

Une enquête policière.

Un jour Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat datant de plus de 10 ans! A l'époque le duc de Densmore avait été tué par l'explosion d'une bombe dans son château d'Ecosse. Les journaux d'alors relataient que le testament détruit lui aussi par l'explosion avait tout pour déplaire à l'une de ses 7 femmes. Or, avant de mourir, le duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans son château.

- Holmes: Je me souviens de l'affaire; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre, ce qui suppose que *l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château.*

- Watson: Certes et pour cette raison, j'ai interrogé chacune de ses 7 femmes. *Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château qu'une seule fois dans leur vie.*

- Holmes: Hum! Leur avez-vous demandé à quelle période ont eu lieu leurs séjours respectifs?

- Watson: Hélas! Aucune ne se rappelait les dates exactes, après plus de 10 ans! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles avaient rencontré:

- * Ann a rencontré Betty, Charlotte, Félicia, Georgia
- * Betty a rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia, Helen
- * Charlotte a rencontré Ann, Betty, Edith
- * Edith a rencontré Betty, Charlotte, Félicia
- * Félicia a rencontré Ann, Betty, Edith, Helen
- * Georgia a rencontré Ann, Helen
- * Helen a rencontré Betty, Félicia, Georgia.

Vous voyez, mon cher Holmes, ces réponses sont concordantes!

C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit graphisme, avec des points étiquetés A, B, C, E, F, G, H et des lignes reliant ces points. Puis, en moins de 30 secondes, Holmes s'écria:

- *Ce que vous venez de me dire détermine de façon unique l'assassin!*

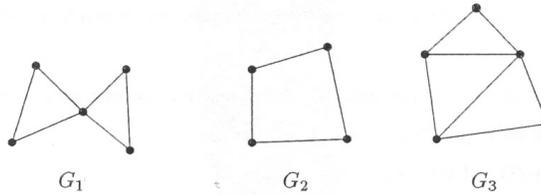
1) Soit $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ une famille finie d'intervalles sur une droite. On appelle graphe associé à \mathcal{F} le graphe non orienté dont les sommets sont en bijection avec les intervalles et tel que deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les intervalles correspondants ont une intersection non vide.

Représenter le graphe associé à \mathcal{F} dans les cas suivants:

- $\mathcal{F} = \{[1, 4], [3, 7], [3, 5], [6, 9]\}$

- $\mathcal{F} = \{[1, 4], [3, 7], [5, 8], [2, 6]\}$

2) On dit qu'un graphe G est un graphe d'intervalles s'il existe une famille \mathcal{F} d'intervalles sur une droite telle que G soit le graphe représentatif de \mathcal{F} . Les graphes G_1 , G_2 , G_3 représentés ci-dessous sont-ils des graphes d'intervalles? Justifiez votre réponse.



3) Trouver une condition nécessaire que doit posséder un graphe non orienté pour qu'il soit un graphe d'intervalles. Justifiez votre réponse.

4) Qui a tué le duc de Densmore? Bien entendu, on trouvera la solution en se basant sur le résultat précédent! Ici encore il est capital de justifier sa réponse: pourquoi l'assassin est déterminé de façon unique? Si vous n'arrivez pas à déterminer l'assassin, peut-être vous faut-il retourner à la question précédente et proposer une autre condition nécessaire.

N.B. L'énigme policière est extraite d'un article de C. Berge (actes du colloque de Cerisy 1980: "Regards sur la théorie des graphes").