



Lignes couplées
P.Poulichet
Octobre 2006

Nous étudions dans ce chapitre le couplage d'une ligne vers un autre ligne. Cette étude se fait en transitoire et dans le cas ou une seule ligne est alimentée. Des tensions et des courants apparaissent sur la ligne 2 car les courants et tensions sur la ligne 1. Le couplage électrique et magnétique de la ligne 1 vers la ligne 2 fait apparaître des tensions et des courants sur la ligne 2 alors que celle-ci n'est pas alimentée.

Nous étudierons dans un premier temps la ligne isolée pour après étendre aux lignes couplées. La démonstration des expressions donnant les tensions et les courants dans la ligne parasitée est un peu longue et pas forcément utile à une 1^{ère} compréhension. Les paragraphes 2.2 et 2.3 peuvent être sautés.

PLAN

1	Rappel sur la théorie des lignes	3
1.1	Calcul de l'inductance linéique d'un câble coaxial.....	3
1.2	Capacité linéique du câble coaxial.....	4
2	Lignes couplées [1]	5
2.1	Modèle des lignes couplées	5
2.2	Résolution des équations	7
2.2.1	Tension sur la ligne 2	7
2.2.2	Courant sur la ligne 2	8
2.3	Etude d'un exemple	8
2.3.1	Expressions donnant la tension et le courant sur la ligne parasitée	9
2.3.2	Déterminations des constantes D et E	9
3	Solutions des équations	10
3.1	Allure des signaux sur la ligne parasitée.....	11
4	Impédance et vitesse de mode commun et de mode différentielle	12
4.1	Rappel sur le mode commun et le mode différentiel	12
4.2	Impédance et vitesse de mode commun.....	13
4.2.1	Capacité équivalente	13
4.2.2	Inductance équivalente	14
4.2.3	Vitesse et impédance caractéristique en mode commun	14
4.3	Impédance et vitesse de mode différentiel	14
4.3.1	Capacité équivalente	14
4.3.2	Inductance équivalente	14
4.3.3	Vitesse et impédance caractéristique en mode différentiel.....	15
4.4	Etude d'un exemple	15
4.5	Conditions sur l'égalité des vitesses de mode commun et de mode différentielle	16

1 Rappel sur la théorie des lignes

Le modèle d'une ligne sans perte est celui de la Figure 1. L et C sont des inductances linéiques (H.m^{-1}) et capacités linéiques (F.m^{-1}). Le paramètre Δx caractérise la longueur du segment de la ligne pour lequel le modèle présenté est valable. La longueur Δx doit être choisie de telle façon que $\Delta x \ll \lambda$ (λ : longueur d'onde).

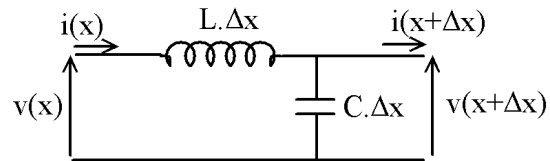


Figure 1 : modèle de la ligne sans perte

En écrivant la différence des tensions d'entrée et de sortie et la différence des courants d'entrée et de sortie, on obtient une équation dite des Télégraphistes. A partir de cette équation on met en évidence l'existence d'ondes incidentes et d'ondes réfléchies. Le rapport de la tension au courant à l'intérieur de la ligne donne l'impédance caractéristique Z_c . La vitesse de propagation v est définie par la relation ci-dessous :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

1.1 Calcul de l'inductance linéique d'un câble coaxial

Nous calculons l'inductance externe. L'inductance interne qui correspond à l'énergie à l'intérieur du conducteur n'est pas prise en compte.

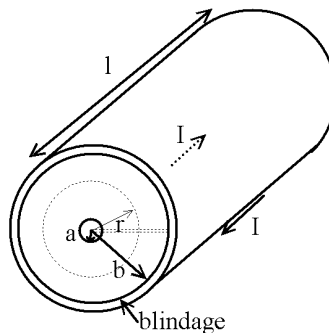


Figure 2 : coaxial

A est le rayon de l'âme et b le rayon du blindage. Pour calculer l'inductance, on calcule le flux magnétique généré par le courant à l'intérieur du câble coaxial. L'intégration du flux se fait entre le rayon a et b . En effet, pour $r > b$ le flux est nul car il est vu de l'extérieur du câble deux courants de sens opposés. Le courant I circule dans l'âme et il revient par le blindage.

Appliquons le théorème d'Ampère :

$$\oint H \cdot dl = I \Rightarrow \oint \frac{B}{\mu_0} \cdot dl = \frac{B}{\mu_0} 2\pi r = I \Rightarrow B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

Le flux ϕ est : $\phi = LI = \iint B \cdot dS = l \int_a^b \mu_0 \frac{I}{2\pi r} dr = \mu_0 \frac{l}{2\pi} I [\ln r]_a^b = \mu_0 \frac{l}{2\pi} I \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

L'inductance linéique (H.m⁻¹) L est donc : $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Pour un câble coaxial standard,

$\frac{b}{a} = 3,6$. L'inductance est donc de 0,256 μ H pour un mètre de longueur.

1.2 Capacité linéique du câble coaxial

Appliquons le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrique E à l'intérieur du coaxial de la Figure 2. dS est un élément de surface, Q représente les charges liées à la tension.

$$\int E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot r \cdot l}$$

V_a – V_b est le potentiel entre l'âme et le blindage. Il se calcule par intégration du champ électrique entre a et b. Ainsi,

$$V_a - V_b = \int_a^b E \cdot dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot l} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On sait d'autre part que : $Q = C(V_a - V_b)$. Donc, $C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$. Il s'agit là encore d'une

capacité linéique en F.m⁻¹. Dans les mêmes conditions que pour le coaxial présenté plus haut et avec $\epsilon_r = 2,3$, $C = 100$ pF.m⁻¹.

Il est important de noter que l'inductance et la capacité dépendent des dimensions de la ligne et de sa structure : forme des conducteurs, séparation, proximité de la masse...

Pour le câble coaxial considéré jusqu'à présent le calcul de Z_c et v donne :

$$Z_c = \sqrt{\frac{0,256 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}}} = 50 \Omega \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\sqrt{0,256 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Réciproquement, à partir de Z_c et v, il est possible de déterminer les valeurs de L et C à partir des relations suivantes :

$$L = \frac{Z_c}{v} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{Z_c \cdot v}$$

2 Lignes couplées [1]

La Figure 3 représente deux lignes couplées placées sur un substrat du type circuit imprimé. La ligne génératrice est alimentée par un signal impulsionnel et la ligne réceptrice est passive. Cette dernière est le siège de tensions et de courants qui sont générés par le passage du courant dans la ligne génératrice. Le couplage entre les deux lignes est du type électrique et magnétique.

Le couplage magnétique est généré par la circulation d'un courant dans la ligne génératrice. Une partie de ce champ magnétique est intercepté par la surface de la ligne réceptrice. Elle est donc le siège de tensions induites. Par la suite, nous modéliserons le couplage magnétique entre les deux lignes par un transformateur associé à une mutuelle inductance. La mutuelle inductance dépend de la nature du milieu séparant les deux lignes et dépend de la distance entre les deux lignes.

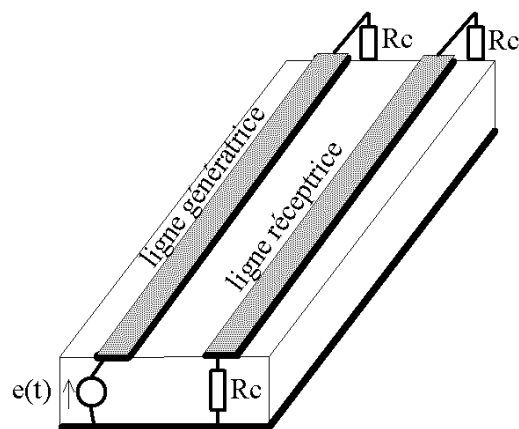


Figure 3 : lignes couplées

Le couplage électrique entre les deux lignes est engendré par le potentiel existant sur la ligne génératrice. Il donne naissance à un champ électrique entre les deux lignes. Le couplage électrique sera modélisé par la suite par un couplage sous forme de capacité intervenant entre les deux lignes. La capacité de couplage dépend de la distance entre les deux lignes, du diélectrique entre les deux lignes et de la surface des deux conducteurs.

2.1 Modèle des lignes couplées

Nous ferons le calcul pour deux lignes identiques placées l'une à côté de l'autre. Le modèle de la Figure 4 reprend donc deux schémas équivalents de deux lignes. Ce modèle est valable pour une longueur de ligne Δx . Il est rajouté un terme de couplage par mutuelle inductance $M \cdot \Delta x$ et un terme capacitif $\gamma \cdot \Delta x$ entre les deux lignes.

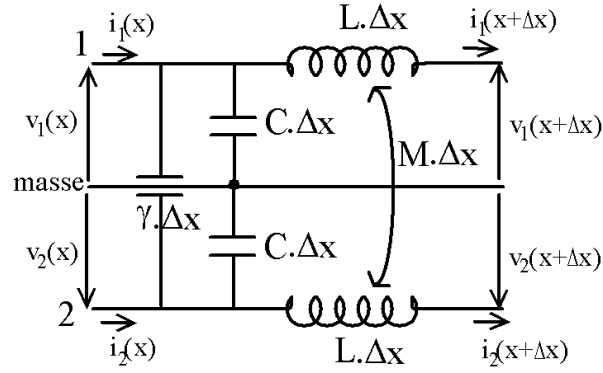


Figure 4 : schéma des lignes couplées

Les chutes de tensions aux bornes des inductances et le courant dans les capacités C et γ sont :

$$\begin{aligned} v_1(x+\Delta x) - v_1(x) &= -L\Delta x \frac{\partial i_1(x+\Delta x)}{\partial t} - M\Delta x \frac{\partial i_2(x+\Delta x)}{\partial t} \\ v_2(x+\Delta x) - v_2(x) &= -L\Delta x \frac{\partial i_2(x+\Delta x)}{\partial t} - M\Delta x \frac{\partial i_1(x+\Delta x)}{\partial t} \\ i_1(x+\Delta x) - i_1(x) &= -C\Delta x \frac{\partial v_1(x)}{\partial t} - \gamma\Delta x \frac{\partial (v_1(x) - v_2(x))}{\partial t} \\ i_2(x+\Delta x) - i_2(x) &= -C\Delta x \frac{\partial v_2(x)}{\partial t} - \gamma\Delta x \frac{\partial (v_2(x) - v_1(x))}{\partial t} \end{aligned}$$

Quand $\Delta x \rightarrow 0$, on peut remplacer $\lim \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$ par $\frac{\partial v}{\partial x}$. D'autre part, pour soulager l'écriture on omet de placer les variables x et $x + \Delta x$. Les quatre équations deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -L \frac{\partial i_1}{\partial t} - M \frac{\partial i_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} &= -L \frac{\partial i_2}{\partial t} - M \frac{\partial i_1}{\partial t} \\ \frac{\partial i_1}{\partial x} &= -(C + \gamma) \frac{\partial v_1}{\partial t} + \gamma \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial i_2}{\partial x} &= \gamma \frac{\partial v_1}{\partial t} - (C + \gamma) \frac{\partial v_2}{\partial t} \end{aligned}$$

Le terme $M \frac{\partial i_2}{\partial t}$ représente le couplage de la ligne 2 vers la ligne 1. Ce terme est souvent négligé car le couplage entre les deux lignes n'est pas favorable. Justifions ceci sur un exemple : supposons que 10 % de l'énergie transite de la ligne 1 vers la ligne 2 ; il vient que 10 % de cette énergie retourne vers la ligne 1. Le fait de négliger le terme $M \frac{\partial i_2}{\partial t}$ revient donc à négliger 1 % de l'énergie renvoyé de la ligne 2 vers la ligne 1. Avec le même raisonnement on peut négliger le terme $\gamma \frac{\partial v_2}{\partial t}$.

2.2 Résolution des équations

2.2.1 Tension sur la ligne 2

On est en présence de quatre équations et nous cherchons à déterminer l'allure de la tension sur la ligne 2. Prenons les transformées de Laplace des équations précédentes.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -LpI_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = -LpI_2 - MpI_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial i_1}{\partial x} = -(C+\gamma)pV_1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial i_2}{\partial x} = \gamma pV_1 - (C+\gamma)pV_2 \quad (4)$$

(1) et (3) donnent :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = L(C+\gamma)p^2V_1 \quad (5)$$

Pour que l'équation soit homogène, il est « naturel » de poser le terme $L(C+\gamma)$ comme étant l'inverse d'une vitesse au carré. Donc $v = \frac{1}{\sqrt{L(C+\gamma)}}$.

(2), (3) et (4) donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} &= -Lp(\gamma pV_1 - (C+\gamma)pV_2) - Mp(-(C+\gamma)pV_1) \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - L(C+\gamma)p^2V_2 &= (-L\gamma + M(C+\gamma))p^2V_1 \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - L(C+\gamma)p^2V_2 &= \left(-\frac{\gamma}{(C+\gamma)} + \frac{M}{L}\right) \left(\frac{p}{v}\right)^2 V_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Posons maintenant : $K = \frac{M}{L} \left(\frac{C+\gamma}{\gamma}\right)$ et $\alpha = \frac{\gamma}{C+\gamma}$. L'équation (6) est alors :

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - L(C+\gamma)p^2V_2 = \alpha(K-1) \left(\frac{p}{v}\right)^2 V_1 \quad (7)$$

La solution de l'équation (5) est la somme d'une onde de tension se propageant dans le sens des $x > 0$ et dans le sens des $x < 0$:

$$V_1 = Ae^{-p\frac{x}{v}} + Be^{+p\frac{x}{v}} \quad (8)$$

Les deux constantes A et B sont à déterminer avec les conditions aux limites. Reportons (8) dans (7) :

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - L(C+\gamma)p^2V_2 = A\alpha(K-1) \left(\frac{p}{v}\right)^2 e^{-p\frac{x}{v}} + B\alpha(K-1) \left(\frac{p}{v}\right)^2 e^{+p\frac{x}{v}} \quad (9)$$

La solution de l'équation (9) est la somme d'une solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. La solution de l'équation sans second membre est :

$$V_2 = C e^{-p\frac{x}{v}} + D e^{+p\frac{x}{v}}$$

La solution particulière est de la forme :

$$V_2 = E e^{-p\frac{x}{v}} + F e^{+p\frac{x}{v}}$$

En calculant séparément E et F, on obtient la solution générale de l'équation (7) :

$$V_2 = \left(D - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p A \right) e^{-p\frac{x}{v}} + \left(E + \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p B \right) e^{+p\frac{x}{v}} \quad (10)$$

A, B, D et E sont des constantes qui sont à préciser lors des conditions aux limites. Nous avons quatre inconnues, il faut donc quatre équations pour résoudre. Nous allons déterminer le courant I_2 et les relations entre la tension V_2 et le courant I_2 par l'intermédiaire des résistances d'entrée et de sortie de la ligne 2 nous donnera les quatre équations.

2.2.2 Courant sur la ligne 2

Déterminons maintenant le courant I_2 . La relation (1) nous donne le courant I_1 :

$$I_1 = -\frac{1}{Lp} \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{Lv} \left(A e^{-p\frac{x}{v}} - B e^{+p\frac{x}{v}} \right)$$

La quantité $L.v$ est homogène à une impédance caractéristique Z_c . La relation (2) nous fournit le courant I_2 .

$$I_2 = -\frac{1}{Lp} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + Mp I_1 \right)$$

$$I_2 = -\frac{1}{Lp} \left(e^{-p\frac{x}{v}} \left(-D \frac{p}{v} + \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v^2} p^2 A - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{1}{v} p A \right) + e^{+p\frac{x}{v}} \left(E \frac{p}{v} + \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v^2} p^2 B - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{1}{v} p B \right) + \frac{Mp}{Lv} \left(A e^{-p\frac{x}{v}} - B e^{+p\frac{x}{v}} \right) \right)$$

$$I_2 = -\frac{1}{Lv} \left(e^{-p\frac{x}{v}} \left(-D + \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p A - \alpha \frac{K-1}{2} A + A \frac{M}{L} \right) + e^{+p\frac{x}{v}} \left(E + \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p B - \alpha \frac{K-1}{2} B - B \frac{M}{L} \right) \right)$$

$$I_2 = \frac{1}{Lv} \left(e^{-p\frac{x}{v}} \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} A - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p A \right) + e^{+p\frac{x}{v}} \left(-E + \alpha \frac{K+1}{2} B - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p B \right) \right)$$

2.3 Etude d'un exemple

Supposons les lignes adaptées en entrée et en sortie comme représentée sur la Figure 5. Comme il n'existe pas d'ondes réfléchies, la tension et le courant sur la ligne 1 sont données par les relations suivantes :

$$V_1 = V(p) e^{-p\frac{x}{v}} \quad \text{et} \quad I_1 = \frac{V(p)}{Rc} e^{-p\frac{x}{v}}$$

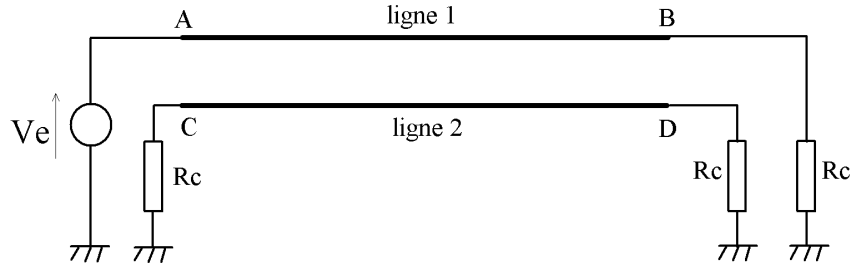


Figure 5 : lignes chargées par leur impédance caractéristique

2.3.1 Expressions donnant la tension et le courant sur la ligne parasitée

Les autres relations se simplifient. On obtient deux équations qui décrivent la tension et le courant sur la ligne 2.

$$V_2(x) = \left(D - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} pV \right) e^{-p \frac{x}{v}} + E e^{+p \frac{x}{v}}$$

$$I_2(x) = \frac{1}{Lv} \left(e^{-p \frac{x}{v}} \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} V - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} pV \right) - E \cdot e^{+p \frac{x}{v}} \right)$$

2.3.2 Déterminations des constantes D et E

Pour déterminer D et E, on écrit les conditions aux limites :

- En entrée de la ligne, en $x = 0$, on a : $V_2(0) = D + E = -Rc \cdot I_2(0)$

$$\text{et } I_2(0) = \frac{1}{Rc} \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} V - E \right)$$

- En sortie de la ligne en $x = l$, $V_2(l) = \left(D - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{l}{v} pV \right) e^{-p \frac{l}{v}} + E e^{+p \frac{l}{v}} = Rc \cdot I_2(l)$

$$\text{et } I_2(l) = \frac{1}{Rc} \left(e^{-p \frac{l}{v}} \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} V - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{l}{v} pV \right) - E \cdot e^{+p \frac{l}{v}} \right)$$

Nous avons deux équations et deux inconnues :

- En $x = 0$, $V_2(0) = -Rc \cdot I_2(0) \Rightarrow$

$$D + E = - \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} V - E \right) \Rightarrow \boxed{D = \alpha \frac{K+1}{4} V}$$

- En $x = 1$, $V_2(l) = Rc.I_2(l)$

$$V_2(l) = \left(D - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{l}{v} pV \right) e^{-p \frac{l}{v}} + E e^{+p \frac{l}{v}} = \left(e^{-p \frac{l}{v}} \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} V - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{l}{v} pV \right) - E \cdot e^{+p \frac{l}{v}} \right)$$

$$\Rightarrow 2E e^{+p \frac{l}{v}} = \left(e^{-p \frac{l}{v}} \left(-\alpha \frac{K+1}{2} V \right) \right) \Rightarrow \boxed{E = -\alpha \frac{K+1}{4} V e^{-2p \frac{l}{v}}}$$

On reporte D et E dans les expressions de V_2 et I_2 et on obtient :

$$\boxed{V_2 = \left(\alpha \frac{K+1}{4} V - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} pV \right) e^{-p \frac{x}{v}} - \alpha \frac{K+1}{4} V e^{-p \frac{2l-x}{v}}$$

$$I_2 = \frac{1}{Rc} \left(e^{-p \frac{x}{v}} \left(-\alpha \frac{K+1}{4} V - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} pV \right) + \alpha \frac{K+1}{4} V e^{-p \frac{2l-x}{v}} \right)}$$

3 Solutions des équations

A partir des 2 relations encadrées juste au dessus, en entrée de la ligne et pour en $x = 0$, on a pour la tension V_2 :

$$V_2(0) = D + E = \alpha \frac{K+1}{4} V - \alpha \frac{K+1}{4} V e^{-2p \frac{l}{v}} = \alpha \frac{K+1}{4} V \left(1 - e^{-2p \frac{l}{v}} \right)$$

En sortie de la ligne en $x = l$, on a pour la tension V_2 :

$$V_2(l) = -\alpha \frac{K-1}{2} \tau pV e^{-p \tau}$$

L'original des transformées de Laplace de $V_2(0)$ et $V_2(l)$ sont alors en remplaçant K et α par leurs valeurs :

$$v_2(t,0) = \alpha \frac{K+1}{4} V (v(t) - v(t-2\tau)) = \frac{\gamma}{C+\gamma} \frac{M \left(\frac{C+\gamma}{\gamma} \right) + 1}{4} V [v(t) - v(t-2\tau)] = \frac{V}{4} \left(\frac{M}{L} + \frac{\gamma}{C+\gamma} \right) [v(t) - v(t-2\tau)]$$

$$v_2(t,l) = -\alpha \frac{K-1}{2} \tau \frac{d(v(t-\tau))}{dt} V = -\frac{\gamma}{C+\gamma} \frac{M \left(\frac{C+\gamma}{\gamma} \right) - 1}{2} \tau \frac{d(v(t-\tau))}{dt} V = \frac{V}{2} \left(\frac{M}{L} - \frac{\gamma}{C+\gamma} \right) \tau \frac{d(v(t-\tau))}{dt}$$

$v(t)$ est un signal de la Figure 6 et avec une amplitude unitaire.

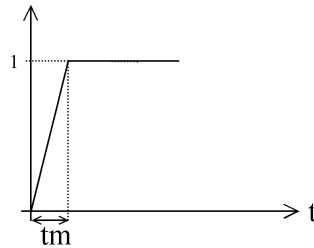


Figure 6 : allure du signal sur la ligne parasitante

La dérivée est non nulle uniquement pendant la durée tm . On peut écrire alors :

$$v_2(t,l) = -\frac{V}{2} \left(\frac{M}{L} - \frac{\gamma}{C+\gamma} \right) \frac{\tau}{tm}$$

3.1 Allure des signaux sur la ligne parasitée

On considère le schéma de la Figure 5. La tension d'entrée est de la même forme que le signal de la Figure 6. Les tensions en entrée et en sortie de la ligne parasitée sont données par les expressions précédentes et leur forme en fonction du temps est donnée à la Figure 7. Sur la ligne parasitée il apparaît deux tensions qui sont appelées : onde arrière pour celle qui apparaît en arrière de la ligne 2 et l'onde avant pour la tension qui apparaît en avant de la ligne 2. La largeur de l'onde arrière est de 2τ tandis que la largeur de l'onde avant est de tm . L'onde avant apparaît décalée de τ . Les amplitudes de l'onde arrière et de l'onde avant dépendent des paramètres $K = \frac{M}{L} \left(\frac{C+\gamma}{\gamma} \right)$ et $\alpha = \frac{\gamma}{C+\gamma}$. Ceux ci sont caractéristiques de la ligne.

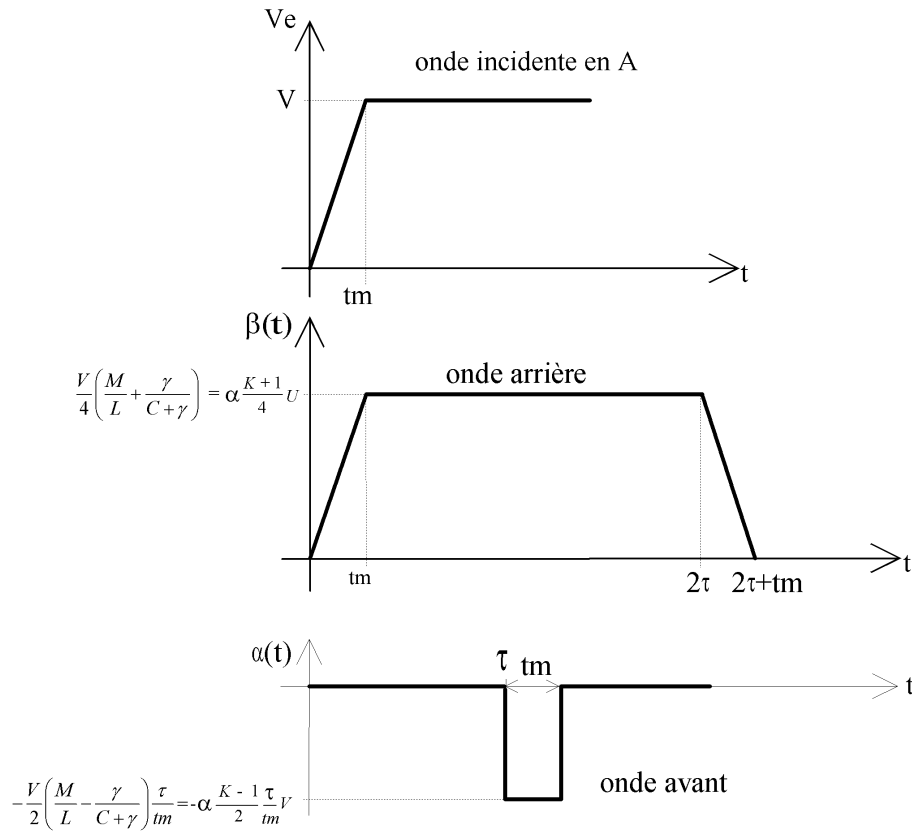


Figure 7 : allure de l'onde arrière et de l'onde avant

4 Impédance et vitesse de mode commun et de mode différentielle

L'amplitude de l'onde avant et de l'onde arrière donnée dans le paragraphe précédent dépend de la configuration des lignes : pour certaines lignes le couplage magnétique est prédominant tandis que pour d'autres c'est le couplage électrique qui est le plus important.

Nous allons calculer les vitesses et les impédances caractéristiques en mode différentiel et en mode commun et nous montrerons que dans le cas d'égalité des 2 vitesses, l'onde avant s'annule.

4.1 Rappel sur le mode commun et le mode différentiel

Quand on a une liaison constituée d'au moins 2 conducteurs, les tensions de mode commun et de mode différentiel appliqué sur la liaison sont différentes. L'effet des 2 tensions est similaire si on considère séparément une tension de mode commun v_{mc} et de mode différentielle v_{md} calculée à partir des relations suivantes :

$$v_{mc} = \frac{v_1 + v_2}{2} \text{ et } v_{md} = v_1 - v_2$$

V_1 et V_2 sont les tensions présentes sur la liaison. Les générateurs équivalents permettant de reproduire ces mêmes tensions sont représentés à la Figure 8.

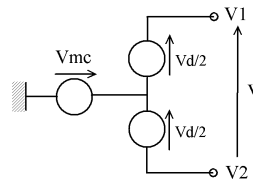


Figure 8 : générateurs de mode commun et de mode différentiel

Pour prendre un exemple simple considérons le schéma de la Figure 9 : il est appliqué 2 tensions sur 2 conducteurs et ces tensions sont remplacées par les générateurs délivrant une tension de mode commun et de mode différentiel.

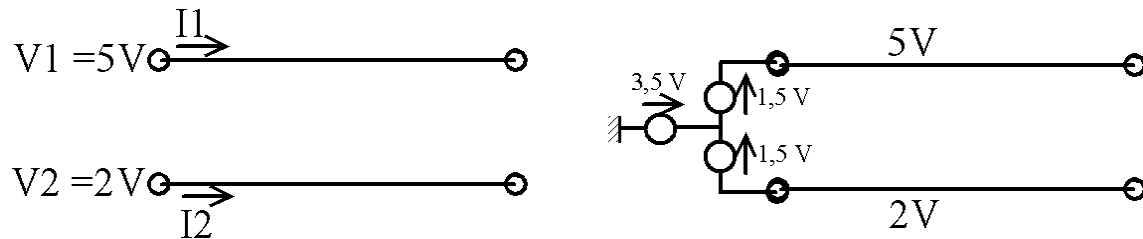


Figure 9 : exemple d'utilisation du mode commun et du mode différentiel

Dans le cas du mode commun, $V_1 = V_2$ et $I_1 = I_2$. Dans le cas du mode différentiel, $V_1 = -V_2$ et $I_1 = -I_2$.

Nous allons étudier le schéma équivalent des 2 lignes en mode commun et en mode différentiel.

4.2 Impédance et vitesse de mode commun

Nous allons déterminer le modèle inductif et le modèle capacitif équivalent à partir du schéma de la Figure 10. On considère $V_1 = V_2$ et $I_1 = I_2$.

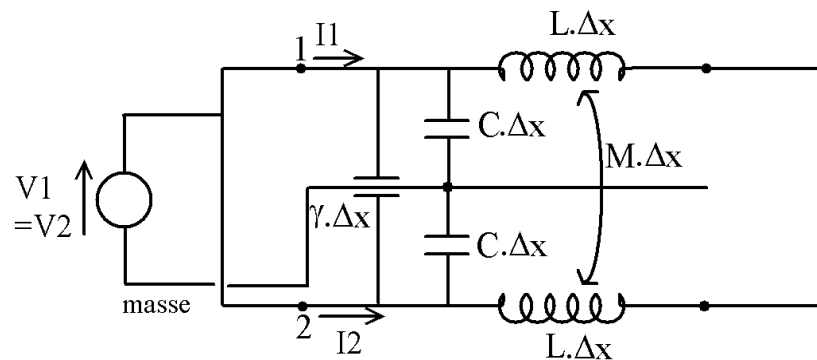


Figure 10 : schéma équivalent en commun

4.2.1 Capacité équivalente

En considérant uniquement les capacités de la Figure 10, on obtient :

$$I_1 = C\Delta x \frac{\partial V_1}{\partial t} - \gamma\Delta x \frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial t} = C\Delta x \frac{\partial V_1}{\partial t} \quad \text{et} \quad I_2 = C\Delta x \frac{\partial V_1}{\partial t} - \gamma\Delta x \frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial t} = C\Delta x \frac{\partial V_1}{\partial t}$$

La capacité équivalente est : $C_{MC} = C$.

4.2.2 Inductance équivalente

La tension aux bornes d'une inductance est : $U_{L1} = L \frac{\partial I_1}{\partial t} + M \frac{\partial I_2}{\partial t}$

L'inductance équivalente est : $L_{MC} = (L + M)$

4.2.3 Vitesse et impédance caractéristique en mode commun

A partir des 2 relations précédentes, on calcule la vitesse de mode commun et l'impédance caractéristique en mode commun. On obtient :

$$v_{MC} = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}} \quad \text{et} \quad Z_{MC} = \sqrt{\frac{(L+M)}{C}}$$

4.3 Impédance et vitesse de mode différentiel

Le générateur équivalent est connecté en commun sur les 2 entrées des lignes par rapport à la masse. Le schéma équivalent est sur la Figure 11.

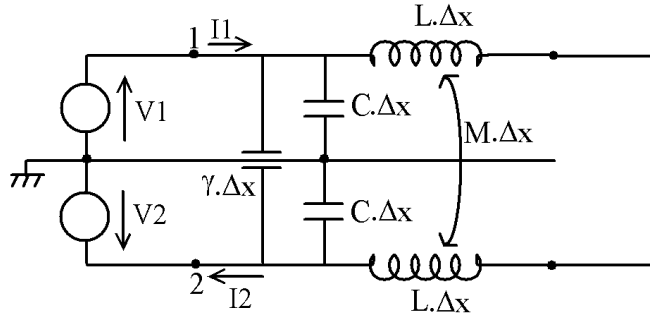


Figure 11 : schéma équivalent en mode différentiel

4.3.1 Capacité équivalente

On a les expressions suivantes :

$$I_1 = C\Delta x \frac{\partial V_1}{\partial t} + \gamma\Delta x \frac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial t} = (C + 2\gamma)\Delta x \frac{\partial V_1}{\partial t} \quad \text{et} \quad I_2 = C\Delta x \frac{\partial V_2}{\partial t} + \gamma\Delta x \frac{\partial (V_2 - V_1)}{\partial t} = (C + 2\gamma)\Delta x \frac{\partial V_2}{\partial t}$$

La capacité équivalente est : $C_{MD} = C + 2.\gamma$.

4.3.2 Inductance équivalente

La tension aux bornes d'une inductance est : $U_{L1} = L \frac{\partial I_1}{\partial t} - M \frac{\partial I_2}{\partial t}$

Les 2 inductances sont en parallèle. $Leq = L - M$.

4.3.3 Vitesse et impédance caractéristique en mode différentiel

La vitesse et l'impédance caractéristique en mode différentiel sont :

$$v_{MD} = \frac{1}{\sqrt{(C + 2\gamma)(L - M)}} \quad \text{et} \quad Z_{MD} = \sqrt{\frac{L - M}{C + 2\gamma}}$$

4.4 Etude d'un exemple

A titre d'exemple, nous étudions avec le logiciel Hyperlynx le circuit imprimé multi couches de la

Figure 12. Nous testons la diaphonie (le couplage) entre les 2 lignes supérieures. On constate d'après les résultats de simulation que l'impédance de mode commun et de mode différentiel sont très différentes.

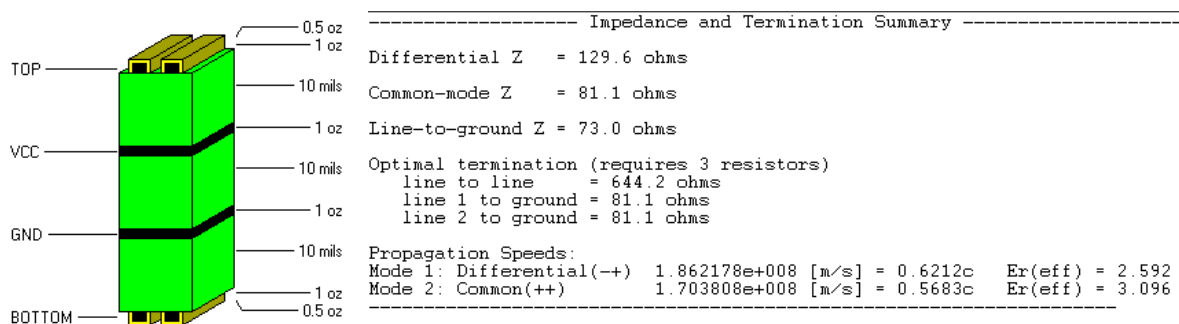


Figure 12 : circuit multi couches et résultat de simulation sur Hyperlynx

Les vitesses de mode commun et de mode différentielle sont également très différentes. La Figure 13 montre les lignes d'iso valeurs pour le mode différentiel sur la gauche et pour le mode commun sur la droite. Le champ magnétique tourne autour des conducteurs et le champ électrique est placé entre les conducteurs ou entre ces derniers et la ligne Vcc.

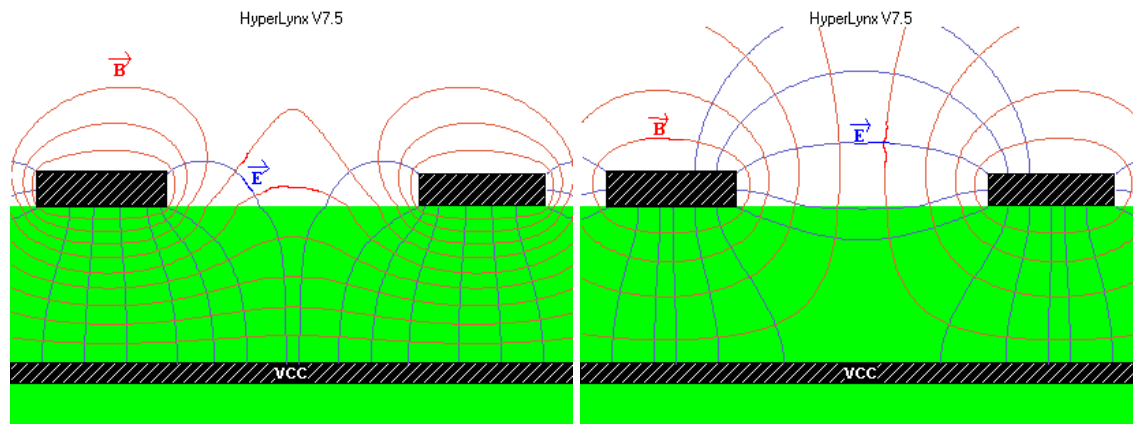


Figure 13 : allure des lignes de champ magnétique et du champ électrique pour 2 lignes en mode différentiel sur la gauche et en mode commun sur la droite

4.5 Conditions sur l'égalité des vitesses de mode commun et de mode différentielle

A partir des 2 relations donnant la vitesse en mode commun et en mode différentiel, on obtient :

$$v_{MD} = v_{MC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}} = \frac{1}{\sqrt{(L-M)(C+2\gamma)}}$$

$$MC = -MC + 2\gamma(L-M)$$

$$M(2C+2\gamma) = 2\gamma L$$

$$\frac{M}{L} = \frac{\gamma}{C+\gamma}$$

Cette dernière relation montre que $K = 1$. Dans le cas d'un diélectrique homogène l'onde avant de valeur $v_2(t,l) = -\frac{V}{2} \left(\frac{M}{L} - \frac{\gamma}{C+\gamma} \right) \frac{\tau}{tm}$ est donc nulle.

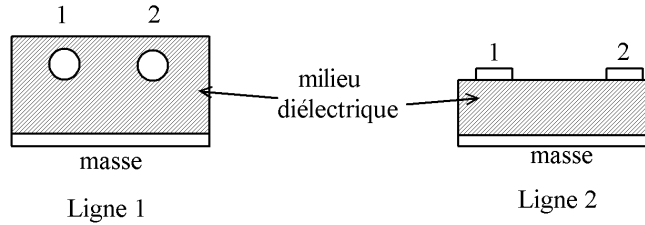


Figure 14 : 2 exemples de lignes

Les vitesses de transmission en mode différentielle v_{MD} (entre les 2 conducteurs 1 et 2) et de mode commun v_{MC} (1 et 2 relié ensemble par rapport à la masse) ne sont pas les mêmes pour les lignes 1 et 2 de la Figure 14.

Dans le cas de la ligne 1, le diélectrique est homogène (il entoure les lignes de façon que la propagation en mode commun ou en mode différentiel soit fixé par le même milieu) et

$$v_{MC} = v_{MD} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

(c est la vitesse de la lumière et ϵ_r est la constante diélectrique du matériau

diélectrique). Dans le cas de la ligne 2, il n'y a pas d'égalité des vitesses et $v_{MC} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$ tandis

que en mode différentiel une partie de l'énergie est transmise dans l'air tandis que l'autre partie est transmise dans le diélectrique.

Bibliographie

- [1] Electronique des impulsions. Tome VI. Lignes couplées en régime transitoire par Jean Paul vabre. Livre à la bibliothèque.
- [2] Cours Intel : <http://www.intel.com/education/highered/signal/elct762.htm> et voir Crosstalk.