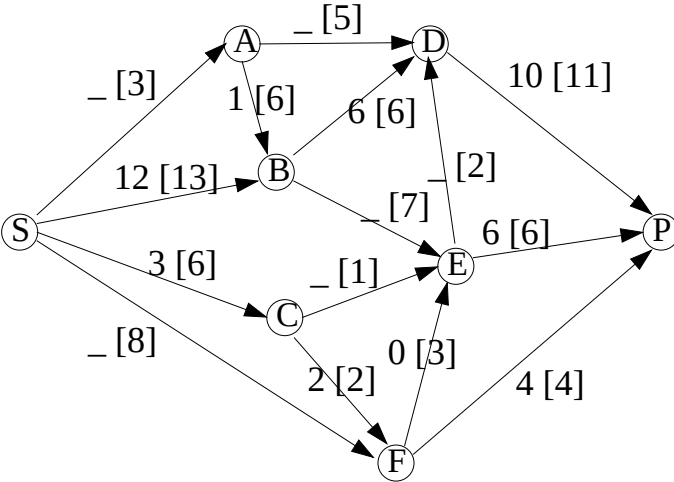


Fig. 1

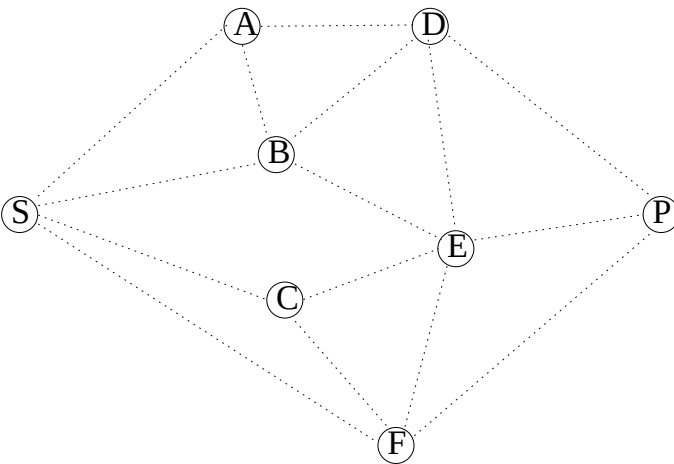


Fig. 2

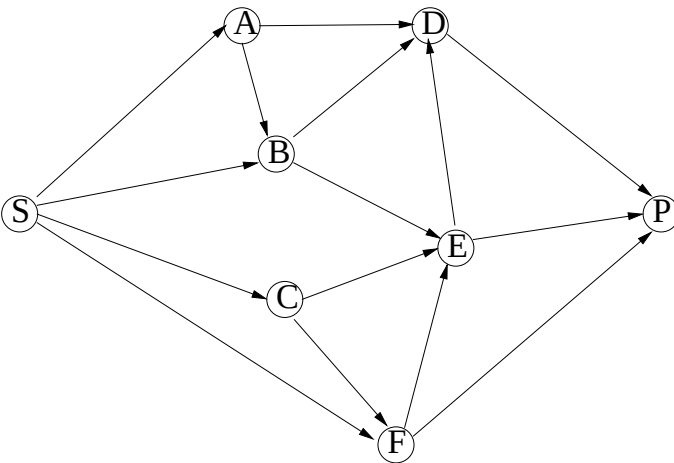


Fig. 3