Cours de Morphologie Mathématique

Dilatations, érosions

Hugues Talbot

`talboth@esiee.fr`

ISBS / ESIEE

1er semestre 2004-2005

Rappel des ressources

- Le cours sera mis en ligne au fur et à mesure:

  `http://www.esiee.fr/~talboth/ISBS/Morpho/`

- Également copie des TDs + TPs (en avance).

Rappel du cours précédent

- Représentation d’images, résolution spatiale et spectrale.
- Notion d’ordre, ordre partiel
- Notions de majorant, minorant, sup, et inf
- Treillis complets.

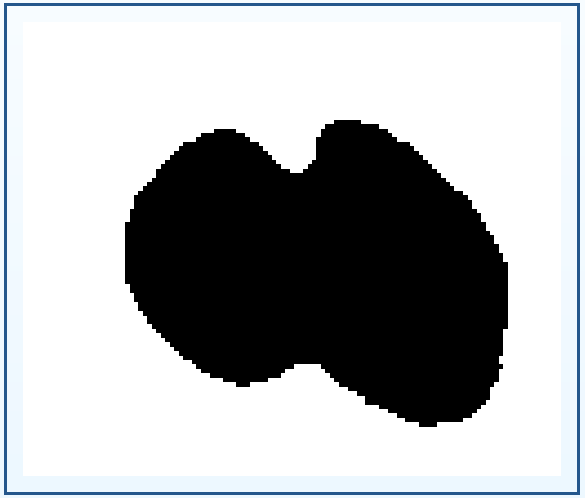
Questions

1. Questions sur le cours précédent ?
2. Remarques ?
3. Questions sur la suite du cours?

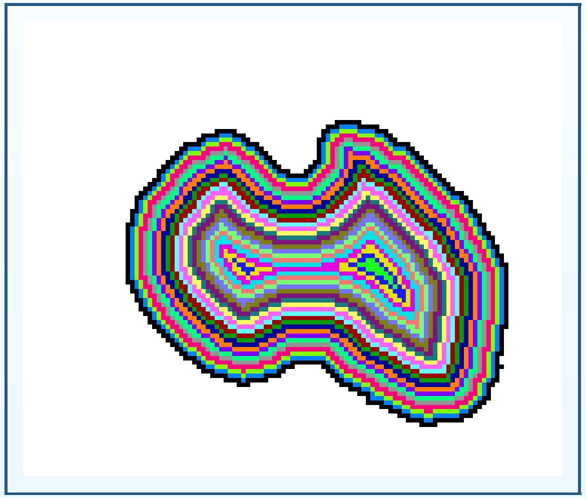
Concepts de base, suite

Concept de base: la distance

- La fonction distance



Noyaux de cellules



Fonction distance

- Dépendente du graphe sous-jacent.

Concept de base: la mesure

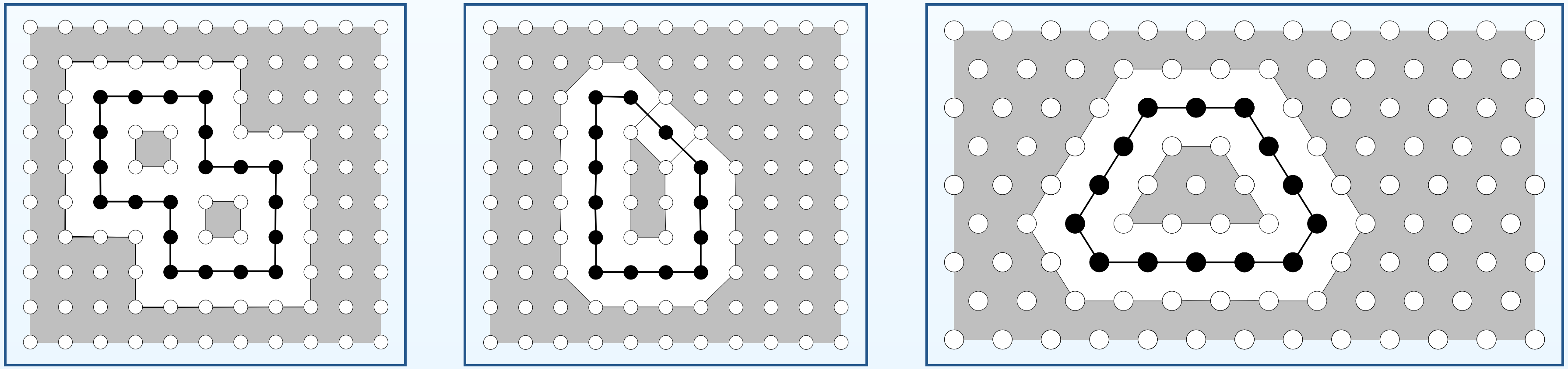
C’est ce qui nous intéresse *in fine*.

- Nombre d’objets.
- Longueur, aire, volume.
- Orientation, élongation.
- La MM est surtout basé sur la mesure, non la forme.

Concept de base: la grille/le graphe

La grille digitale pose des problèmes:

- Connectivité:

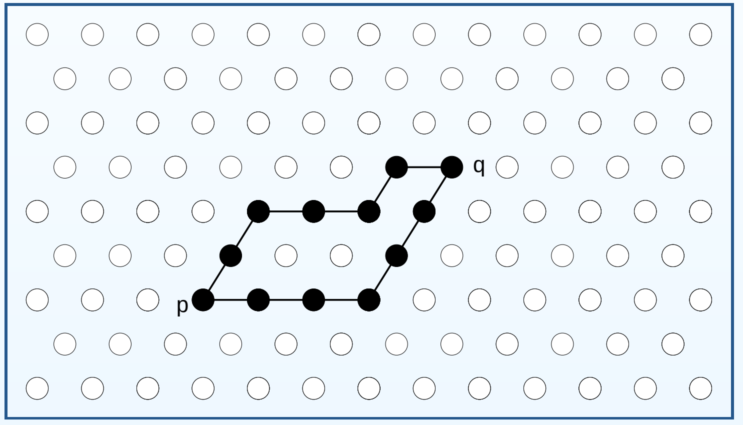


4-connexe 8-connexe 6-connexe

Pour résoudre le problème de la distance 4 ou 8-connexe, on doit considérer le fond 4-connexe et les objets 8-connexe ou vice-versa.

Grille/graphe et distance

- distance



Il existe plus d’un plus court chemin

Il est possible d’invoquer la distance Euclidienne pour résoudre ce problème mais des problèmes d’implémentation et de rapidité surgissent alors.

Dualité – complémentarité

- Sup et Inf dans un treillis complet jouent des rôles symétriques.
- Deux opérateurs ψ et ψ^* sont duaux si pour tout X:

$$\psi(X^c) = [\psi^*(X)]^c$$

- Pour le treillis des parties d'un ensemble: complémentation
- Pour le treillis des fonctions dans R: symétrie par rapport à 0.

Autres points importants

- Le lien entre la théorie des ensembles et la théorie des treillis:
  - Décomposition par seuillage
  - Ombre
  - Fonctions bi-valuées
- Importance des propriétés mathématiques quand on définit les opérateurs.

Liens avec d'autres théories

MM complémente :

- La géométrie discrete (distance, squelettes, etc).
- La théorie des graphes (plus court chemins, LPE, computational geometry, etc).
- les statistiques: modèles aléatoires, théorie de la mesure, stéréologie.
- Théories linéaires: replace $+$ with $\wedge$.
- Scale-space: remplacer le filtrage Gaussien avec des filtres morphologiques.
- Isophotes (level sets): dilatation avec des EDPs, FMM est une fonction distance.
- Informatique, algorithmes.

Erosions et dilatations

Erosion

Dans le contexte le plus général, une érosion ϵ est un opérateur qui commute avec l'inf.

$$\bigwedge \epsilon(.) = \epsilon \bigwedge (.)$$

Ce qui n'est pas très intuitif. On commence par définir l'érosion par élément structurant (ES):

$$\epsilon_B(X) = \{x | B_x \subseteq X\}$$

C-à-d: est-ce que l'ensemble contient l'ES?
Définition équivalente:

$$\epsilon_B(X) = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$$

Erosion sur le treillis des fonctions:

Dans ce cas:

$$\epsilon_B(f) = \bigwedge_{b \in B} f_{-b}$$

Ce qui est équivalent à:

$$[\epsilon_B(f)](x) = \min_{b \in B} f(x+b)$$

Érosion par un ES non plat (rarement utilisé dans la pratique, sauf avec une parabole)

$$[\epsilon_{B_v}(f)](x) = \min_{b \in B_v} \{f(x+b) - B_v(b)\}$$

Dilatation

La dilatation est le dual de l'érosion: une dilatation δ sur un treillis complet commute avec le sup:

$$\bigvee \delta(.) = \delta \bigvee (.)$$

Ce qui est toujours aussi peu intuitif. On commence par la dilatation par un élément structrant (ES):

$$\delta_B(X) = \{x | B_x \cap X \neq \emptyset\}$$

c-à-d: est-ce que l'ES intersecte l'ensemble.
Q: Quel est le dilaté d'un point ?
Définition équivalente:

$$\delta_B(X) = \bigcup_{b \in B} X_{-b}$$

Le cas des fonctions:

Dans le cas du treillis des fonctions:

$$\delta_B(f) = \bigvee_{b \in B} f_{-b}$$

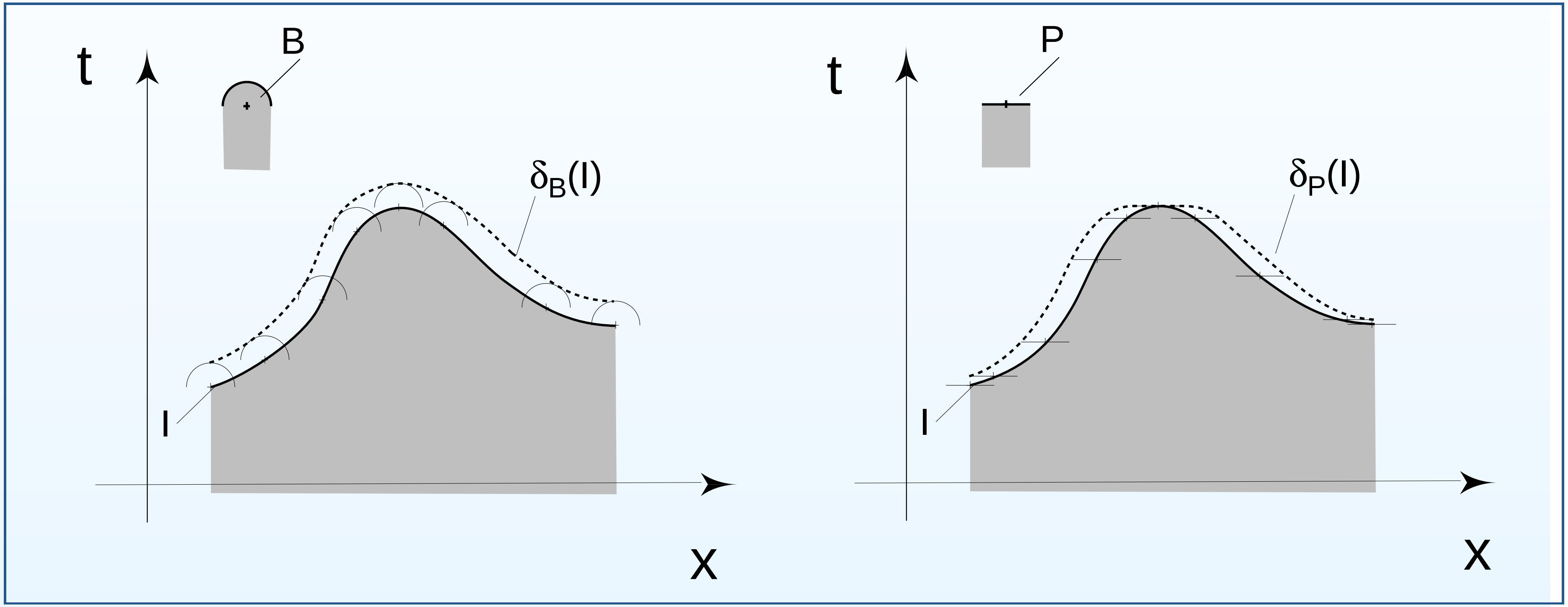
Ce qui est équivalent à:

$$[\delta_B(f)](x) = \max_{b \in B} f(x+b)$$

Dilatation par un ES non-plat:

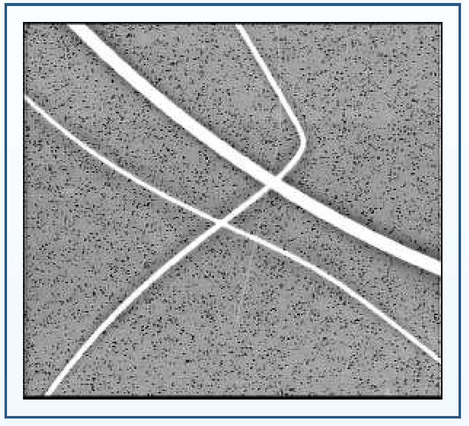
$$[\delta_{B_v}(f)](x) = \max_{b \in B_v} \{f(x+b) + B_v(b)\}$$

Illustrations - érosion/dilatation

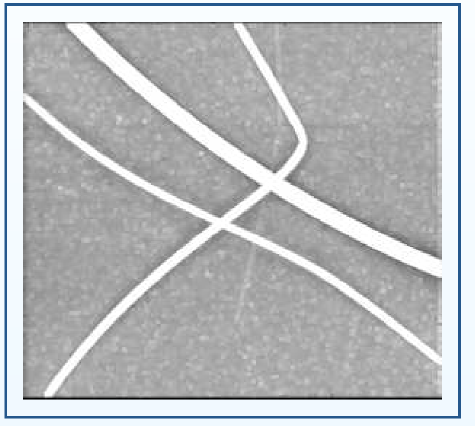


Dilatation d'une image 1-D.

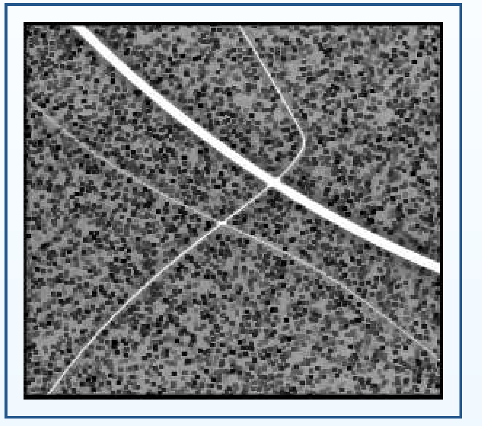
Illustration (cont.)



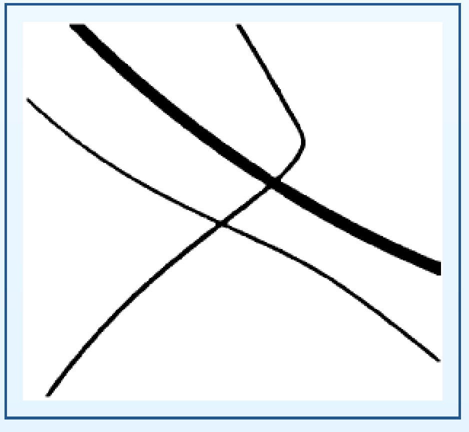
orig.



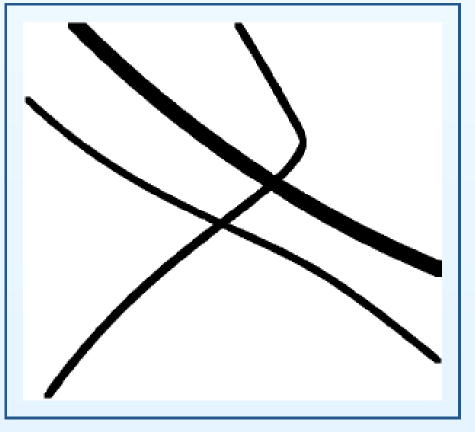
dilaté



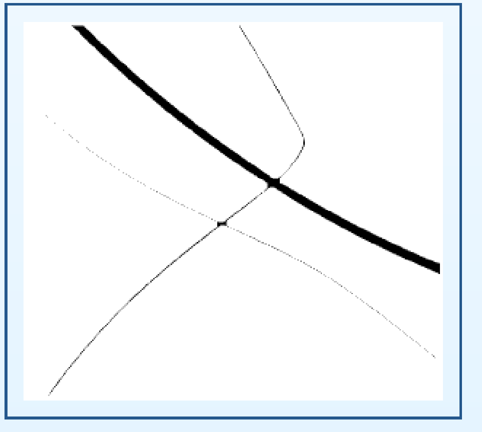
erodé



orig.



dilaté



erodé

Propriétés

- dualité: $\delta_B(f) = -\epsilon_B(-f)$
- croissance: $f \leq g \Rightarrow \delta_B(f) \leq \delta_B(g), \epsilon_B(f) \leq \epsilon_B(f)$
- distributivité: $\delta(\bigvee_i f_i) = \bigvee_i \delta(f_i)$; $\epsilon(\bigwedge_i f_i) = \bigwedge_i \epsilon(f_i)$
- composition: $\delta_{B_2}\delta_{B_1} = \delta_{(\delta_{\check{B}_2} B_1)}$; $\epsilon_{B_2}\epsilon_{B_1} = \epsilon_{(\delta_{\check{B}_2} B_1)}$
- relation d'ordre: $\epsilon_B \leq I \leq \delta_B$ ssi B contient son origine.
- invariance par translation.

Algorithme: dilatation en temps constant

- Dilatation en temps constant par un segment (fenêtre glissante ou récursive (van Herk))
- composition de dilatations horiz. et vert.: dilatation par un carré.
- dilatation par des polygônes: approximations de disques.

Van Herk algorithm

- Image d'entrée 1D de longueur nx est divisée en block de taille λ, où λ est la longueur de l'élément structurant en pixels.
- Les pixels sont étiquetés de 0 à $nx - 1$, en supposant que nx est un multiple de λ (sinon on rajoute des pixels jusqu'à ce que ce soit le cas).
- On a besoin de deux buffers (tampons) g et h.
- Dans le cas de la dilatation, on prend le maximum *récursivement* à l'intérieur des blocks, à droite pour g, à gauche pour h.
- Lorsque g et h sont contruits, le résulat pour la dilatation en chaque point x est donné en considérant le maximum des valeurs pour g à la position $x + \lambda - o - 1$ et h à la position $x - o$, avec o l'origine de l'ES.

La dilatation se calcule en temps constant quelle que soit la longueur de l'ES.

Choix de l'élément structurant

- Contrairement à ce qu'on pourrait penser la *forme* de l'ES n'est pas tellement critique (il y a des exceptions).
- En particulier l'érosion ou la dilatation ne sont pas très utiles pour définir les formes.
- ES courants: carrés, diamant, polygones, disques Euclidiens, lignes, paires de points.
- Application des ES arbitraires sont rares.
- Changer l'origine de l'ES translate le résultat.