Segmentation morphologique dans quelques espaces discrets

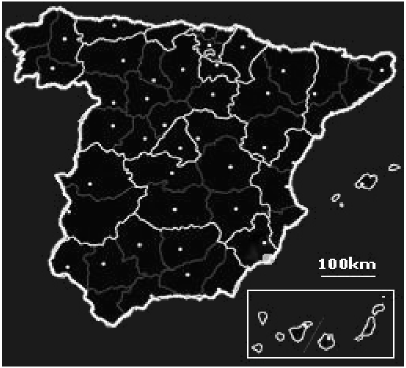
Jean Cousty

En l'honneur du 70ème anniversaire de Jean Serra
ESIEE Paris, le 2 avril 2010

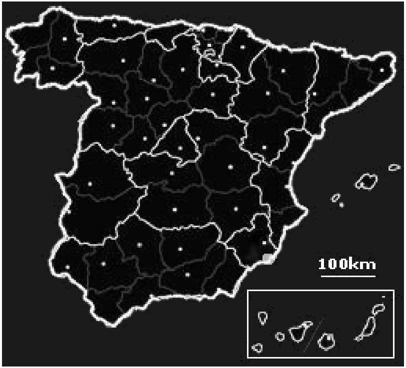
Contributeurs

- Gilles Bertrand, Michel Couprie, Laurent Najman
- Cédric Allène, Jean-Luc Audibert, Renaud Keriven
- Camille Couprie, Léo Grady, Hugues Talbot

L'Espagne de Jean : segmentation



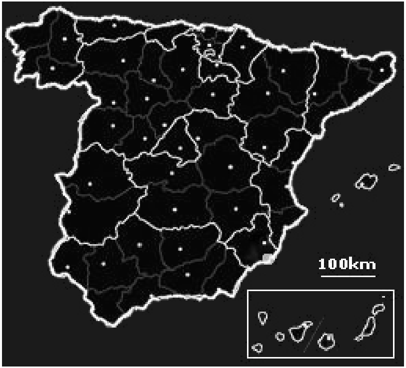
L'Espagne de Jean : segmentation

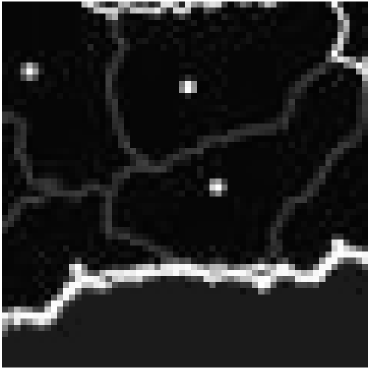


Question

- *Comment extraire les "masques" de l'Espagne, de ses régions et de ses départements ?*

L'Espagne de Jean : segmentation





Question

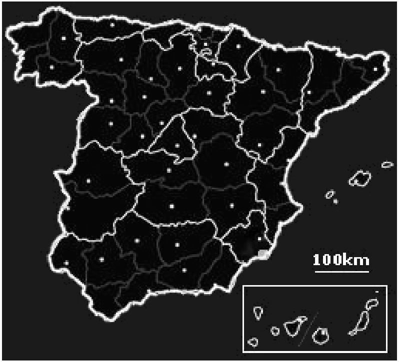
- *Comment extraire les "masques" de l'Espagne, de ses régions et de ses départements ?*

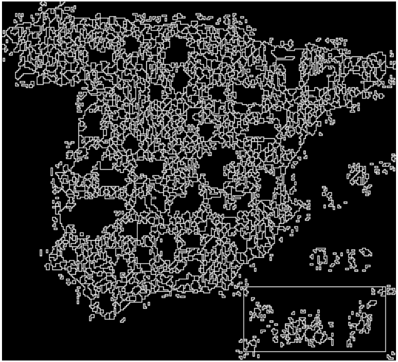
Ligne de partage des eaux (LPE)

- Apparition en segmentation d'images dans les années 70 au CMM

Ligne de partage des eaux (LPE)

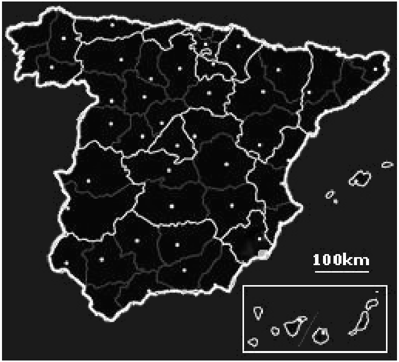
- Apparition en segmentation d'images dans les années 70 au CMM

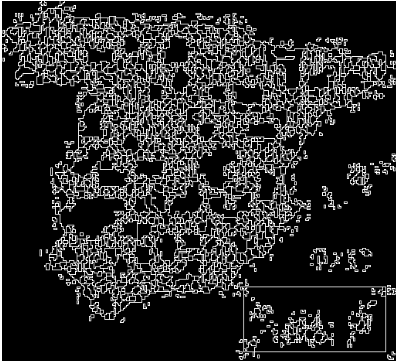




Ligne de partage des eaux (LPE)

- Apparition en segmentation d'images dans les années 70 au CMM



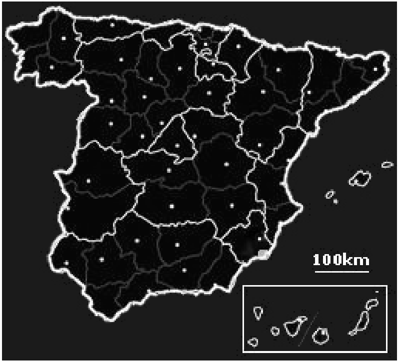


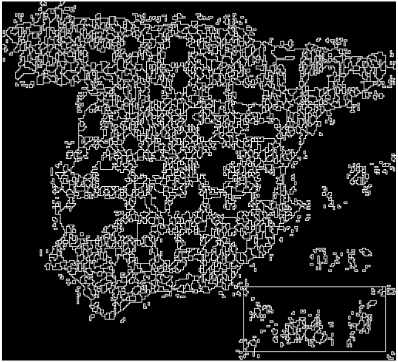
Problème

- *Sur-segmentation*

Filtres connexes

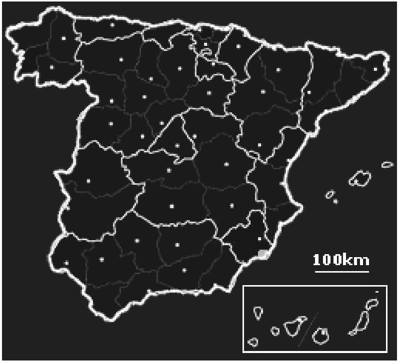
- "Reboucher" les minima non-significatifs vis-à-vis d'un critère



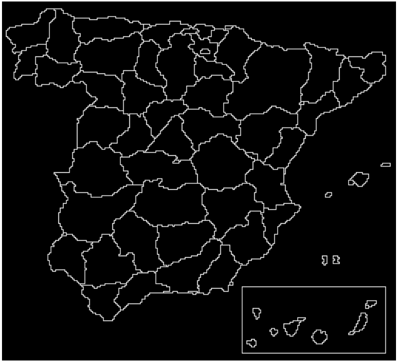


LPE

- “Reboucher” les minima non-significatifs vis-à-vis d'un critère
  - Exemple : h-minima (fermeture par dynamique)



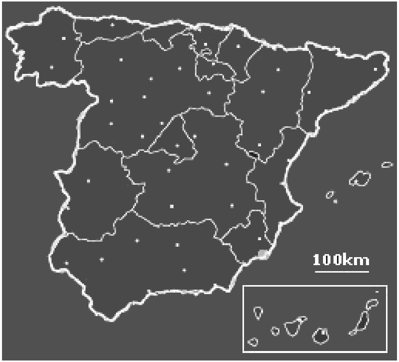
dynamique ≥ 24



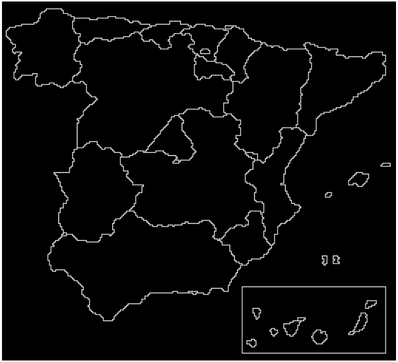
LPE

Filtres connexes

- "Reboucher" les minima non-significatifs vis-à-vis d'un critère
  - Exemple : h-minima (fermeture par dynamique)



dynamique ≥ 72

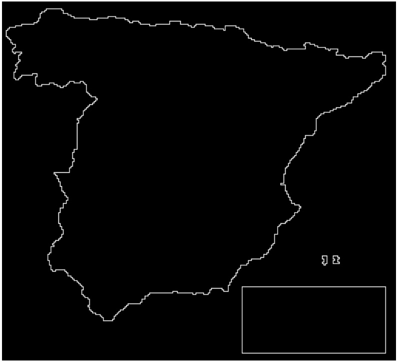


LPE

Filtres connexes

- "Reboucher" les minima non-significatifs vis-à-vis d'un critère
  - Exemple : h-minima (fermeture par dynamique)

dynamique $\geq$ 178

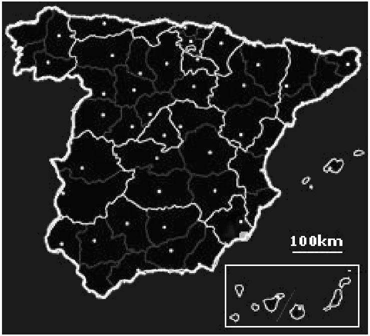


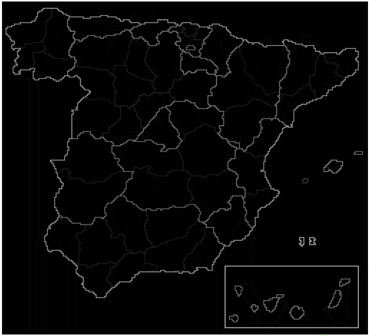
LPE

Hiérarchies et saillance

Hypothèse

- *Les segmentations obtenues en faisant croître le paramètre du filtre forment une* **hiérarchie**
- *Cette hiérarchie peut être représentée par une carte de* **saillance**

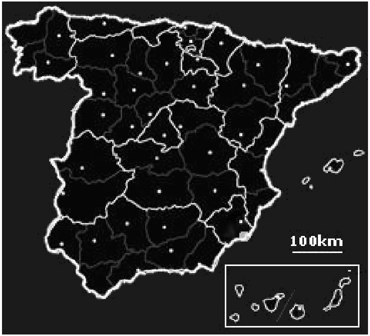


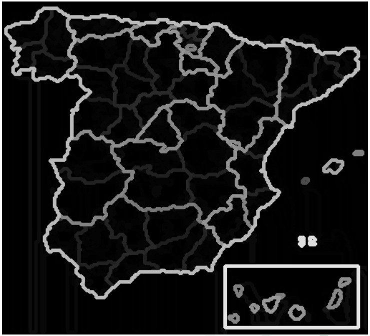


Hiérarchies et saillance

Hypothèse

- *Les segmentations obtenues en faisant croître le paramètre du filtre forment une* **hiérarchie**
- *Cette hiérarchie peut être représentée par une carte de* **saillance**





Algorithme de saillance

Algorithme de saillance

1- LPE
2- Répéter
   3- Extraire 2 régions voisines à fusionner
      - dépend du filtre connexe choisi
      - dépend de la hauteur des frontières entre ces régions
   4- Fusionner ces 2 régions
5- Tant que la segmentation comprend plusieurs régions
6- Représenter la hiérarchie par une image de saillance

Algorithme de saillance

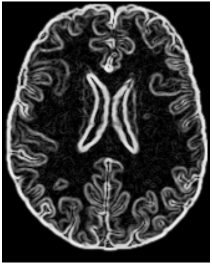
1- LPE
2- Répéter
    3- Extraire 2 régions voisines à fusionner
        - dépend du filtre connexe choisi
        - dépend de la hauteur des frontières entre ces régions
    4- Fusionner ces 2 régions
5- Tant que la segmentation comprend plusieurs régions
6- Représenter la hiérarchie par une image de saillance

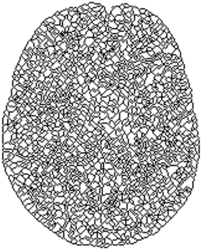
Problème

- *Les étapes 1, 3, 4 et 6 ne produisent pas le résultat espéré dans les graphes à sommets pondérés,*
- *Ce schéma ne permet pas d'obtenir l'image de saillance souhaitée*

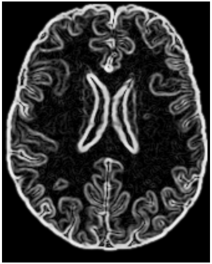
Plan

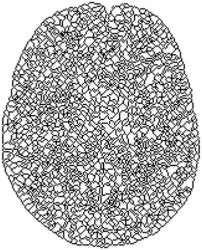
Fusion de régions : Problème 1

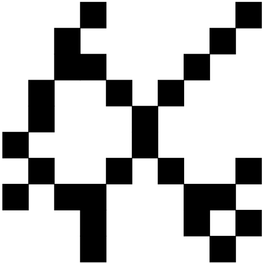




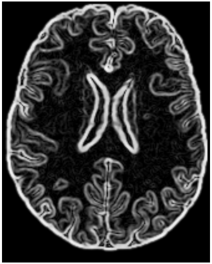
Fusion de régions : Problème 1

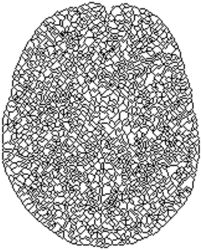


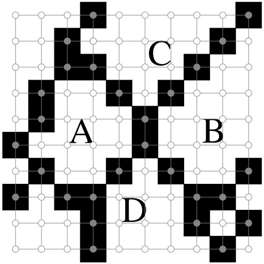




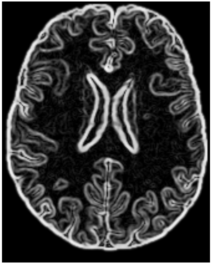
Fusion de régions : Problème 1

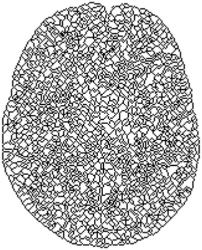


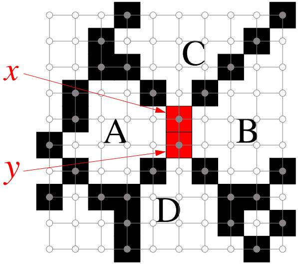




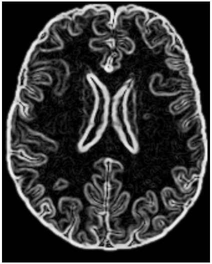
Fusion de régions : Problème 1

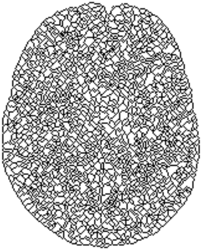


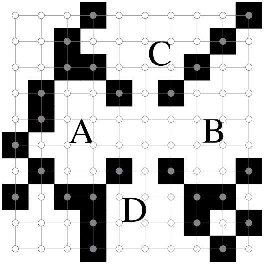




Fusion de régions : Problème 1

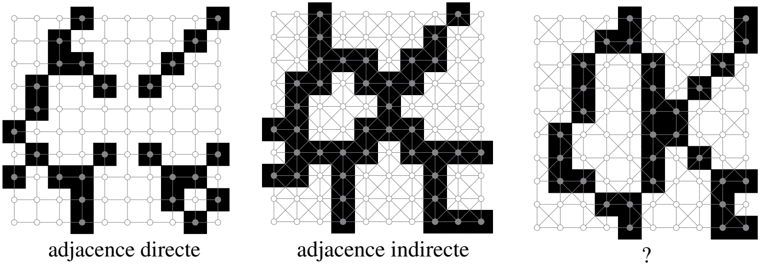






Problème : "When 3 regions meet", [PAVLIDIS-77]

Fusion de régions : Problème 1



Problème : "When 3 regions meet", [PAVLIDIS-77]

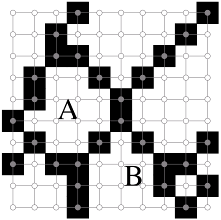
- Existe-t-il des graphes dans lesquels tout couple de régions voisines peut être fusionné en préservant toutes les autres régions ?

Fusion de régions

- Soit X un sous ensemble de sommets du graphe
- Soient A et B deux composantes connexes de X

Définition

- *On dit que A et B peuvent être fusionnées s'il existe $S \subseteq \overline{X}$ tel que*
  - *$A \cup B \cup S$ est une composante connexe de $X \cup S$*
- *On dit aussi que A et B peuvent être fusionnées à travers S*

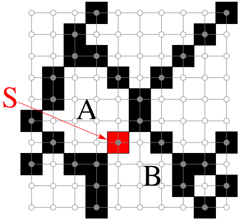


Fusion de régions

- Soit X un sous ensemble de sommets du graphe
- Soient A et B deux composantes connexes de X

Définition

- *On dit que A et B peuvent être fusionnées s'il existe $S \subseteq \overline{X}$ tel que*
  - *$A \cup B \cup S$ est une composante connexe de $X \cup S$*
- *On dit aussi que A et B peuvent être fusionnées à travers S*

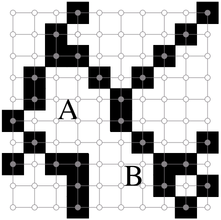


Fusion de régions

- Soit X un sous ensemble de sommets du graphe
- Soient A et B deux composantes connexes de X

Définition

- *On dit que A et B peuvent être fusionnées s'il existe $S \subseteq \overline{X}$ tel que*
  - *$A \cup B \cup S$ est une composante connexe de $X \cup S$*
- *On dit aussi que A et B peuvent être fusionnées à travers S*



Graphes de fusion

- Introduction de **4 classes de graphes** définies en fonction de leurs propriétés de fusion. En particulier :

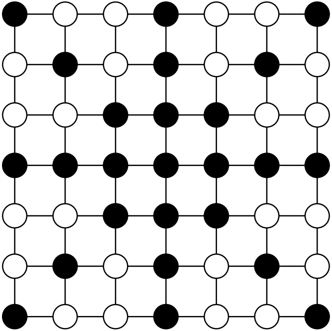
Graphes de fusion

- Introduction de **4 classes de graphes** définies en fonction de leurs propriétés de fusion. En particulier :
- Les **graphes de fusion** sont les graphes dans lesquels toute région peut être fusionnée avec au moins une autre région

Graphes de fusion

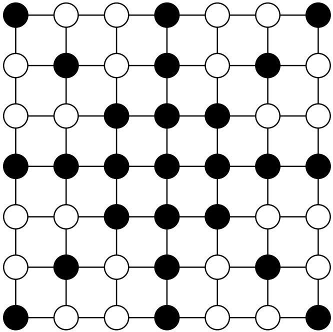
- Introduction de **4 classes de graphes** définies en fonction de leurs propriétés de fusion. En particulier :
- Les **graphes de fusion** sont les graphes dans lesquels toute région peut être fusionnée avec au moins une autre région
- Les **graphes de fusion parfaits** sont les graphes dans lesquels deux régions voisines peuvent toujours être fusionnées à travers leur voisinage commun

Fusion de régions : Problème 2



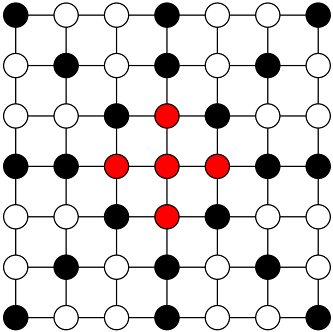
- Un *clivage* est un ensemble de sommets auquel il est impossible d'enlever un point en préservant le nombre de composantes connexes du complémentaire

Fusion de régions : Problème 2



- Un *clivage* est un ensemble de sommets auquel il est impossible d'enlever un point en préservant le nombre de composantes connexes du complémentaire
- Un clivage est *mince* si tous ses sommets son adjacent au complémentaire

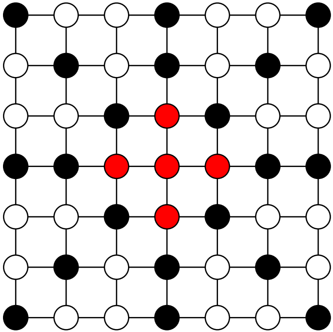
Fusion de régions : Problème 2



- Un *clivage* est un ensemble de sommets auquel il est impossible d'enlever un point en préservant le nombre de composantes connexes du complémentaire
- Un clivage est *mince* si tous ses sommets son adjacent au complémentaire

Problème : Clivage (ou LPE binaire) épais

Fusion de régions : Problème 2



- Un *clivage* est un ensemble de sommets auquel il est impossible d'enlever un point en préservant le nombre de composantes connexes du complémentaire
- Un clivage est *mince* si tous ses sommets son adjacent au complémentaire

Problème : Clivage (ou LPE binaire) épais

- Existe-t-il des graphes dans lesquels tout clivage est mince ?

Graphe de fusion : résultat saillant

Théorème (de minceur)

- *Un graphe est un graphe de fusion* si et seulement si *tout clivage dans ce graphe est mince*

- Cousty et al., *Fusion graphs: merging properties and watersheds*, JMIV 2008

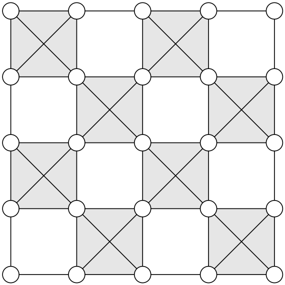
Quelle adjacence utiliser en analyse d'images ?

Quelle adjacence utiliser en analyse d'images ?

	fusion	fusion parfait
2D : 4-adjacence	NON	NON
2D : 6-adjacence	NON	NON
2D : 8-adjacence	OUI	NON
3D : 6-adjacence	NON	NON
3D : 18-adjacence	NON	NON
3D : 26-adjacence	NON	NON

Quelle adjacence utiliser en analyse d'images ?

	fusion	fusion parfait
2D : 4-adjacence	NON	NON
2D : 6-adjacence	NON	NON
2D : 8-adjacence	OUI	NON
3D : 6-adjacence	NON	NON
3D : 18-adjacence	NON	NON
3D : 26-adjacence	NON	NON



- Introduction d'une nouvelle relation d'adjacence sur $\mathbb{Z}^d$, appelée **grille de fusion parfaite**, qui est un graphe de fusion parfait

Grille de fusion parfaite : unicité

Théorème (d'unicité)

- *La grille de fusion parfaite est l'unique relation d'adjacence sur* $\mathbb{Z}^d$*, entre les relations d'adjacence directe et indirecte, qui induit un graphe de fusion parfait, quelle que soit la dimension* $d \in \mathbb{N}^+_\star$

- Cousty et Bertrand, *Uniqueness of the perfect fusion grid on* $\mathbb{Z}^d$, JMIV 2009

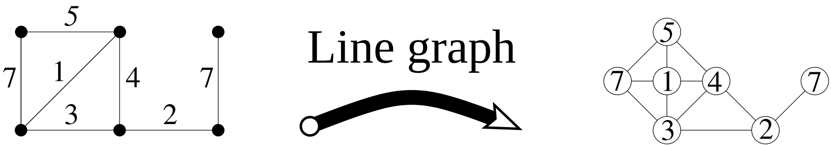
Graphes de fusion : résumé

- Les graphes de fusion parfaits (pondérés ou non) constituent un cadre intéressant pour la segmentation
  - Fusion de régions
  - Clivages et LPE minces
  - Algorithme linéaire de LPE (par immersion)

Graphes de fusion : résumé

- Les graphes de fusion parfaits (pondérés ou non) constituent un cadre intéressant pour la segmentation
  - Fusion de régions
  - Clivages et LPE minces
  - Algorithme linéaire de LPE (par immersion)

- Les graphes à arêtes pondérées en sont un cas particulier



LPE dans les graphes à arêtes pondérées

Problème

- *Liens avec des méthodes d'optimisation combinatoire*
  - *Plus courts chemins, arbres de poids minimum, flots maximum*
- *Liens avec d'autres méthodes de segmentation*
  - *IFT, coupures minimales, marcheurs aléatoires*

LPE dans les graphes à arêtes pondérées

Problème

- *Liens avec des méthodes d'optimisation combinatoire*
  - *Plus courts chemins, arbres de poids minimum, flots maximum*
- *Liens avec d'autres méthodes de segmentation*
  - *IFT, coupures minimales, marcheurs aléatoires*

- Étudions *directement* les lignes de partages des eaux dans ces graphes

Graphe à arêtes pondérées

- Soit $G = (V, E)$ un graphe
- Soit F un fonction de E dans $\mathbb{R}^+$.

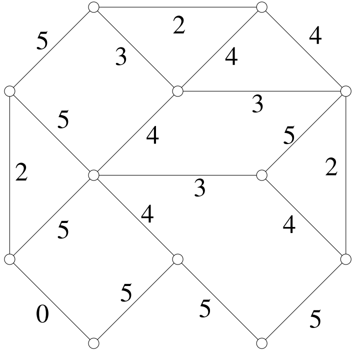
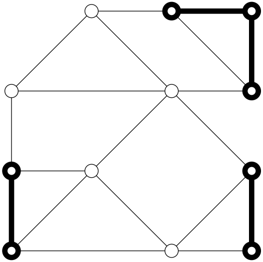


Image et graphe à arêtes pondérées

- L'altitude d'une arête u reliant deux pixels x et y, représente la *dissimilarité entre x and y*
  - $F(u) = |I(x) - I(y)|$.

Extension



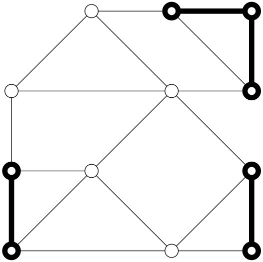
un sous-graphe X

Définition (d'après Def. 12, Bertrand 2005)

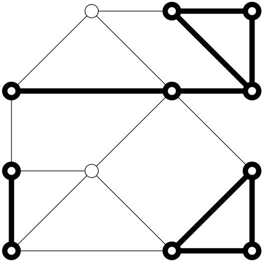
Soient X et Y deux sous-graphes non-vide de G.

- *On dit que Y est une extension de X (dans G) si $X \subseteq Y$ et si toute composante de Y contient exactement une composante de X*

Extension



un sous-graphe X



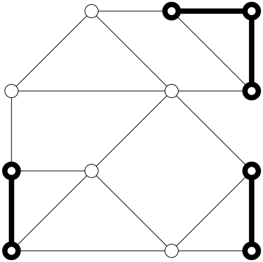
une *extension* Y de X

Définition (d'après Def. 12, Bertrand 2005)

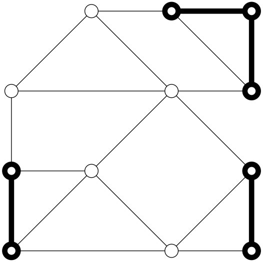
Soient X et Y deux sous-graphes non-vide de G.

- *On dit que Y est une* extension de X (dans G) *si $X \subseteq Y$ et si toute composante de Y contient exactement une composante de X*

Extension



un sous-graphe X



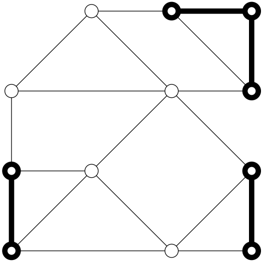
une *extension* Y de X

Définition (d'après Def. 12, Bertrand 2005)

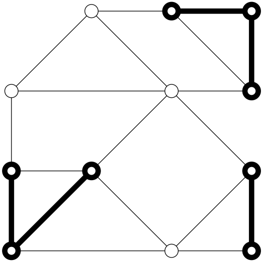
Soient X et Y deux sous-graphes non-vide de G.

- *On dit que Y est une* extension de X (dans G) *si $X \subseteq Y$ et si toute composante de Y contient exactement une composante de X*

Extension



un sous-graphe X



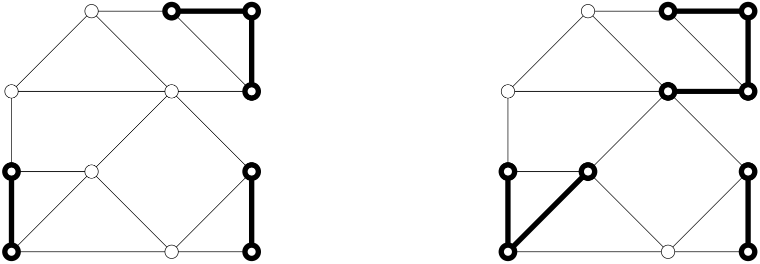
une *extension* Y de X

Définition (d'après Def. 12, Bertrand 2005)

Soient X et Y deux sous-graphes non-vide de G.

- *On dit que Y est une* extension de X (dans G) *si $X \subseteq Y$ et si toute composante de Y contient exactement une composante de X*

Extension



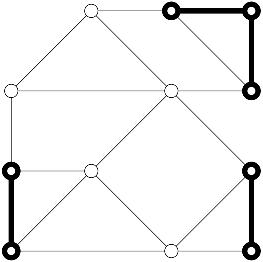
un sous-graphe X — une *extension* Y de X

Définition (d'après Def. 12, Bertrand 2005)

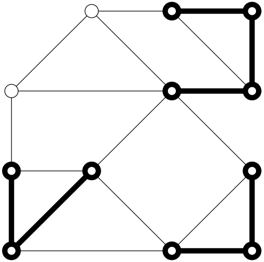
Soient X et Y deux sous-graphes non-vide de G.

- *On dit que Y est une extension de X (dans G) si $X \subseteq Y$ et si toute composante de Y contient exactement une composante de X*

Extension



un sous-graphe X



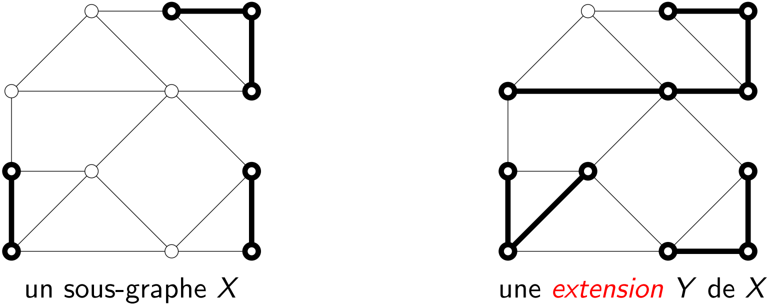
une *extension* Y de X

Définition (d'après Def. 12, Bertrand 2005)

Soient X et Y deux sous-graphes non-vide de G.

- *On dit que Y est une* extension de X (dans G) *si $X \subseteq Y$ et si toute composante de Y contient exactement une composante de X*

Extension

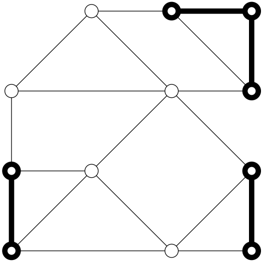


Définition (d'après Def. 12, Bertrand 2005)

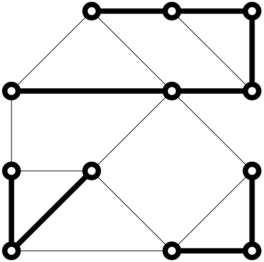
Soient X et Y deux sous-graphes non-vide de G.

- *On dit que Y est une* extension de X (dans G) *si $X \subseteq Y$ et si toute composante de Y contient exactement une composante de X*

Extension



un sous-graphe X



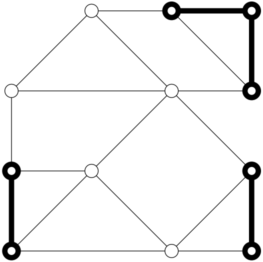
une *extension* Y de X

Définition (d'après Def. 12, Bertrand 2005)

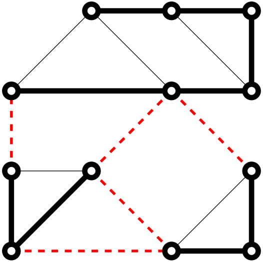
Soient X et Y deux sous-graphes non-vide de G.

- *On dit que Y est une* extension de X (dans G) *si $X \subseteq Y$ et si toute composante de Y contient exactement une composante de X*

Coupure dans un graphe



un sous-graphe X



une *coupure* S pour X

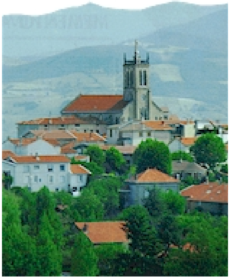
Définition (Coupure)

Soient X un sous-graphe de G et $S \subseteq E$ un ensemble d'arêtes

- *On dit que S est une coupure pour X si le sous-graphe induit par $\overline{S}$ est une extension de X et si S est minimal pour cette propriété*

Coupure par ligne de partage des eaux

- *L'église de Sorbier*
  (une intuition topographique)

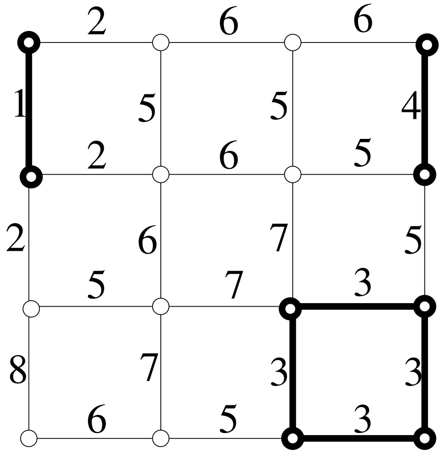


Définition (principe de la goutte d'eau - Cousty et al. 2009)

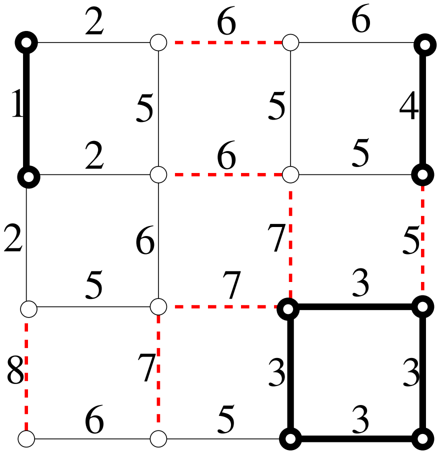
L'ensemble $S \subseteq E$ est une coupure par LPE de F si S est une coupure pour les minima de F et si $\forall u = \{x_0, y_0\} \in S$, il existe $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ et $\langle y_0, \ldots, y_m \rangle$ deux chemins descendants dans $\overline{S}$ tels que :

1. *x_n et y_m sont des sommets de deux minima distincts de F ;*
2. *$F(u) \geq F(\{x_0, x_1\})$ si $n > 0$ et $F(u) \geq F(\{y_0, y_1\})$ si $m > 0$*

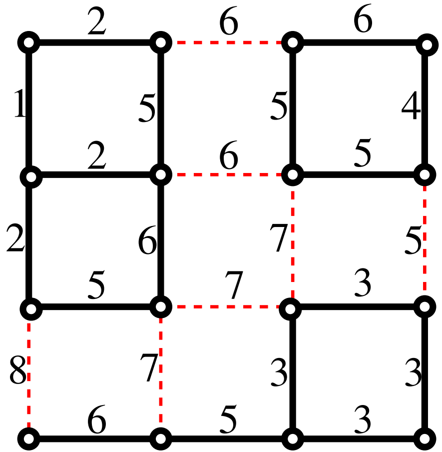
LPE : exemple



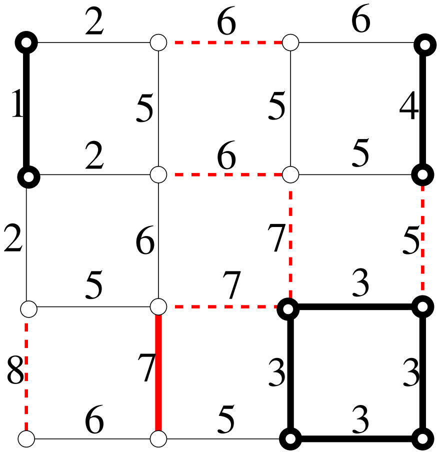
LPE : exemple



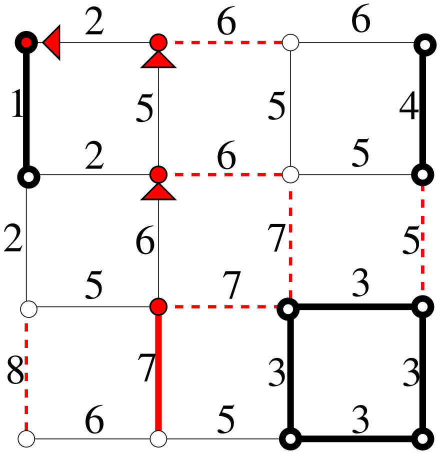
LPE : exemple



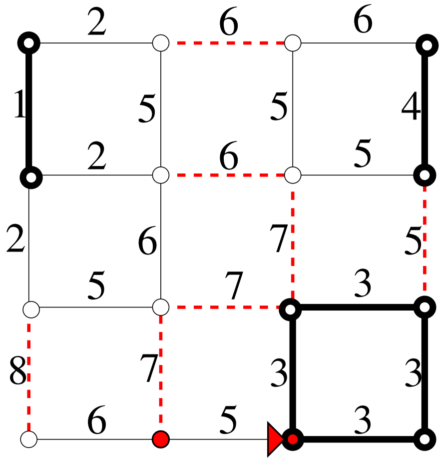
LPE : exemple



LPE : exemple



LPE : exemple



Optimalité des LPE

En 1994, F. Meyer a montré des liens entre algorithmes d'inondation depuis des marqueurs et forêts de poids minimum

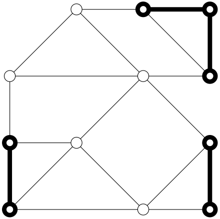
Optimalité des LPE

En 1994, F. Meyer a montré des liens entre algorithmes d'inondation depuis des marqueurs et forêts de poids minimum

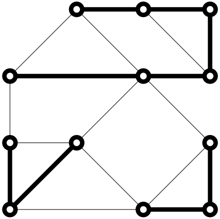
Problem

- *Qu'en est-il des coupures par LPE ?*

Forêts relatives



un sous-graphe X



une *forêt Y relative à X*

Définition

Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G.
On dit que Y est une forêt relative à X *si :*

1. *Y est une extension de X ; et*
2. *tout cycle dans Y est également un cycle dans X*

Forêt couvrante de poids minimum

- Le *poids d'une forêt* Y est la somme des valeurs des arêtes de Y, *i.e.* $\sum_{u \in E(Y)} F(u)$.

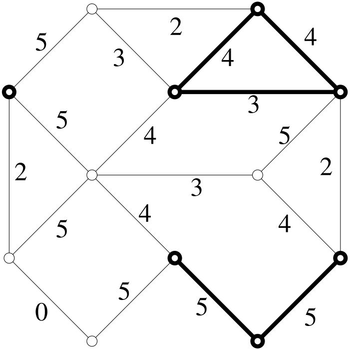
Forêt couvrante de poids minimum

- Le *poids d'une forêt* Y est la somme des valeurs des arêtes de Y, *i.e.* $\sum_{u \in E(Y)} F(u)$.

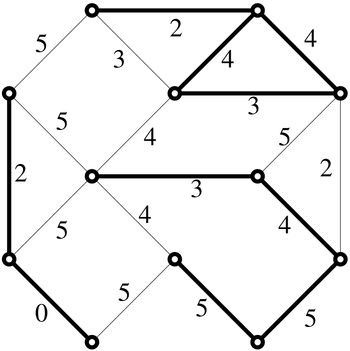
Définition

On dit que Y est une forêt couvrante de poids minimum (FPMIN) relative à X *si Y est une forêt couvrante relative à X et si le poids de Y est inférieur ou égal au poids de tout autre forêt couvrante relative à X.*

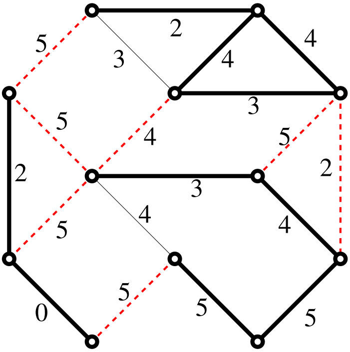
Forêt couvrante de poids minimum : exemple



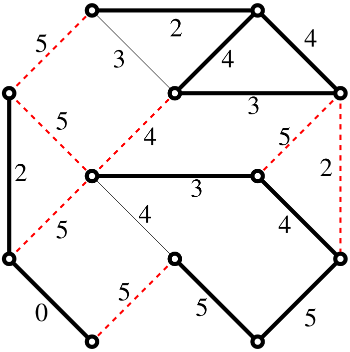
Forêt couvrante de poids minimum : exemple



Forêt couvrante de poids minimum : exemple



Forêt couvrante de poids minimum : exemple



- L'unique coupure pour Y est une coupure pour X. Elle est appelée *coupure par FPMIN* pour X.

Optimalité des LPE

Théorème (Optimalité des LPE)

L'ensemble d'arêtes S est une coupure par FPMIN pour les minima de F si et seulement si *S est une ligne de partage des eaux de F*

- Cousty et al, *Watershed cuts: minimum spanning forest and the drop of water principle*, PAMI 2009

LPE, coupures minimales et marcheurs aléatoires

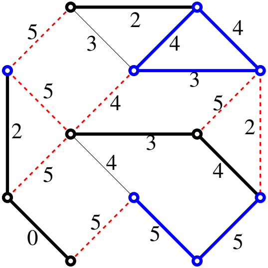
LPE, coupures minimales et marcheurs aléatoires

Soit g une fonction décroissante dans $\mathbb{R}^+$

LPE, coupures minimales et marcheurs aléatoires

Soit g une fonction décroissante dans $\mathbb{R}^+$

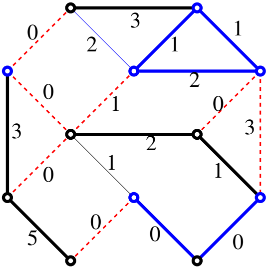
- X est une FPMIN pour F ssi X est une FPMAX pour $F \circ g$



LPE, coupures minimales et marcheurs aléatoires

Soit g une fonction décroissante dans $\mathbb{R}^+$

- X est une FPMIN pour F ssi X est une FPMAX pour $F \circ g$

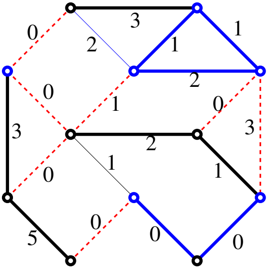


LPE, coupures minimales et marcheurs aléatoires

Soit g une fonction décroissante dans $\mathbb{R}^+$

- X est une FPMIN pour F ssi X est une FPMAX pour $F \circ g$

Soit F^p : $F^p(u) = [F(u)]^p$



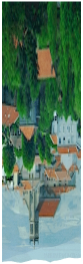
LPE, coupures minimales et marcheurs aléatoires

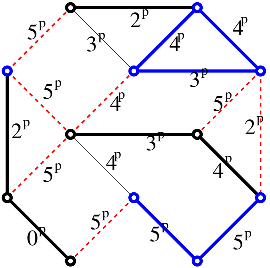
Soit g une fonction décroissante dans $\mathbb{R}^+$

- X est une FPMIN pour F ssi X est une FPMAX pour $F \circ g$

Soit F^p : $F^p(u) = [F(u)]^p$

- X est une FPMAX pour F^p ssi X est une FPMAX pour F





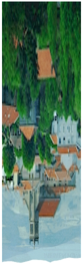
LPE, coupures minimales et marcheurs aléatoires

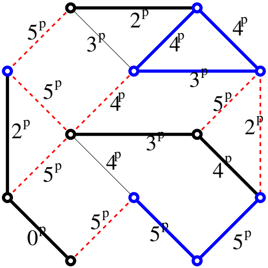
Soit g une fonction décroissante dans $\mathbb{R}^+$

- X est une FPMIN pour F ssi X est une FPMAX pour $F \circ g$

Soit F^p : $F^p(u) = [F(u)]^p$

- X est une FPMAX pour F^p ssi X est une FPMAX pour F
- Propriété non vérifiée par les coupures minimales et les marcheurs aléatoires





LPE & coupure minimale, marcheurs aléatoires

Théorème

- *Il existe un réel k tel que pour $p \geq k$*
  - *toute coupure minimale pour F^p est une coupure par FPMAX pour F^p*

- Allène et al., *Some links between extremum spanning forests, watersheds and min-cuts*, IVC 2010

LPE & marcheurs aléatoires

Théorème

- *Il existe un réel k tel que pour tout $p \geq k$*
  - *toute coupure par marcheurs aléatoires pour F^p est une coupure par FPMAX pour F^p*

- C. Couprie et al., *Power watersheds: a new image segmentation framework extending graph cuts, random walker and optimal spanning forest*, Procs. ICCV 2009

Topologie ...

Problème

- *Quel est la* **dimension** *d'une LPE ?*
- *Les contours des régions forment-ils des* **courbes** *(variétés) ?*
- *Peut-on toujours* **représenter** *les contours dans une image ?*
- *Une région possède-t-elle des* **trous** *?*
- *Une LPE peut-elle être obtenue par* **"déformation continue"** *du relief ?*

Topologie ...

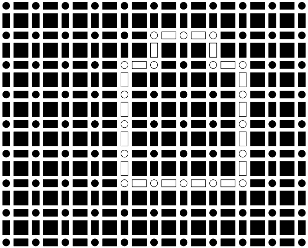
Problème

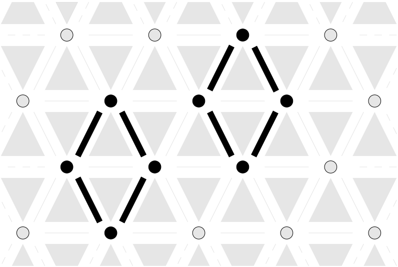
- *Quel est la* **dimension** *d'une LPE ?*
- *Les contours des régions forment-ils des* **courbes** *(variétés) ?*
- *Peut-on toujours* **représenter** *les contours dans une image ?*
- *Une région possède-t-elle des* **trous** *?*
- *Une LPE peut-elle être obtenue par* **"déformation continue"** *du relief ?*

- La structure de **graphe d'arêtes** n'est **pas assez riche** pour y répondre

Les complexes (cubiques ou simpliciaux)

- Structure combinatoire issue de la topologie algébrique
  - Poincaré, début du 20ème siècle





LPE dans les complexes, résultat saillant

Résultats

- *Dans un complexe de dimension n, une LPE est toujours de dimension* $n - 1$
- *Lien fort, à travers un théorème d'équivalence, entre LPE et collapse (opération qui permet de définir le squelette d'un complexe)*

- Cousty et al., *Collapses and Watersheds in pseudomanifolds*, Procs. IWCIA 2009

Résumé : La famille des LPE