

Inondations cataclysmiques et cascades dans des reliefs topographiques

Fernand Meyer

Centre de Morphologie Mathématique

Ecole des Mines

35, rue Saint Honoré

77305 Fontainebleau

Caractériser la structure emboîtée des bassins versants d'un relief topographique est intéressant d'une part pour l'étude des textures des surfaces rugueuses et d'autre part dans le contexte de la segmentation morphologique. La ligne de partage des eaux sépare les bassins versants d'un relief topographique : chaque minimum régional donnant naissance à un bassin versant. Lors d'une inondation du relief topographique, les bassins versants fusionnent progressivement selon deux mécanismes :

- un lac couvre deux minima dont les bassins versants fusionnent.
- un lac remplit un bassin versant jusqu'au niveau de son col le plus bas. Dès lors il n'existe plus de minimum régional au sein de ce bassin versant, qui est absorbé par un bassin versant voisin.

Si on remplit chaque bassin versant jusqu'au niveau de son col le plus bas, on aura produit l'inondation la plus haute possible sans débordement d'un bassin versant vers un bassin voisin. Cette inondation étant maximale, nous l'avons appelé inondation cataclysmique. Si on ajoute de l'eau dans un bassin quelconque, il va déborder vers un bassin voisin, sauf s'il s'agit d'un lac qui est minimum régional du nouveau relief. Ce débordement se ferait sous forme de cascade depuis le col. Pour cette raison, la hiérarchie induite par ce type d'inondation a été appelée hiérarchie des cascades (ou waterfall) par Serge Beucher, qui est le premier à l'avoir introduite. Chaque bassin versant du relief inondé est alors union d'un certain nombre de bassins versants du relief initial. En d'autres termes la partition des bassins versants du relief inondé est plus grossière que la partition des bassins versants du relief initial. On peut itérer le processus d'inondation sur le nouveau relief et obtenir une nouvelle partition de bassins versants encore plus grossière. Par itération, on obtient ainsi une séquence de partitions emboîtées de plus en plus grossière formant la hiérarchie des cascades ou waterfalls.

Nous montrons dans ce papier que la hiérarchie des cascades peut être obtenue sur l'arbre de poids minimum du graphe de voisinage défini de la manière suivante : chaque bassin versant du relief de départ est un noeud du graphe ; ses arêtes relient les bassins versants voisins et sont valués par la hauteur du col. Comme lors de tout procédé d'inondation, on peut se contenter d'étudier l'arbre de poids minimum de ce graphe de voisinage. On définit alors les opérations suivantes sur arbre et graphe. Tout d'abord la contraction d'arête qui supprime une arête et un noeud et relie toutes les arêtes adjacentes au noeud supprimé au noeud restant. On définit ensuite deux couples d'érosion et dilatation sur le graphe.

Le premier couples d'opérateurs duaux transfère à chaque noeud la valuation minimale pour l'érosion ε_n , maximale pour la dilatation δ_n des arêtes adjacentes. Dès lors que les noeuds sont également valués, on peut alors définir un nouveau couple d'opérateurs qui transfère à chaque arête la valuation minimale pour l'érosion ε_a , maximale pour la dilatation δ_a des noeuds adjacents. Il se trouve que les couples $(\varepsilon_n, \delta_a)$ and $(\varepsilon_a, \delta_n)$ forment chacun une adjonction. Il s'en suit que $\delta_a \varepsilon_n$ et $\delta_a \varepsilon_n$ sont des ouvertures. Nous montrerons que les arêtes de l'arbre de poids minimum invariantes par l'ouverture $\delta_a \varepsilon_n$ sont les arêtes qui appartiennent au niveau zéro de la hiérarchie des cascades. Pour obtenir les niveaux supérieurs, on contracte toutes les arêtes invariantes par l'ouverture $\delta_a \varepsilon_n$ et on répète l'opération sur le graphe résultant. A chaque itération on obtient un niveau plus élevé de la hiérarchie. On peut attribuer comme nouveau poids aux arêtes le niveau auquel celles-ci disparaissent et on obtient ainsi la distance ultramétrique caractérisant la hiérarchie des cascades.

Ce mode de construction ouvre des perspectives intéressantes pour construire d'autres hiérarchies non paramétriques associées aux bassins versants d'un relief topographique. A la place de l'ouverture $\delta_a \varepsilon_n$ on peut prendre une ouverture plus forte telle que $\delta_a \delta_n \varepsilon_a \varepsilon_n$ et construire la hiérarchie associée : détecter les arêtes invariantes par l'ouverture comme appartenant au niveau le plus bas de la hiérarchie, les contracter et itérer le processus avec le graphe résultant pour détecter les arêtes de rang supérieur dans la hiérarchie. On peut également prendre des filtres morphologiques (opérateurs croissants et idempotents) pour cette construction.