

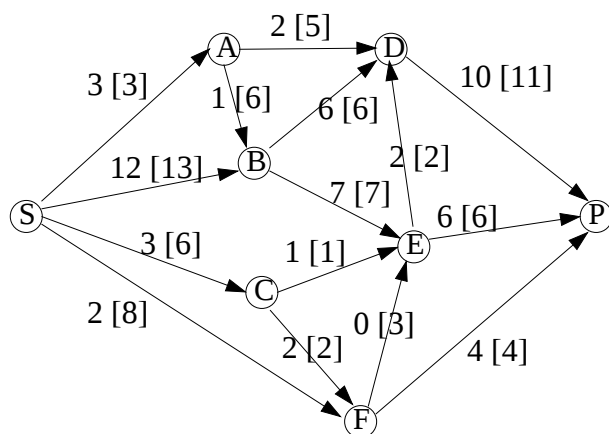
# Examen de graphes - I3 - 2011 - éléments de correction

## A. Flots et coupes (7 pts)

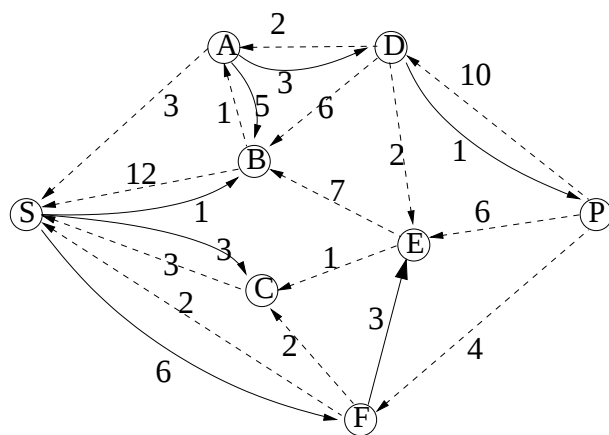
A<sub>1</sub> voir poly.

A<sub>2</sub> voir poly, exercice 39, et notes de cours.

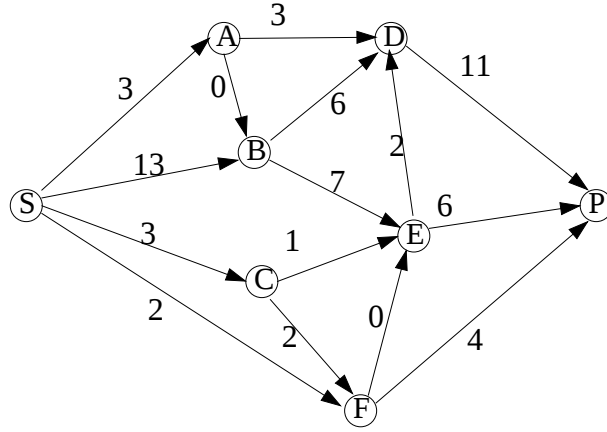
A<sub>3</sub>



A<sub>4</sub>



A<sub>5</sub> Chemin : S,B,A,D,P ; capacité résiduelle 1. Le nouveau flot est de valeur 21.



**A<sub>6</sub>** Oui, car la coupe constituée des arcs sortant de  $\{S, A, B, C, D, E, F\}$  est de capacité 21. On sait que la valeur d'un flot compatible est inférieure ou égale à la capacité d'une coupe quelconque (voir poly), aucun flot ne peut donc avoir une valeur supérieure à 21.

## B. Algorithme A\* (3 pts)

**B<sub>1</sub>** voir cours.

**B<sub>2</sub>** On pose pour tout sommet  $x$  :  $h_3(x) = \min\{h_1(x), h_2(x)\}$  et  $h_4(x) = \max\{h_1(x), h_2(x)\}$ . Sachant que pour tout  $x$  on a  $h_1(x) \leq h^*(x)$  et  $h_2(x) \leq h^*(x)$ , on déduit que  $h_3(x) \leq h^*(x)$  et  $h_4(x) \leq h^*(x)$ . Les heuristiques  $h_3$  et  $h_4$  vérifient donc la condition A\*. L'heuristique  $h_4$  est plus intéressante que  $h_3$  car elle est plus proche de  $h^*$ .

## C. Banquet de mariage (5 pts)

**C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>** Les données du problème peuvent être modélisées par un réseau  $R = (E, \vec{\Gamma}, m)$  où chaque sommet de  $E$  représente un convive, où  $\vec{\Gamma}$  est l'ensemble de tous les couples possibles d'éléments distincts de  $E$  (graphe symétrique et antiréflexif complet), et où  $m(x, y) = m(y, x)$  représente la note de mécontentement attribuée à  $y$  par  $x$  plus celle attribuée à  $x$  par  $y$ .

La solution du problème, qui est un plan de table, correspond à un circuit  $C$  dans  $R$  passant une et une seule fois par chaque sommet de  $E$  (circuit hamiltonien). Le successeur (resp. prédécesseur) de  $x$  dans  $C$  représente le voisin de gauche (resp. de droite) de  $x$  à table. Du fait que  $C$  est un circuit, chaque personne a bien deux voisins. Du fait que  $C$  est hamiltonien, tout le monde trouve sa place à table.

La somme des  $m(x, y)$ , sur tous les arcs de ce circuit, représente bien la somme, pour toutes les personnes, des mécontentements de se voir placées entre ses deux voisins de table.

**C<sub>3</sub>** Il s'agit de trouver un circuit hamiltonien de longueur minimale dans  $R$  : on reconnaît le problème du voyageur de commerce. Une approche heuristique, par la méthode  $A^*$ , est bien adaptée (voir TD6).

## D. Arbre couvrant (7 pts)

**D<sub>1</sub>**

Valuer tous les arcs par 1 et utiliser Prim ou Kruskal.

**D<sub>2</sub>**

---

### Algorithme 1 : ArbreCouvrant

---

**Données :**  $(E = \{0, \dots, n\}, \Gamma, \Gamma^{-1})$

**Résultat :**  $\Gamma_A$

1  $C = \{0\}; T = \{0\};$

2 **tant que**  $\exists x \in T$  **faire**

3      $T = T \setminus \{x\};$

4     **pour chaque**  $y \in \Gamma(x)$  **tel que**  $y \notin C$  **faire**

5          $C = C \cup \{y\}; T = T \cup \{y\}; \Gamma_A(x) = \Gamma_A(x) \cup \{y\};$

6     **pour chaque**  $y \in \Gamma^{-1}(x)$  **tel que**  $y \notin C$  **faire**

7          $C = C \cup \{y\}; T = T \cup \{y\}; \Gamma_A(y) = \Gamma_A(y) \cup \{x\};$

8 **si**  $C = E$  **alors retourner** VRAI; **sinon retourner** FAUX;

---

**D<sub>3</sub>**

Voir ComposanteConnexe (poly).